

УДК 539.376:539.42

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ДИФфуЗИИ ОКРУЖАЮЩЕЙ СРЕДЫ НА ДЛИТЕЛЬНУЮ ПРОЧНОСТЬ ПОЛОГО ЦИЛИНДРА ПРИ ОДНООСНОМ РАСТЯЖЕНИИ

А. М. Локощенко, В. В. Назаров

Институт механики Московского государственного университета им. М. В. Ломоносова,
119192 Москва

E-mails: loko@imec.msu.ru, inmec130@mail.ru

Решена задача о длительной прочности растягиваемой толстостенной трубы, во внутренней полости которой содержится агрессивная среда. Выполнен анализ процесса диффузии такой среды в материал трубы. Предложено приближенное решение уравнения диффузии, основанное на введении диффузионного фронта, и проведена оценка погрешности. Получена зависимость времени разрушения трубы от переменной растягивающего напряжения и концентрации среды, заполняющей ее полость.

Ключевые слова: полый цилиндр, одноосное растяжение, агрессивная среда, уравнение диффузии, поврежденность, длительная прочность.

Введение. Высокие требования к качеству и надежности конструкций, находящихся в условиях длительного высокотемпературного нагружения, приводят к необходимости прогнозировать долговечность их работы с учетом различных специфических особенностей. Одним из важных факторов, существенно влияющих на ползучесть и длительную прочность металлов, является агрессивная среда, в которой находятся исследуемые конструкции или их элементы. Исследования показали, что влияние агрессивной среды на ползучесть и длительную прочность металлов в основном характеризуется происходящими в металле диффузионными и коррозионными процессами (см., например, [1]). В настоящей работе для анализа этого влияния применяется кинетическая теория Работнова [2], содержащая два параметра — поврежденность ω и концентрацию c в материале компонентов окружающей среды, ослабляющих либо упрочняющих его сопротивление действию внешних нагрузок и зависящих от времени t и пространственных координат. Точное аналитическое решение уравнения диффузии для полого цилиндра очень громоздко, что затрудняет его применение на практике. В последнее время используются вычислительные средства, позволяющие получить решение этого уравнения численно. Тем не менее для оценки зависимости решения уравнения от различных внешних параметров и получения решения в пригодном для практического применения виде существует необходимость развития приближенных методов.

1. Постановка задачи. В данной работе исследуется длительное разрушение растягиваемой толстостенной трубы, в полости которой содержится среда, диффундирующая в материал трубы. Будем считать, что длина трубы во много раз превышает размеры ее поперечного сечения. Тогда зависимостью решения задачи от продольной координаты можно пренебречь.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 05-01-00184) и Международного научного фонда INTAS (код проекта 03-51-6046).

Введем в поперечном сечении трубы радиальную координату r ($a \leq r \leq b$; a, b — внутренний и внешний радиусы трубы). Параметры c, ω являются функциями r и t . В качестве кинетического уравнения для концентрации $c(r, t)$ примем уравнение диффузии, кинетическое уравнение для поврежденности $\omega(r, t)$ запишем с учетом зависимости скорости $\partial\omega/\partial t$ от концентрации $c(r, t)$.

Принимая в качестве условия разрушения равенство $\omega = 1$, получаем, что в некоторый момент времени t_1 нарушается сплошность трубы на ее внутренней поверхности $r = a$. При $t > t_1$ поверхность $r = R(t)$, разделяющая области неразрушенного и разрушенного материалов, распространяется в глубь трубы. Эта поверхность определяется из условия $\omega(R(t), t) = 1$. До наступления времени t_1 скрытого разрушения имеем $R(t) = a$. При $t > t_1$ зависимость координаты фронта разрушения R от величины t определяется из решения задачи. Появление фронта разрушения приводит к уменьшению площади поперечного сечения и соответственно к увеличению продольного напряжения.

В данной работе рассмотрен случай отсутствия коррозионного фронта, при этом вводится функция $c_m(t)$, характеризующая среднее в интегральном смысле по площади поперечного сечения значение концентрации $c(r, t)$. В этом случае скорость накопления поврежденности $d\omega/dt$ зависит от средней концентрации $c_m(t)$:

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = G\left(\frac{\sigma(t)}{1 - \omega(t)}\right)^n f(c_m(t))$$

($\sigma(t)$ — зависящее от времени растягивающее напряжение; $f(c_m(t))$ — функция, удовлетворяющая условию $f|_{c_m=0} = 1$). Введем безразмерные переменные

$$\bar{r} = \frac{r}{b}, \quad \bar{t} = \frac{Dt}{b^2}, \quad \bar{a} = \frac{a}{b}, \quad \bar{c} = \frac{c}{c_0}, \quad \bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\sigma_0}, \quad \bar{G} = \frac{\sigma_0^n b^2}{D} G, \quad (1)$$

где D — коэффициент диффузии, полагаемый постоянной величиной; c_0 — постоянное значение концентрации на внутренней полости трубы; σ_0 — произвольная константа, имеющая размерность напряжения. В дальнейшем черта над безразмерными величинами опускается. Система уравнений в безразмерных переменных (1) принимает следующий вид:

$$\frac{\partial c}{\partial t} = \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial c}{\partial r}, \quad c(r, 0) = 0, \quad c(a, t) = 1; \quad (2)$$

$$c(1, t) = 0; \quad (3)$$

$$\frac{\partial c}{\partial r}(1, t) = 0; \quad (4)$$

$$c_m(t) = \frac{2}{1 - a^2} \int_a^1 c(r, t) r dr; \quad (5)$$

$$\frac{d\omega(t)}{dt} = G\left(\frac{\sigma(t)}{1 - \omega(t)}\right)^n f(c_m(t)), \quad \omega(0) = 0, \quad \omega(t^*) = 1. \quad (6)$$

Уравнения (3), (4) представляют собой различные граничные условия на внешней поверхности трубы.

Из кинетического соотношения (6) можно определить связь времен разрушения растягиваемого цилиндра в агрессивной (t^*) и нейтральной (t_c^*) средах:

$$(G(n + 1))^{-1} = \int_0^{t_c^*} (\sigma(t))^n dt = \int_0^{t^*} (\sigma(t))^n f(c_m(t)) dt.$$

В качестве $f(c_m(t))$ можно принять линейную или экспоненциальную функцию. Далее найдем приближенное решение уравнения диффузии $c(r, t)$ и среднюю зависимость $c_m(t)$ при различных граничных условиях и определим погрешности решения, обусловленные использованием приближенных зависимостей $c_m(t)$.

Из уравнения диффузии следует, что значительное изменение концентрации $c(r, t)$ в каждой точке происходит по истечении некоторого времени, зависящего от расстояния данной точки до внутренней поверхности трубы. В силу этого разделим область поперечного сечения цилиндра на невозмущенную и возмущенную части и исследуем движение границы диффузионного фронта между ними [1, 3, 4]. Для этого рассмотрим две последовательные стадии развития процесса диффузии в трубе. Первая стадия ($0 \leq t \leq t_0$) характеризуется движением диффузионного фронта $l(t)$ от $l(0) = a$ до $l(t_0) = 1$, вторая стадия ($t > t_0$) характеризуется ненулевым значением концентрации среды во всей трубе и соответствует процессу асимптотического установления равновесной концентрации при заданных условиях на внешней границе цилиндра.

2. Первая стадия диффузионного процесса. На первой стадии диффузионного процесса для граничных условий (3), (4) зависимость концентрации c от радиуса r примем в виде

$$c(r, t) = \begin{cases} ((l-r)/(l-a))^k, & a < r \leq l(t), \quad 0 < t \leq t_0, \\ 0, & l(t) \leq r \leq 1, \quad 0 < t \leq t_0. \end{cases} \quad (7)$$

Положим, что зависимость (7) удовлетворяет уравнению диффузии (2) интегрально:

$$\int_a^1 \left(\frac{\partial c}{\partial t} - \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial c}{\partial r} \right) r dr = 0. \quad (8)$$

Подставляя искомое решение (7) в равенство (8) и проводя интегрирование по r , получаем уравнение для скорости движения диффузионного фронта

$$\frac{dl}{dt} = \frac{ak(k+1)(k+2)}{(l-a)(ak+2l)}. \quad (9)$$

Из дифференциального уравнения (9) находим зависимость координаты диффузионного фронта от времени

$$t = \frac{1}{ak(k+1)(k+2)} \int_a^l (2l+ak)(l-a) dl = \frac{(l-a)^2 [4l+a(3k+2)]}{6ak(k+1)(k+2)}. \quad (10)$$

Первая стадия завершается, когда диффузионная граница достигает внешней границы кольца ($l(t_0) = 1$). Согласно (10) время окончания первой стадии

$$t_0 = \frac{(1-a)^2 (4+3ak+2a)}{6ak(k+1)(k+2)}.$$

3. Вторая стадия диффузионного процесса. На второй стадии диффузионного процесса при решении уравнения диффузии (2) необходимо учитывать граничное условие для концентрации $c(r, t)$ при $r = 1$. Сначала рассмотрим случай, когда концентрация среды на внешней границе кольца равна нулю (граничное условие (3)). Равновесная концентрация среды ($c(r) = \ln r / \ln a$) достигается при условии $\partial c / \partial t = 0$. При $t > t_0$ представим зависимость $c(r, t)$ в виде

$$c(r, t) = \left(\frac{1-r}{1-a} \right)^k + \left[\frac{\ln r}{\ln a} - \left(\frac{1-r}{1-a} \right)^k \right] A(t), \quad A(t_0) = 0, \quad t > t_0. \quad (11)$$

Подставляя искомое решение (11) в равенство (8), получаем дифференциальное уравнение для функции $A(t)$

$$\left(\frac{(1-a)^2}{k+2} + \frac{a^2(1-2\ln a) - 1}{4\ln a} - \frac{1-a}{k+1} \right) \frac{dA}{dt} = \frac{ak(1-A)}{1-a}.$$

Отсюда

$$A(t) = 1 - \exp \left(\frac{-ak(t-t_0)}{(1-a)\left\{ (1-a)^2/(k+2) + [a^2(1-2\ln a) - 1]/(4\ln a) - (1-a)/(k+1) \right\}} \right).$$

Рассмотрим решение уравнения (2) при граничном условии (4) на внешней границе цилиндра. При $t > t_0$ зависимость $c(r, t)$ примем в виде

$$c(r, t) = \left(\frac{1-r}{1-a} \right)^k + \left[1 - \left(\frac{1-r}{1-a} \right)^k \right] B(t), \quad B(t_0) = 0, \quad t > t_0. \quad (12)$$

Функция $B(t)$ характеризует концентрацию среды, диффундирующей через поверхность цилиндра во внешнее пространство. Подставляя искомое решение (12) в равенство (8) и интегрируя его по координате r , получаем

$$(1-a) \left(\frac{1+a}{2} + \frac{1-a}{k+2} - \frac{1}{k+1} \right) \frac{dB}{dt} + (1-B) \frac{ak}{1-a} = 0.$$

Отсюда

$$B(t) = 1 - \exp \left(\frac{-ak(t-t_0)}{(1-a)^2 \left[(1+a)/2 + (1-a)/(k+2) - 1/(k+1) \right]} \right).$$

4. Сравнительный анализ приближенного и точного решений. Рассмотрим средние значения концентрации $c_m(t)$ в цилиндре, вычисляемые из уравнения (5). Средние значения концентрации, определяемые при граничных условиях (3), (4), с учетом точного решения уравнения диффузии обозначим через c_{m01} , c_{m02} , с учетом приближенного решения — через c_{m1} , c_{m2} . Имеем

$$c_{m1}(t) = c_{m2}(t) = \frac{2(l-a)[l+a(k+1)]}{(1-a^2)(k+1)(k+2)}, \quad 0 < t < t_0,$$

$$c_{m1}(t) = \frac{2[1+a(k+1)]}{(1+a)(k+1)(k+2)} [1-A(t)] - \frac{1+a^2(2\ln a-1)}{2(1-a^2)\ln a} A(t), \quad t > t_0,$$

$$c_{m2}(t) = \frac{2[1+a(k+1)]}{(1+a)(k+1)(k+2)} [1-B(t)] + B(t), \quad t > t_0$$

(индексы 1, 2 соответствуют граничным условиям (3), (4)).

Погрешность $\varepsilon(k, t)$ приближенного решения будем определять соотношением

$$\varepsilon(k, t) = \int_0^t |c_{m0}(t) - c_m(k, t)| dt / \int_0^t c_{m0}(t) dt.$$

Расчеты проведены для трех значений параметра a ($a = 0,50; 0,75; 0,90$).

Зависимости $c_{m01}(t)$ и $c_{m02}(t)$ вычислялись с одинаковым шагом по пространству и времени, равным 10^{-4} . Для каждой задачи в приближенном методе задания $c(r, t)$ выбирается такое значение показателя степени k , которое при заданном значении a и $t \rightarrow \infty$ приводит к наименьшей ошибке $\varepsilon(k, t)$.

Вычисления показали, что при $a = 0,5$ $k_1 = 2,61$, $k_2 = 2,12$; при $a = 0,75$ $k_1 = 2,48$, $k_2 = 1,70$; при $a = 0,9$ $k_1 = 2,30$, $k_2 = 1,47$.

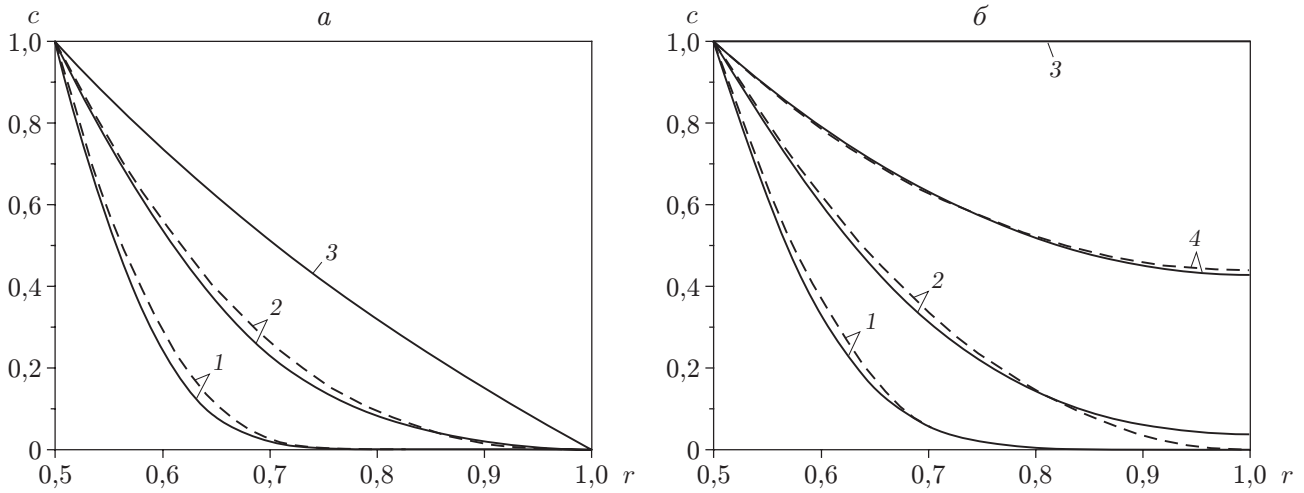


Рис. 1. Зависимости концентрации c в полном цилиндре от радиальной координаты r при $a = 0,5$ и различных значениях t :
 a — граничное условие (3), $t_0 = 0,017$; b — граничное условие (4), $t_0 = 0,025$; 1 — $t = 0,25t_0$; 2 — $t = t_0$; 3 — $t \rightarrow \infty$; 4 — $t = 4t_0$; сплошные линии — точное решение; штриховые — приближенное решение

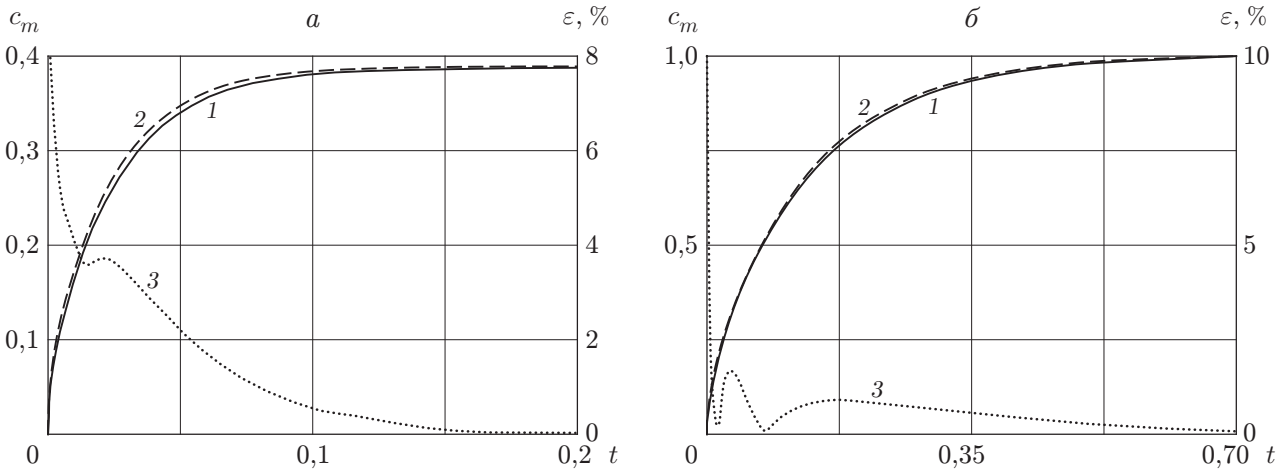


Рис. 2. Зависимости средней концентрации c_m в полном цилиндре (1, 2) и погрешности приближенного решения ε (3) от времени при $a = 0,5$:
 a — граничное условие (3); b — граничное условие (4); 1 — точное решение; 2 — приближенное решение

Зависимость показателя степени k от безразмерного внутреннего радиуса $0,5 \leq a \leq 0,9$ аппроксимируется дробно-степенной функцией $k = Q[(1 - a)/a]^n$, где $Q_1 = 2,62$, $n_1 = 0,06$, $Q_2 = 2,09$, $n_2 = 0,17$.

На рис. 1 приведены зависимости $c(r)$ при $a = 0,5$ и различных значениях времени t в случае граничного условия (3) (рис. 1, a) и в случае граничного условия (4) (рис. 1, b).

На рис. 2 приведены средние в интегральном смысле значения концентрации $c_m(t)$ в полном цилиндре при $a = 0,5$ и соответствующие им погрешности $\varepsilon(t)$ приближенного решения.

Сравнивая погрешности приближенного метода решения уравнения диффузии при рассмотренных граничных условиях, можно заметить, что при граничном условии (4)

значение ε существенно меньше, чем при постоянном нулевом значении концентрации на внешней поверхности полого цилиндра (граничное условие (3)).

Заключение. Исследована длительная прочность толстостенной трубы при меняющейся во времени растягивающей силе. Проанализирован процесс диффузии в материал трубы агрессивной среды, находящейся в ее внутренней полости. Предложено приближенное решение уравнения диффузии при двух различных граничных условиях и проведена оценка погрешностей. Получены зависимости времени разрушения трубы от меняющегося во времени осевого напряжения и концентрации среды внутри трубы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Локощенко А. М.** Ползучесть и длительная прочность металлов в агрессивных средах. М.: Изд-во Моск. гос. ун-та, 2000.
2. **Работнов Ю. Н.** Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.
3. **Баренблатт Г. И.** О некоторых приближенных методах в теории одномерной неустановившейся фильтрации жидкости при упругом режиме // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. 1954. № 9. С. 35–49.
4. **Шестериков С. А., Юмашева М. А.** К проблеме терморазрушения при быстром нагреве // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1983. № 1. С. 128–135.

*Поступила в редакцию 26/II 2006 г.,
в окончательном варианте — 18/VII 2006 г.*
