

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ, ВЫЗВАННОГО  
ТЕРМОКАПИЛЛЯРНЫМИ СИЛАМИ

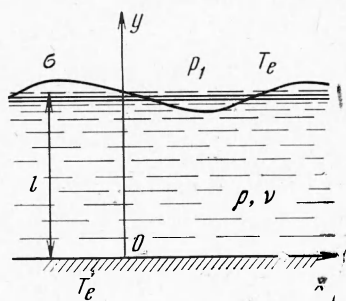
В. Н. Гончаренко, А. Л. Уринцев

(Ростов-на-Дону)

Изучается вопрос об устойчивости плоскопараллельного течения вязкой жидкости в слое со свободной границей при условиях невесомости. Движение жидкости вызвано зависимостью поверхностного натяжения от температуры. Точное решение для невозмущенной границы получено тем же способом, что и в работе [1], но при более общем граничном условии для температуры.

Исследование устойчивости проводится методом малых колебаний с учетом возмущения свободной границы. Рассмотрены асимптотики длинных волн и малых чисел Рейнольдса и найдены условия неустойчивости.

**1. Постановка задачи.** Рассмотрим в условиях невесомости слой вязкой несжимаемой жидкости, ограниченный с одной стороны свободной поверхностью, а с другой — твердой стенкой (фиг. 1). Предположим, что на свободной границе действует поверхностное натяжение с коэффициентом  $\sigma$ , линейно зависящим от температуры  $T$ .



Фиг. 1

Пусть вдоль твердой стенки задан постоянный градиент температуры. На свободной границе примем, что поток тепла через поверхность пропорционален разности температур жидкости и внешней среды, температура которой распределена по линейному закону с тем же градиентом  $A$ , что и на твердой стенке. Будем считать, что на поверхность жидкости со стороны внешней среды действует заданное давление, безразмерная величина которого  $p_1$  указана ниже.

Примем за единицы длины, времени, массы и температуры соответственно величины  $l, \rho\nu (-Ad\sigma/dT)^{-1}, \rho l^3, Al$ , где  $l$  — средняя толщина слоя жидкости,  $\rho$  — плотность,  $\nu$  — коэффициент кинематической вязкости.

Уравнения движения и граничные условия в безразмерных переменных имеют вид

$$R[\mathbf{v}_t + (\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v}] = \Delta\mathbf{v} - \nabla p \tag{1.1}$$

$$RP(T_t + \mathbf{v}\nabla T) = \Delta T, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0 \tag{1.2}$$

$$p_{nn} + p_1 = RW^{-1}N_{xx}(1 + N_x^2)^{-3/2} \quad (y = 1 + N) \tag{1.3}$$

$$p_{ns} = -\partial T / \partial s \quad (y = 1 + N) \tag{1.4}$$

$$N_t + v_x N_x = v_y \quad (y = 1 + N) \tag{1.5}$$

$$\partial T / \partial n + m(T - T_e) = 0 \quad (y = 1 + N) \tag{1.6}$$

$$T = T_e, \quad \mathbf{v} = 0 \quad (y = 0) \tag{1.7}$$

где  $\mathbf{v}$  — скорость жидкости,  $p$  — давление,  $\mathbf{n}$  — внешняя нормаль к жидкости,  $s$  — касательная,  $N = N(x, t)$  — возмущение свободной границы,  $p_1 = -1.5x + \text{const}$ ,  $T_e = x + \text{const}$  — температура внешней среды.

Задача содержит четыре безразмерных параметра:  
 $R = Vlv^{-1}$  — число Рейнольдса,  $W = \rho V^2 l \sigma^{-1}$  — число Вебера,  $P = \nu/\chi$  — число Прандтля ( $\chi$  — коэффициент температуропроводности),  $m$  — коэффициент теплообмена, а  $V = -Al(\rho\nu)^{-1}d\sigma/dT$  — характерная скорость.

Можно проверить, что формулы

$$v_{x0} = u = -\frac{3}{4}y^2 + \frac{1}{2}y, \quad v_{y0} = 0, \quad p_0 = p_1 \quad (1.8)$$

$$T_0 = x + RP \left( -\frac{1}{16}y^4 + \frac{1}{12}y^3 - \frac{1}{48} \frac{m}{1+m}y \right) + \text{const}$$

дают стационарное решение задачи (1.1) — (1.7) для невозмущенной свободной границы ( $N = 0$ ) при условии замкнутости потока [1]. Далее исследуется устойчивость этого решения.

Линеаризуя систему (1.1) — (1.7) в окрестности решения (1.8), исключая давление и вводя функцию тока соотношениями

$$v_x = v_{x0} + \psi_y, \quad v_y = -\psi_x \quad (1.9)$$

приходим к задаче

$$\Delta^2 \psi = R(\Delta \psi_t + u \Delta \psi_x - u'' \psi_x) \quad (1.10)$$

$$\Delta T = RP(T_t + u T_x + \psi_y - T_{0y} \psi_x) \quad (1.11)$$

$$R(\psi_{yt} - \frac{1}{4} \psi_{xy} + \psi_x) - \Delta \psi_y - 2\psi_{xxy} + 2N_{xx} - RW^{-1}N_{xxx} = 0 \quad (y=1) \quad (1.12)$$

$$\psi_{yy} - \psi_{xx} + u''N + T_x = 0 \quad (y=1) \quad (1.13)$$

$$N_t + uN_x + \psi_x = 0 \quad (y=1) \quad (1.14)$$

$$T_y + T_{0yy}N - T_{0yx}N_x + m(T + T_{0y}N) = 0 \quad (y=1) \quad (1.15)$$

$$T = 0, \quad \psi_x = \psi_y = 0 \quad (y=0) \quad (1.16)$$

Затем отделяем время и продольную координату  $x$ , полагая

$$(\psi, T, N) = (\varphi, \theta, a) e^{i\alpha(x-ct)} \quad (1.17)$$

где  $\varphi = \varphi(y)$ ,  $\theta = \theta(y)$ ,  $a$  — постоянная,  $\alpha$  — волновое число,  $c = c_r + ic_i$  — комплексная частота.

Заключение об устойчивости делаем в зависимости от знака мнимой части величины  $c$ : если для всех собственных значений  $c_i < 0$ , то решение (1.8) устойчиво, если же найдется хотя бы одно собственное значение, для которого  $c_i > 0$ , то имеем неустойчивость; случаю  $c_i = 0$  соответствует граница устойчивости (нейтральные возмущения).

В качестве нормировки выберем условие

$$a = 1 \quad (1.18)$$

С учетом (1.8), (1.17), (1.18) задача (1.10) — (1.16) преобразуется к виду

$$\psi''' - 2\alpha^2\psi'' + \alpha^4\psi = i\alpha R[(u-c)(\psi'' - \alpha^2\psi) - u''\psi] \quad (1.19)$$

$$\theta'' - \alpha^2\theta = RP\{i\alpha[(u-c)\theta - T_{0y}\psi] + \psi'\} \quad (1.20)$$

$$\varphi''' + [i\alpha R(c + \frac{1}{4}) - 3\alpha^2]\varphi' - i\alpha R\varphi + 2\alpha^2 - i\alpha^3 RW^{-1} = 0 \quad (y=1) \quad (1.21)$$

$$\varphi'' + \alpha^2\varphi + i\alpha\theta - 1.5 = 0 \quad (y=1) \quad (1.22)$$

$$\theta' - i\alpha + m \left[ \theta - \frac{mRP}{48(1+m)} \right] - \frac{1}{4}RP = 0 \quad (y=1) \quad (1.23)$$

$$\theta = \varphi = \varphi' = 0 \quad (y=0) \quad (1.24)$$

$$c = \varphi(1) - 0.25 \quad (1.25)$$

2. Асимптотика длинных волн. Полагая в (1.19) — (1.25)  $\alpha = 0$ , получаем

$$\varphi_0''' = 0, \quad \theta_0'' = RP\varphi_0' \quad (2.1)$$

$$\varphi_0''' = 0, \quad \varphi_0'' = 1.5 \quad (y=1) \quad (2.2)$$

$$\theta_0' + m\theta_0 = RP \left[ \frac{m^2}{48(1+m)} + \frac{1}{4} \right] \quad (y=1) \quad (2.3)$$

$$\theta_0 = \varphi_0 = \varphi_0' = 0 \quad (y=0) \quad (2.4)$$

$$c_0 = \varphi_0(1) = 0.25 \quad (2.5)$$

откуда находим

$$\varphi_0 = \frac{3}{4}y^2, \quad \theta_0 = RP y (1/4 y^2 + 5P_*^{-1}) \quad (2.6)$$

$$c_0 = 0.5 \quad (2.7)$$

где

$$P_* = 9.6 \frac{(m+1)^2}{(m-6)^2 - 48} \quad (2.8)$$

Считая задачу (2.1) — (2.5) при малых  $\alpha$  порождающей для системы (1.19) — (1.25), решение последней разыскиваем в виде

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} (i\alpha)^k \varphi_k, \quad \theta = \sum_{k=0}^{\infty} (i\alpha)^k \theta_k, \quad c = \sum_{k=0}^{\infty} (i\alpha)^k c_k \quad (2.9)$$

При достаточно малых волновых числах  $\alpha$  знак мнимой части  $c_i$  в силу равенства

$$c_i = \alpha c_1 + O(\alpha^3)$$

определяется знаком коэффициента  $c_1$ , который вычисляется при решении задачи

$$\varphi_1''' = R[(u - 1/2)\varphi_0'' - u''\varphi_0] \quad (2.10)$$

$$\theta_1'' = RP[(u - 1/2)\theta_0' - T_{0y}\varphi_0 + \varphi_1'] \quad (2.11)$$

$$\varphi_1''' = R(\varphi_0 - \frac{3}{4}\varphi_0'), \quad \varphi_1'' = -\theta_0 \quad (y=1) \quad (2.12)$$

$$\theta_1' + m\theta_1 = 1 \quad (y=1) \quad (2.13)$$

$$\theta_1 = \varphi_1 = \varphi_1' = 0 \quad (y=0) \quad (2.14)$$

$$c_1 = \varphi_1(1) \quad (2.15)$$

Решая систему (2.10) — (2.15), получаем для  $c_1$  значение

$$c_1 = \frac{1}{10}R(1 - P/P_*) \quad (2.16)$$

Анализ формулы (2.16) показывает, что при  $0 \leq m \leq m_* = 6 + 4\sqrt{3}$  имеем длинноволновую неустойчивость для любых чисел  $P$ . Если же  $m > m_*$ , то результат зависит от величины числа Прандтля: при  $P > P_*$  имеем устойчивость, для  $P < P_*$  — неустойчивость. График зависимости  $P_* = P_*(m)$  приведен на фиг. 2. Отметим, что при  $P < 9.6$  решение (1.8) неустойчиво для любых значений коэффициента теплообмена  $m$ .

3. Случай малых чисел Рейнольдса  $R$  и произвольных волновых чисел  $\alpha$ . Предполагая малость числа Рейнольдса, ищем решение задачи (1.19) — (1.25) в виде рядов

$$\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} R^k \psi_k, \quad \theta = \sum_{k=0}^{\infty} R^k \tau_k, \quad c = \sum_{k=0}^{\infty} R^k g_k \quad (3.1)$$

Подставляем разложения (3.1) в уравнения (1.19) — (1.25) и собираем члены с одинаковыми степенями малого параметра  $R$ ; при  $R^0$  находим

$$\psi_0''' - 2\alpha^2\psi_0'' + \alpha^4\psi_0 = 0, \quad \tau_0'' - \alpha^2\tau_0 = 0 \quad (3.2)$$

$$\psi_0''' - 3\alpha^2\psi_0' + 2\alpha^2 = 0 \quad (y = 1) \quad (3.3)$$

$$\psi_0'' + \alpha^2\psi_0 + i\alpha\tau_0 - 1.5 = 0 \quad (y = 1) \quad (3.4)$$

$$\tau_0' + m\tau_0 - i\alpha = 0 \quad (y = 1) \quad (3.5)$$

$$\psi_0 = \psi_0' = \tau_0 = 0, \quad (y = 0) \quad (3.6)$$

$$g_0 = \psi_0(1) - 0.25 \quad (3.7)$$

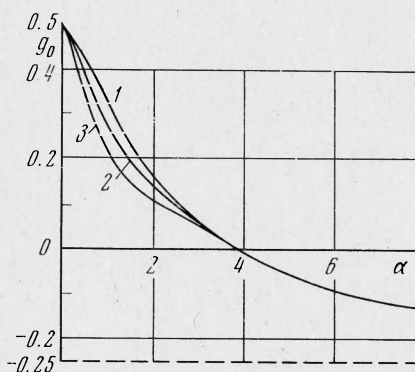
Вычисления дают для коэффициента  $g_0$  следующее значение:

$$g_0 = h_1(\operatorname{ch}\alpha - \alpha^{-1}\operatorname{sh}\alpha) + h_2\operatorname{sh}\alpha - 0.25 \quad (3.8)$$

где

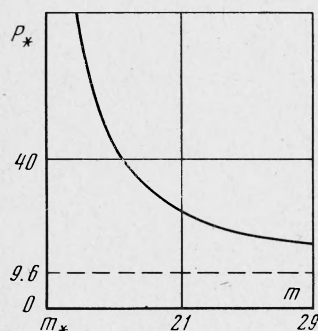
$$h_1 = \frac{\alpha^2 \operatorname{sh} \alpha}{2(\alpha + m \operatorname{th} \alpha)(\alpha^2 + \operatorname{ch}^2 \alpha)} - \frac{\alpha \operatorname{sh} \alpha}{\alpha^2 + \operatorname{ch}^2 \alpha} - \frac{\operatorname{ch} \alpha}{4(\alpha^2 + \operatorname{ch}^2 \alpha)} \quad (3.9)$$

$$h_2 = (\alpha^{-1} - \operatorname{th}\alpha)h_1 + (\alpha \operatorname{ch}\alpha)^{-1} \quad (3.10)$$



Фиг. 2

Зависимость главной части  $g_0$  фазовой скорости  $s$  от волнового числа  $\alpha$  для различных значений коэффициента  $m$  представлена графически на фиг. 3. Кривые 1, 2, 3 соответствуют  $m = 0, 1, 5 \cdot 10^6$ . При произвольном  $m$  в интервале от 0 до  $5 \cdot 10^6$  соответствующие графики  $g_0 = g_0(\alpha)$  заключены между кривыми 1 и 3. Коротковолновые возмущения локализуются вблизи свободной поверхности, а скорость их распространения, как показывают вычисления, мало отличается от  $-0.25$  — значения скорости основного течения  $v_x = u$  на границе. Коэффициент  $g_1$  определяется при решении задачи



Фиг. 3

$$\psi_1''' - 2\alpha^2\psi_1'' + \alpha^4\psi_1 = i\alpha[(u - g_0)(\psi_0'' - \alpha^2\psi_0) - u''\psi_0] \quad (3.11)$$

$$\tau_1'' - \alpha^2\tau_1 = P[i\alpha(u - g_0)\tau_0 + \psi_0'] \quad (3.12)$$

$$\psi_1''' - 3\alpha^2\psi_1' = i\alpha[\psi_0 - (g_0 + 1/4)\psi_0' + \alpha^2/W] \quad (y = 1) \quad (3.13)$$

$$\psi_1'' + \alpha^2\psi_1 = -i\alpha\tau_1 \quad (y = 1) \quad (3.14)$$

$$\tau_1' + m\tau_1 = P\left[\frac{m^2}{48(1+m)} + \frac{1}{4}\right] \quad (y = 1) \quad (3.15)$$

$$\psi_1 = \psi_1' = \tau_1 = 0 \quad (y = 0) \quad (3.16)$$

и представляется формулой

$$g_1 = ik_2(1 - W_*/W) \quad (3.17)$$

где  $W_* = k_1k_2^{-1}$ ,  $k_1 = k_1(\alpha) > 0$ ,  $k_2 = k_2(\alpha, m, P)$  — известные веществ-

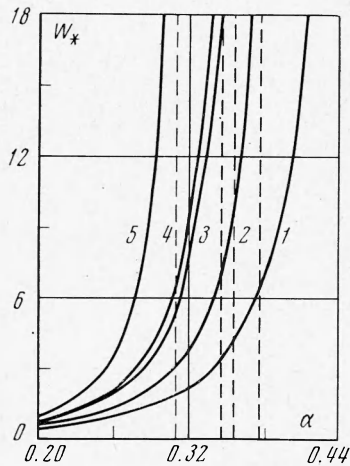
венные функции, явные выражения которых не приводятся ввиду их громоздкости.

Имеем

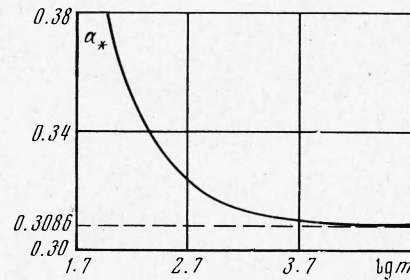
$$\operatorname{Im} c = k_2 (1 - W_* W^{-1}) R + o(R) \quad (3.18)$$

Следовательно, при малых числах Рейнольдса заключение об устойчивости зависит от знака величины  $k_2 (1 - W_* W^{-1})$ .

Численный анализ проводился для числа Прандтля, равного 7.3 (вода). Исследовалась зависимость критического значения числа Вебера



Фиг. 4



Фиг. 5

$W_*$  от волнового числа  $\alpha$  при разных  $m$ . Графики 1, 2, 3, 4, 5, соответствующие значениям коэффициента теплообмена  $m = 50, 100, 150, 200, 5 \cdot 10^3, 5 \cdot 10^6$ , приведены на фиг. 4.

При  $\alpha = 0$  величина  $W_*$  обращается в нуль, при  $\alpha \rightarrow \alpha_*$   $W_*$  неограниченно возрастает. В точке  $\alpha_*$  коэффициент  $k_2$  меняет знак:  $k_2 > 0$  для  $\alpha < \alpha_*$  и  $k_2 < 0$  для  $\alpha > \alpha_*$ . График зависимости  $\alpha_*$  от  $\lg m$  приведен на фиг. 5.

Результаты вычислений ( $P = 7.3$ ) приводят к следующим выводам:

- 1) возмущения с волновыми числами  $\alpha > \alpha_*$  затухают во времени;
- 2) возмущения с волновыми числами  $0 < \alpha < \alpha_*$  ведут себя по-разному в зависимости от числа Вебера  $W$ : при  $W < W_*$  — затухают, а при  $W > W_*$  — возрастают.

В заключение отметим, что сходимость рядов (2.9) и (3.1) можно обосновать, сведя задачу к интегральному уравнению Фредгольма второго рода и затем применив принцип сжатых отображений и теорему о неявной функции [2].

Поступила 21 VI 1971

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Б и р и х Р. В. О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости. ПМТФ, 1966, № 3.
2. В а й н б е р г М. М., Т р е н о г и н В. А. Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М., «Наука», 1969.