

УДК 533.6.011.8

## ОСОБЕННОСТИ СТРУКТУРЫ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В СМЕСЯХ ГАЗОВ С СИЛЬНО РАЗЛИЧАЮЩИМИСЯ МАССАМИ МОЛЕКУЛ

Г. А. Руев, А. В. Федоров, В. М. Фомин\*

Новосибирский государственный архитектурно-строительный университет,  
630008 Новосибирск

\* Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, 630090 Новосибирск

Построены асимптотические решения задачи о структуре ударной волны в смесях газов с сильно различающимися массами молекул. Описан эффект возникновения плато на профиле плотности легкого компонента и немонотонности профиля температуры тяжелого компонента. На основе сравнения с расчетами по полной модели определена область применимости асимптотических решений.

В течениях смеси газов с сильно различающимися массами молекул из-за большой инертности тяжелых молекул возникает существенная скоростная и температурная неравновесность. Особенно ярко это выражено в ударной волне, в которой разность скоростей и температур компонентов порядка их величин. В данном случае для описания течений необходимо использовать уравнения многоскоростной многотемпературной газодинамики, в которых каждый компонент имеет собственную скорость и температуру.

Задача о структуре ударной волны в бинарной и тройной смеси газов на основе уравнений многоскоростной многотемпературной газодинамики численно решена в [1, 2]. Из сравнения с экспериментальными данными и расчетами по кинетическим уравнениям следует, что рассматриваемые уравнения удовлетворительно описывают структуру ударной волны в широком диапазоне молярных концентраций тяжелого компонента при числах Маха  $M = 1 \div 4$ . Некоторые особенности структуры ударной волны, исследованные в [1, 2], объяснены недостаточно полно.

Целью настоящей работы является получение асимптотических решений задачи о структуре ударной волны в смесях газов при малых концентрациях тяжелых компонентов и объяснение на основе этих решений эффектов, имеющих место в ударной волне.

**1. Физико-математическая постановка задачи о структуре ударной волны.** Система уравнений, описывающая течение газовой смеси в одномерном случае, имеет вид [1]

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho_i u_i}{\partial x} = 0, \quad \rho_i \frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho_i u_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{\partial p_i}{\partial x} = \sum_{j(i \neq j)} K_{ij} (u_j - u_i) + \frac{4}{3} \frac{\partial}{\partial x} \left( \mu_i \frac{\partial u_i}{\partial x} \right),$$

$$\rho_i \frac{\partial e_i}{\partial t} + \rho_i u_i \frac{\partial e_i}{\partial x} + p_i \frac{\partial u_i}{\partial x} = \sum_{j(i \neq j)} q_{ij}(T_j - T_i) + \sum_{j(i \neq j)} \beta_{ij} K_{ij} (u_j - u_i)^2 + \frac{4}{3} \mu_i \left( \frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_i \frac{\partial T_i}{\partial x} \right), \quad (1.1)$$

$$p_i = R_i \rho_i T_i, \quad e_i = c_{iv} T_i,$$

где  $\rho_i$ ,  $u_i$ ,  $T_i$  — массовая плотность, скорость, температура  $i$ -го компонента;  $R_i = k/m_i$ ;  $k$  — постоянная Больцмана;  $m_i$  — масса молекулы  $i$ -го компонента;  $n_i = \rho_i/m_i$  — числовая плотность  $i$ -го компонента. Коэффициенты  $K_{ij}$ ,  $q_{ij}$ , характеризующие обмен импульсом и энергией между компонентами смеси, парциальные коэффициенты вязкости  $\mu_i$  и теплопроводности  $\lambda_i$  для бинарной смеси имеют вид [1]

$$K_{12} = \frac{16}{3} \frac{\rho_1 \rho_2}{m_1 + m_2} \Omega_{12}^{(1,1)}, \quad q_{12} = \frac{3k}{m_1 + m_2} K_{12}, \quad \mu_1 = \frac{5}{8} k T_1 \left( \Omega_1^{(2,2)} + 2 \frac{n_2}{n_1} \Omega_{12}^{(2,2)} \right)^{-1},$$

$$\mu_2 = \frac{5}{8} k T_2 \left( \Omega_2^{(2,2)} + \frac{20}{3} \frac{\rho_1}{\rho_2} \Omega_{12}^{(1,1)} \right)^{-1}, \quad \lambda_1 = \frac{75}{32} \frac{k^2 T_1}{m_1} \left( \Omega_1^{(2,2)} + 5 \frac{n_2}{n_1} \Omega_{12}^{(1,1)} \right)^{-1}, \quad (1.2)$$

$$\lambda_2 = \frac{75}{32} \frac{k^2 T_2}{m_2} \left( \Omega_2^{(2,2)} + 15 \frac{\rho_1}{\rho_2} \Omega_{12}^{(1,1)} \right)^{-1}.$$

Здесь индекс 1 соответствует легкому компоненту, 2 — тяжелому;  $\Omega_{ij}^{(k,l)}$  — интегралы столкновений.

Требуется найти стационарное решение системы (1.1), удовлетворяющее граничным условиям

$$(\rho_i, u_i, T_i) \rightarrow (\rho_i^0, u^0, T^0) \quad \text{при} \quad x \rightarrow -\infty, \quad (\rho_i, u_i, T_i) \rightarrow (\rho_i^1, u^1, T^1) \quad \text{при} \quad x \rightarrow +\infty. \quad (1.3)$$

Здесь верхний индекс 0 соответствует параметрам набегающего потока; величины с верхним индексом 1 связаны с параметрами набегающего потока соотношениями Гюгоню для равновесной смеси.

Для бинарной смеси газов задача (1.1), (1.3) решена численно методом установления с использованием неявной схемы расщепления по физическим процессам в работе [1], для тройной смеси газов — в [2]. Получено удовлетворительное соответствие экспериментальным данным и результатам расчетов по кинетическим уравнениям и методом Монте-Карло для чисел Маха  $M = 1 \div 4$  и широкого диапазона молярных концентраций компонентов и отношений масс молекул.

В [1, 2] отмечены некоторые особенности структуры ударной волны. В частности, при малой концентрации тяжелого газа в бинарной смеси возможно возникновение плато на профиле плотности легкого компонента. Этот эффект обнаружен также в экспериментах [3] и кинетических расчетах [4]. Пример такого расчета с использованием системы (1.1) в смеси 99 % He — 1 % Xe при числе Маха перед ударной волной  $M_0 = 3$  приведен на рис. 1. Безразмерные плотности и температуры компонентов рассчитаны по формулам  $\hat{\rho}_i = (\rho_i - \rho_i^0)/(\rho_i^1 - \rho_i^0)$ ,  $\hat{T}_i = (T_i - T^0)/(T^1 - T^0)$ . На рис. 1 представлены профили плотности  $\hat{\rho}_i$  (кривые 1) и температуры  $\hat{T}_i$  (кривые 2) компонентов; сплошные кривые соответствуют легкому компоненту, штриховые — тяжелому ( $l$  — длина свободного пробега молекулы, определенная в [5]). На рис. 1 видно, что вначале плотность легкого газа увеличивается, затем следует участок практически постоянной плотности, после чего наблюдается ее более резкий рост. Расчеты проводились с использованием модели твердых сфер. Как показано в [1], аналогичные результаты получены и для других степенных потенциалов межмолекулярного взаимодействия, показатели степени которых выбирались по экспериментальным данным.

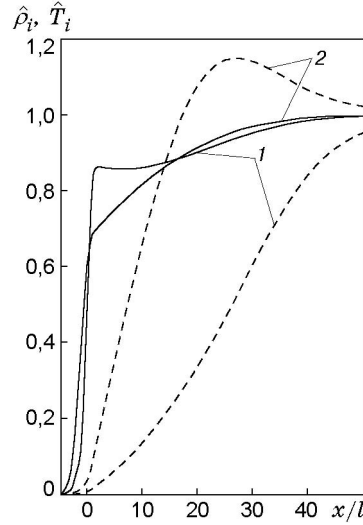


Рис. 1

Другой особенностью структуры ударной волны в бинарной смеси является немо­нотонное поведение температуры тяжелого газа при его малой молярной концентрации. Температура тяжелого компонента растет до некоторого значения, превышающего рав­новесную температуру за ударной волной, а затем уменьшается, стремясь к последней.

Рассмотрим бинарную смесь. Будем считать, что  $K = K_{12}$ ,  $\beta_i = \beta_{ij}$  ( $j \neq i$ ),  $q = q_{ij}$ ,  $\mu_i, \lambda_i$  — положительные постоянные. Для смеси одноатомных газов имеем  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma = R_i/c_{iv}$ . Предположим, что все искомые функции системы уравнений (1.1) зависят от координаты  $\xi = x - Dt$  ( $D$  — скорость ударной волны). Введем безразмерные переменные по формулам

$$\begin{aligned} \bar{V}_i &= (c_1 + c_2)V_i/c_3, & \bar{T}_i &= (R_1c_1 + R_2c_2)(c_1 + c_2)T_i/c_3^2, & \bar{\rho}_i &= c_3\rho_i/(c_1 + c_2)^2, \\ \bar{\mu}_i &= \mu_i/\mu_*, & \bar{\lambda}_1 &= \lambda_1/\lambda_*, & \bar{\xi} &= \xi(c_1 + c_2)/\mu_*, & \mu_* &= (c_1 + c_2)^2/K, \\ \lambda_* &= (R_1c_1 + R_2c_2)\mu_*/(c_1 + c_2), & \bar{q} &= \mu_*q/((c_1 + c_2)(R_1c_1 + R_2c_2)), \end{aligned}$$

где  $c_i$  — постоянные интегрирования;  $V_i = u_i - D$ .

С использованием безразмерных переменных (далее черта опущена) система (1.1) пре­образуется к виду

$$\begin{aligned} \rho_i V_i &= \alpha_i^0, & \alpha_1^0 V_1 + \alpha_2^0 V_2 + x_1^0 \frac{T_1}{V_1} + x_2^0 \frac{T_2}{V_2} &= 1 + \frac{4}{3} \mu_1 \frac{dV_1}{d\xi} + \frac{4}{3} \mu_2 \frac{dV_2}{d\xi}, \\ \frac{\gamma}{\gamma - 1} (x_1^0 T_1 + x_2^0 T_2) + \frac{\alpha_1^0 V_1^2 + \alpha_2^0 V_2^2}{2} &= A + \frac{4}{3} \mu_1 V_1 \frac{dV_1}{d\xi} + \frac{4}{3} \mu_2 V_2 \frac{dV_2}{d\xi} + \lambda_1 \frac{dT_1}{d\xi} + \lambda_2 \frac{dT_2}{d\xi}, \\ \alpha_2^0 \frac{dV_2}{d\xi} + x_2^0 \frac{d(T_2/V_2)}{d\xi} &= V_1 - V_2 + \frac{4}{3} \mu_2 \frac{dV_2}{d\xi}, \\ \frac{x_2^0}{\gamma - 1} \frac{dT_2}{d\xi} + x_2^0 \frac{T_2}{V_2} \frac{dV_2}{d\xi} &= \beta_2 (V_1 - V_2)^2 + q(T_1 - T_2) + \frac{4}{3} \mu_2 \left( \frac{dV_2}{d\xi} \right)^2 + \lambda_2 \frac{d^2 T_2}{d\xi^2}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

где  $A = (\gamma + 1)V^0 V^1 / (2(\gamma - 1))$ ;  $V^0 = \gamma M_0^2 / (\gamma M_0^2 + 1)$ ;  $V^1 = 2\gamma / (\gamma + 1) - V^0$ ;  $\alpha_i^0$  — массовая концентрация  $i$ -го компонента смеси перед ударной волной.

Требуется найти решение системы (1.4), удовлетворяющее граничным условиям

$$V_i \rightarrow V^0, \quad T_i \rightarrow T^0 \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow -\infty, \quad V_i \rightarrow V^1, \quad T_i \rightarrow T^1 \quad \text{при} \quad \xi \rightarrow +\infty, \quad (1.5)$$

где  $T^i = V^i(1 - V^i)$ .

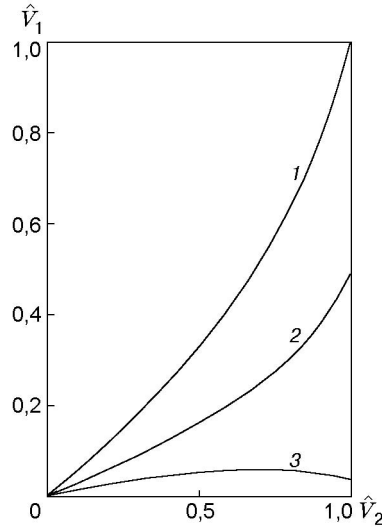


Рис. 2

**2. Асимптотическое исследование при наличии плато.** Рассмотрим случай малой молярной концентрации тяжелого газа и конечной массовой концентрации ( $x_2^0 \ll 1$ ). В данном приближении масса молекул тяжелого газа много больше массы молекул легкого газа. Тогда в эйлеровом приближении ( $\mu_i = \lambda_i = 0$ ) из (1.4) получим следующую систему уравнений:

$$L(V_1, V_2) = \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \alpha_1^0 V_1^2 + \alpha_2^0 V_1 V_2 - \frac{\gamma - 1}{2\gamma} \alpha_2^0 V_2^2 - V_1 + \frac{\gamma - 1}{\gamma} A = 0, \quad \frac{dV_2}{d\tau} = V_1 - V_2,$$

$$T_1 = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \left( A - \frac{\alpha_1^0 V_1^2}{2} - \frac{\alpha_2^0 V_2^2}{2} \right), \quad \frac{dT_2}{d\tau} + \frac{(\gamma - 1)T_2}{V_2} \frac{dV_2}{d\tau} = F_2(V_1 - V_2)^2 + F_3(T_1 - T_2), \quad (2.1)$$

где  $\tau = \xi/\alpha_2^0$ ;  $F_2 = \beta_2 \alpha_2^0 (\gamma - 1)/x_2^0 = ((\gamma - 1)m_2/m_1)/((1 + m_2/m_1)(x_1^0 + x_2^0 m_2/m_1))$ ;  $F_3 = q(\gamma - 1)\alpha_2^0/(x_2^0 K) = (3(\gamma - 1)m_2/m_1)/(1 + m_2/m_1)$ .

При получении системы (2.1) сохранены величины порядка  $x_2^0 df/d\xi$ , при этом  $\alpha_2^0 dV_2/d\xi \gg x_2^0 d(T_2/V_2)/d\xi$ .

Результаты анализа первого уравнения в (2.1) в плоскости  $(\hat{V}_1, \hat{V}_2)$  ( $\hat{V}_i = (V_i - V^1)/(V^0 - V^1)$ ) представлены на рис. 2. Здесь кривая 1 получена при условии  $M_0^2 < 1/\alpha_1^0$  (скорость ударной волны меньше скорости звука в легком газе), кривая 2 —  $M_0^2 = 2\gamma/((\gamma - 1)\alpha_1^0) > M_0^2 > 1/\alpha_1^0$ , кривая 3 —  $M_0 > M_*$ . Таким образом, если скорость ударной волны не превышает скорости звука в легком газе, то существует непрерывное решение; в противном случае решение имеет разрыв, на котором непрерывна скорость тяжелого газа. Если скорость ударной волны меньше некоторого значения, то обе скорости монотонно убывают. Однако, если скорость ударной волны превышает это значение, то непосредственно за разрывом скорость легкого компонента сначала увеличивается, достигая максимума, а затем уменьшается, стремясь к равновесной скорости за ударной волной.

Аналогичные результаты получены в [6], где рассмотрены уравнения бинарной смеси типа релаксационных в однотемпературном приближении. Следует отметить, что в этом случае давление смеси является строго возрастающей функцией:

$$\frac{dP}{d\tau} = \frac{\alpha_2^0 [1 - V_2 + (\alpha_1^0/\gamma)(V_2 - V_1)]}{\partial L/\partial V_1} (V_1 - V_2) > 0,$$

так как  $V_2 < 1$ ,  $V_2 > V_1$  и производная  $\partial L/\partial V_1 < 0$  на кривой  $L(V_1, V_2) = 0$  в рассматриваемой области (рис. 2).

Таким образом, происходит ускорение легкого газа в области с более высоким давлением. Из (2.1) следует

$$\alpha_1^0 \frac{dV_1}{d\xi} = -\frac{dP}{d\xi} + \alpha_2^0(V_2 - V_1),$$

т. е. непосредственно за разрывом сила межкомпонентного обмена больше градиента давления, что и вызывает ускорение легкого газа.

Аномальное поведение скорости легкого компонента, возможно, обусловлено пренебрежением вязкостью. Пусть  $\mu_1 \neq 0$ , тогда задача определения скоростей сводится к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$F_1 V_1 \frac{dV_1}{d\tau} = \gamma L(V_1, V_2), \quad \frac{dV_2}{d\tau} = V_1 - V_2,$$

где  $F_1 = (4/3)(\mu_1 K/\alpha_2^0)$ .

Необходимо найти решение, соединяющее положения равновесия  $(V^0, V^0)$  и  $(V^1, V^1)$ . Определим тип этих особых точек. Линеаризация в окрестности  $(V^0, V^0)$  приводит к характеристическому уравнению

$$\lambda^2 + \lambda \left( 1 - \frac{(\gamma + \alpha_1^0)V^0 - \gamma}{F_1 V^0} \right) - \frac{(\gamma + 1)V^0 - \gamma}{F_1 V^0} = 0.$$

В ударной волне  $M_0 > 1$  и, следовательно,  $V^0 > \gamma/(\gamma + 1)$ . Поэтому точка  $(V^0, V^0)$  — седло. Направление выхода, соответствующее положительному  $\lambda$ , имеет вид  $k^{(0)} = (B + \sqrt{B^2 + 4\alpha_2^0/F_1})/2$ , где  $B = 1 + ((\gamma + \alpha_1^0)V^0 - \gamma)/(F_1 V^0)$ .

Аналогично для точки  $(V^1, V^1)$  получим

$$\lambda^2 + \lambda \left( 1 - \frac{(\gamma + \alpha_1^0)V^1 - \gamma}{F_1 V^1} \right) - \frac{(\gamma + 1)V^1 - \gamma}{F_1 V^1} = 0.$$

С учетом  $V^1 < \gamma/(\gamma + 1)$  и  $\alpha_1^0 < 1$  легко показать, что  $\lambda_1 < 0$ ,  $\lambda_2 < 0$ , т. е. данная особая точка  $(V^1, V^1)$  — узел. Направление входа интегральных кривых, соответствующее минимальному собственному числу, определяется соотношением  $k^{(1)} = (C + \sqrt{C^2 + 4\alpha_2^0/F_1})/2$ , где  $C = 1 + (\gamma - (\gamma + \alpha_1^0)V^1)/(F_1 V^1)$ .

В зависимости от поведения изоклины  $L(V_1, V_2) = 0$  рассмотрим три случая.

1.  $M_0^2 < 1/\alpha_1^0$ . В данном случае интегральная кривая, выходящая из точки  $(V^0, V^0)$ , попадает в область, ограниченную изоклинами вертикальных и горизонтальных наклонов  $V_1 - V_2 = 0$  и  $L(V_1, V_2) = 0$  соответственно, и приходит в состояние равновесия  $(V^1, V^1)$ . Такое поведение интегральных кривых следует из неравенств

$$1 < k^{(0)} < k_L^{(0)}, \quad 1 > k^{(1)} > k_L^{(1)}, \quad \frac{dV_2}{d\tau} < 0.$$

Здесь  $k_L^{(i)} = -(\partial L/\partial V_2)/(\partial L/\partial V_1)$  при  $V_1 = V_2 = V^i$ .

2.  $M_0^2 > 1/\alpha_1^0$ . Интегральная кривая расположена в области, ограниченной кривыми  $V_1 - V_2 = 0$ ,  $L(V_1, V_2) = 0$ ,  $V_2 = V^0$  при  $M_0 < M_*$  и кривыми  $V_1 - V_2 = 0$ ,  $V_1 = V^1$ ,  $V_2 = V^0$  при  $M_0 > M_*$ , что следует из неравенств и соотношений

$$1 < k^{(0)} < \infty, \quad 1 < k^{(1)} < k_L^{(1)}, \quad \frac{dV_2}{d\tau} < 0,$$

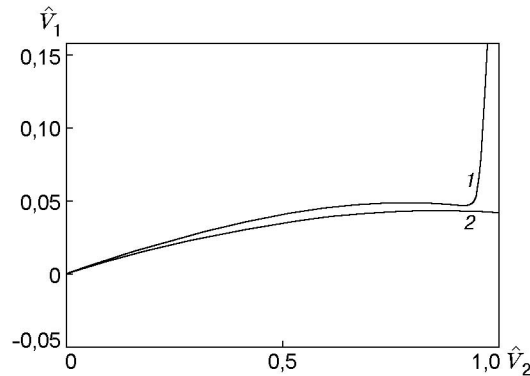


Рис. 3

$$\frac{dV_1}{dV_2} = \frac{\gamma + 1}{2F_1 V_1} (V_1 - V_1^+) \quad \text{при} \quad V_2 = V^0,$$

$$\frac{dV_1}{dV_2} = -\frac{\alpha_2^0(\gamma + 1)}{2F_1 V^1} \left( V_2 - \frac{\gamma - 1}{\gamma + 1} V^1 \right) \quad \text{при} \quad V_1 = V^1.$$

Здесь  $V^+ = V^0 + 2(\gamma - (\gamma + \alpha_1^0)V^0)/((\gamma + 1)\alpha_1^0)$  — скорость легкого газа за скачком в эйлеровом приближении.

Таким образом, при любом  $F_1$  единственная интегральная кривая, выходящая из точки  $(V^0, V^0)$ , не может покинуть соответствующих областей и неизбежно приходит в состояние равновесия  $(V^1, V^1)$ , т. е. существует, причем единственное, решение исходной задачи.

В первых двух случаях скорости обоих компонентов монотонно убывают.

3.  $M_0 > M_*$ . В данном случае поведение скорости легкого газа зависит от величины  $F_1$ . Если  $F_1 \geq 1$ , то скорости монотонны, т. е. учет вязкости может привести к исчезновению немонотонности скорости легкого газа. Если  $F_1 \ll 1$ , то интегральная кривая, выходящая из точки  $(V^0, V^0)$ , сначала расположена в узкой полосе  $[V_2^0 - \varepsilon, V_2^0]$ , а затем выходит на изоклину нулевых наклонов  $L(V_1, V_2) = 0$ . В результате производная от скорости легкого компонента обращается в нуль. Далее скорость легкого газа растет до тех пор, пока интегральная кривая вновь не пересечет изоклину; затем скорость уменьшается, стремясь к равновесной скорости за ударной волной (кривая 1 на рис. 3).

Из (1.2) следует, что для модели упругих твердых сфер при  $x_2 \ll 1$ ,  $m_1/m_2 \ll 1$   $F_1 \approx m_1/(m_2 M_0^2)$ , т. е.  $F \ll 1$ . Например, для смеси He–Xe  $F_1 \approx 0,004$  при  $M_0 = 3$ . Следовательно, в реальных условиях скорость легкого газа в ударной волне имеет две точки экстремума при  $M_0 > M_*$ . При расчетах структуры ударной волны такому поведению соответствует появление плато. Это обусловлено тем, что разность значений скорости в экстремальных точках мала. Наибольшее значение этой разности достигается в эйлеровом приближении. Оценки показали, что  $(V_* - V_1^+)/ (V^0 - V^1) \approx 0,015$  ( $V_*$  — скорость легкого газа в точке локального максимума) при увеличении числа Маха до 6 и отношения масс молекул до 100. На рис. 3 кривой 1 представлена зависимость  $\hat{V}_1(\hat{V}_2)$  в области плато, рассчитанная по полной модели с параметрами, соответствующими рис. 1; при этом  $M_0 > M_*$ . Видно, что в расчетах по полной модели профиль скорости также имеет две точки экстремума. Кривая 2 на рис. 3 — результаты расчетов по формулам (2.1). В зоне релаксации формулы (2.1) адекватно описывают немонотонность профиля скорости легкого газа.

**3. Немонотонность профиля температуры тяжелого компонента.** Немонотонность профиля температуры тяжелого газа получена ранее в [1, 7]. В [7] приведены результаты расчетов методом Монте-Карло зависимости пика температуры тяжелого компонента от молярной концентрации, отношения масс молекул и числа Маха.

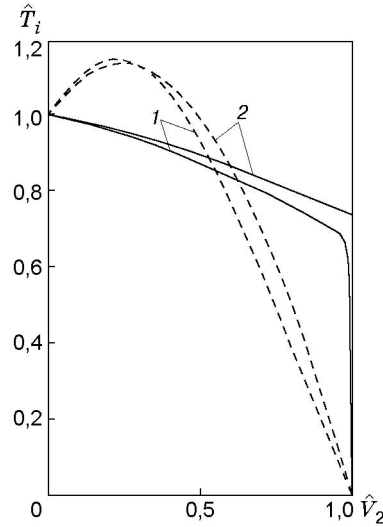


Рис. 4

Для объяснения эффекта немонотонности можно использовать формулы (2.1). На рис. 4 приведено сравнение распределений температур  $\hat{T}_1(\hat{V}_2)$  (сплошные кривые) и  $\hat{T}_2(\hat{V}_2)$  (штриховые) при  $M_0 = 3$ ,  $x_2^0 = 0,01$  в смеси He–Xe (кривые 1 — расчет по полной модели, кривые 2 — по формулам (2.1)). В зоне релаксации наблюдается удовлетворительное соответствие рассматриваемых зависимостей. Из последнего уравнения в (2.1) следует, что изменение температуры тяжелого газа происходит в результате процессов торможения в ударной волне за счет диссипации энергии (работы силы межкомпонентного взаимодействия) и за счет обмена энергией между компонентами из-за разности температур. Влияние первых двух факторов приводит к росту температуры тяжелого газа в ударной волне и, кроме того, на начальном участке  $T_1 > T_2$ . В результате температура тяжелого газа становится больше температуры легкого газа и может стать больше равновесной температуры за ударной волной, а затем вследствие теплообмена с легким газом стремится к равновесной температуре за волной.

Формулы (2.1) можно упростить в случае малых молярной и массовой концентраций тяжелого газа.

Пусть  $x_2^0 \ll \alpha_2^0 \ll 1$ . Тогда из (1.4), полагая  $\lambda_i = \mu_2 = 0$ , получим

$$F_1 V_1 \frac{dV_1}{d\tau} = \frac{\gamma + 1}{2} (V_1 - V^0)(V_1 - V^1), \quad T_1 = (\gamma - 1) \left( \frac{V_1^2}{2} - V_1 + A \right), \quad (3.1)$$

$$\frac{dV_2}{d\tau} = V_1 - V_2, \quad \frac{dT_2}{d\tau} = -\frac{(\gamma - 1)T_2}{V_2} \frac{dV_2}{d\tau} + F_2(V_1 - V_2)^2 + F_3(T_1 - T_2)$$

( $F_i$  определены в п. 2).

Требуется найти решение (3.1), удовлетворяющее граничным условиям (1.5). Решение этой задачи в общем случае имеет вид

$$\frac{V^0}{V^0 - V^1} \ln(V^0 - V_1) - \frac{V^1}{V^0 - V^1} \ln(V_1 - V^1) = \frac{\gamma + 1}{2F_1} \tau + \ln \frac{V^0 - V^1}{2},$$

$$T_1 = (\gamma - 1) \left( A + \frac{V_1^2}{2} - V_1 \right), \quad V_2 = \exp(-\tau) \int_{-\infty}^{\tau} V_1(y) \exp(y) dy, \quad (3.2)$$

M <sub>0</sub>	m <sub>2</sub> /m <sub>1</sub>	α <sub>2</sub> <sup>0</sup>	(T* - T <sup>1</sup> )/(T <sup>1</sup> - T <sup>0</sup> ), %		
			Полная модель	(2.1)	(3.3)
4	10	0,0917	29	24	26
	50	0,3356	15	10	21
	100	0,5025	8	6	18
3	10	0,0917	27	23	26
	50	0,3356	13	10	23
	100	0,5025	6	4	20
2	10	0,0917	20	20	25
	50	0,3356	8	6	21
	100	0,5025	3	2	19

$$T_2 = V_2^{-(\gamma-1)}(\tau) \exp(-F_3\tau) \left( F_3 \int_{-\infty}^{\tau} V_2^{\gamma-1}(y) T_1(y) \exp(F_3 y) dy + \right. \\ \left. + F_2 \int_{-\infty}^{\tau} (V_1(y) - V_2(y))^2 V_2^{\gamma-1}(y) \exp(F_3 y) dy \right).$$

Так как пик температуры находится в зоне релаксации, в (3.2) можно перейти к пределу при  $F_1 \rightarrow 0$ . В результате получим

$$V_i = V^0, \quad T_i = T^0 \quad \text{при } \tau < 0, \\ V_1 = V^1, \quad T_1 = T^1, \quad V_2 = \varphi(\tau), \quad T_2 = \phi(\tau) \quad \text{при } \tau > 0, \\ \varphi(\tau) = V^1 + (V^0 - V^1) \exp(-\tau), \tag{3.3}$$

$$\phi(\tau) = \varphi^{-(\gamma-1)} \exp(-F_3\tau) \left( (V^0)^{\gamma-1} T^0 + F_3 \int_0^{\tau} \varphi^{\gamma-1} T^1 \exp(F_3 y) dy + \right. \\ \left. + F_2 \int_0^{\tau} (V^1 - \varphi)^2 \varphi^{\gamma-1} \exp(F_3 y) dy \right).$$

В таблице приведены результаты расчетов пика температуры  $T^*$  тяжелого газа при  $x_2^0 = 0,01$ . Видно, что формулы (3.3) дают достаточно точные значения пика температуры только при малой массовой концентрации тяжелого газа.

Соотношения (3.3) значительно упрощаются, если  $V^0 - V^1 = \varepsilon \ll 1$  (случай слабых ударных волн). Очевидно, что в рассматриваемом приближении  $F_1 \ll \varepsilon$ . Введем новые безразмерные скорости  $v_i$  и температуры  $t_i$ :

$$V_i = \gamma/(\gamma + 1) + (\varepsilon/2)v_i, \quad T_i = \gamma/(\gamma + 1)^2 + (\gamma - 1)/(2(\gamma + 1))\varepsilon t_i - \varepsilon^2/4. \tag{3.4}$$

Из (3.3) в нулевом приближении по  $\varepsilon$  получим

$$v_i = 1, \quad t_i = -1 \quad \text{при } \tau < 0, \\ v_1 = -1, \quad t_1 = 1, \quad v_2 = -1 + 2 \exp(-\tau), \quad t_2 = 1 + 2/(F_3 - 1)w(1 - F_3 w^{F_3 - 1}) \quad \text{при } \tau > 0, \\ w = (1 + v_2)/2.$$



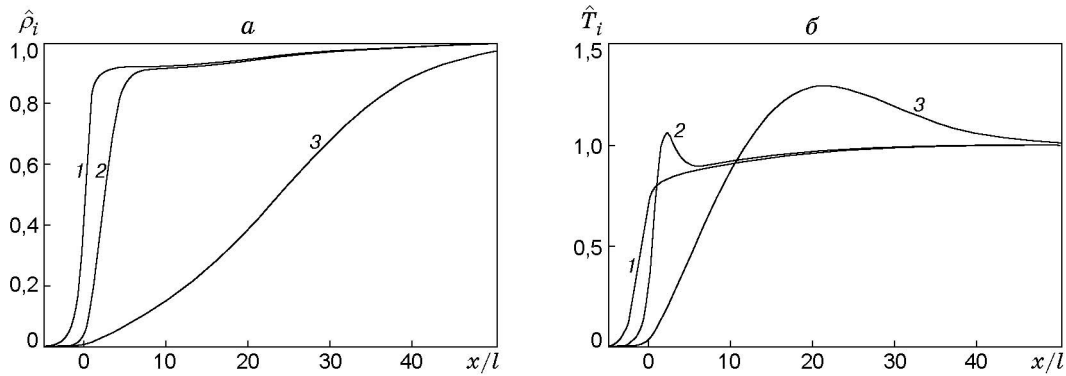


Рис. 5

Если отношение масс молекул стремится к нулю и  $\gamma = 5/3$ , то из (2.1) имеем  $F_3 \approx 2$ , т. е. зависимость температуры тяжелого газа от его скорости является квадратичной. При этом пик температуры составляет 12,5 % общего перепада в ударной волне.

**4. Структура ударной волны в тройной смеси газов.** Рассмотрим течение трехкомпонентной смеси газов, состоящей из легкого газа и двух тяжелых. Индекс 1 соответствует легкому газу, 3 — тяжелому, 2 — менее тяжелому газу. Система уравнений трехскоростной трехтемпературной газодинамики в одномерном случае имеет вид (1.1), где коэффициенты  $K_{ij}$ ,  $q_{ij}$ , характеризующие обмен импульсом и энергией между компонентами смеси, и парциальные коэффициенты вязкости и теплопроводности задаются выражениями, приведенными в [1]. Поскольку данные выражения имеют громоздкий вид, ограничимся случаем малой концентрации тяжелых газов  $n_2 \approx n_3 \ll n_1$  и  $m_1/m_i \ll 1$  ( $i = 2, 3$ ), т. е.  $\rho_1 \approx \rho_2 \approx \rho_3$ . Тогда выражения для кинетических коэффициентов примут вид

$$K_{1i} = \frac{16}{3} \rho_1 n_i \Omega_{1i}^{(1,1)}, \quad q_{1i} = \frac{3k}{m_i} K_{1i}, \quad i = 2, 3, \quad K_{23} = \frac{16\rho_2\rho_3}{3(m_2 + m_3)} \Omega_{23}^{(1,1)},$$

$$\mu_1 = \frac{5kT_1}{8\Omega_1^{(2,2)}}, \quad \mu_i = \frac{3k\rho_i T_i}{32\rho_1 \Omega_{1i}^{(1,1)}}, \quad \lambda_1 = \frac{15k}{4m_1} \mu_1, \quad \lambda_i = \frac{5k}{3m_i} \mu_i. \quad (4.1)$$

Расчеты структуры ударной волны в тройной смеси газов, выполненные в [2], показали, что в ударной волне скорости и температуры компонентов смеси существенно различны. Как и в случае бинарной смеси, профили температур тяжелых компонентов смеси немонотонные (температурные пики могут быть в обоих тяжелых газах или только в одном из них). При этом рассматривались смеси, для которых отношение масс молекул тяжелых компонентов порядка единицы.

В настоящей работе выполнены расчеты структуры ударной волны в тройной смеси газов, когда  $m_3/m_2 \gg 1$ . Результаты вычислений при  $M_0 = 3$ ,  $x_2^0 = 0,01$ ,  $x_3^0 = 0,0025$ ,  $m_2/m_1 = 10$ ,  $m_3/m_2 = 10$  приведены на рис. 5 (кривая 1 соответствует легкому газу, 3 — тяжелому, 2 — менее тяжелому газу). В таких смесях наряду с указанными выше обнаружены новые эффекты. Во-первых, плато может быть только в легком газе либо одновременно в легком и менее тяжелом газах (рис. 5, а). Это имеет место, когда в зоне релаксации присутствуют две четко выраженные зоны: зона, в которой происходит выравнивание скоростей и температур легкого и менее тяжелого газов, и более протяженная зона, в которой смесь приходит в равновесное состояние. Во-вторых, профиль температуры второго компонента (менее тяжелого газа) может иметь две точки локального экстремума. Температура второго компонента сначала растет и становится больше температуры легкого газа, затем

уменьшается до некоторого значения и вновь растет, стремясь к равновесной температуре за ударной волной, но оставаясь больше температуры легкого газа (рис. 5,б). При этом температура второго компонента в точке локального максимума может быть как больше равновесной температуры за ударной волной, так и меньше ее. Данный эффект обусловлен наличием третьего компонента. Температура второго компонента уменьшается из-за интенсивного теплообмена с тяжелым газом, температура которого существенно ниже.

Для построения асимптотических решений перейдем к безразмерным скоростям и температурам по формулам, аналогичным приведенным в п. 1, в которых  $K = K_{13}$ . В результате получим

$$\begin{aligned} \rho_i V_i &= \alpha_i^0, \quad \sum_{i=1}^3 \left( \alpha_i^0 V_i + x_i^0 \frac{T_i}{V_i} - \frac{4}{3} \mu_i \frac{dV_i}{d\xi} \right) = 1, \\ \sum_{i=1}^3 \left( \frac{\gamma}{\gamma-1} x_i^0 T_i + \frac{\alpha_i^0 V_i^2}{2} - \frac{4}{3} \mu_i V_i \frac{dV_1}{d\xi} - \lambda_i \frac{dT_i}{d\xi} \right) &= \tilde{A}, \\ \alpha_i^0 \frac{dV_i}{d\xi} + x_i^0 \frac{d(T_i/V_i)}{d\xi} &= K_{1i}(V_1 - V_i) + K_{ij}(V_j - V_i) + \mu_i \frac{d^2 V_i}{d\xi^2}, \\ \frac{x_i^0}{\gamma-1} \frac{dT_i}{d\xi} + x_i^0 \frac{T_i}{V_i} \frac{dV_i}{d\xi} &= K_{1i} \beta_{i1} (V_1 - V_i)^2 + K_{ij} \beta_{ij} (V_j - V_i)^2 + \\ &+ q_{1i}(T_1 - T_i) + q_{ij}(T_j - T_i) + \frac{4}{3} \mu_i \left( \frac{dV_i}{d\xi} \right)^2 + \lambda_i \frac{d^2 T_i}{d\xi^2}, \quad i, j = 2, 3, \quad i \neq j, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где  $\tilde{A} = c_5(c_1 + c_2 + c_3)/c_4^2$ ;  $c_i$  — постоянные интегрирования.

Требуется найти решение системы (4.2), удовлетворяющее условиям (1.5).

Рассмотрим приближение  $x_i^0 \ll \alpha_i^0 \ll 1$  ( $i = 2, 3$ ),  $\mu_2 = \mu_3 = \lambda_i = 0$ . Из (4.1) следует

$$K_{23}/K_{12} \approx x_3^0 \sqrt{m_2/m_1} \ll 1, \quad K_{23}/K_{13} \approx x_2^0 \sqrt{m_2/m_1} \ll 1, \quad q_{23}/q_{12} \ll 1, \quad q_{23}/q_{13} \ll 1.$$

Из (4.2) в нулевом приближении получим

$$\begin{aligned} V_1 + \frac{T_1}{V_1} &= 1 + \mu_1 \frac{dV_1}{d\xi}, \quad T_1 = (\gamma-1) \left( \frac{V_1^2}{2} - V_1 + \tilde{A} \right), \quad \alpha_i^0 \frac{dV_i}{d\xi} = K_{1i}(V_1 - V_i), \\ x_i^0 \frac{dT_i}{d\xi} &= -\frac{T_i}{V_i} \frac{dV_i}{d\xi} + K_{1i} \beta_{1i} (V_1 - V_i)^2 + q_{1i}(T_1 - T_i), \quad i, j = 2, 3, \quad i \neq j. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Таким образом, для определения параметров легкого газа имеем уравнения, аналогичные уравнениям для однокомпонентного газа. Для нахождения параметров тяжелых газов получены уравнения типа релаксационных. Интегрированием системы уравнений (4.3) в явном виде получаем формулы, аналогичные (3.2). Переходя в них к пределу при  $\mu_1 \rightarrow 0$  и ограничиваясь случаем слабых ударных волн, введем новые безразмерные скорости и температуры по формулам (3.4). В нулевом приближении получим

$$\begin{aligned} v_i &= 1, \quad t_i = -1 \quad \text{при } \tau < 0, \\ v_1 &= -1, \quad t_1 = 1, \quad v_2 = -1 + 2 \exp(-F\tau), \quad v_3 = -1 + 2 \exp(-\tau), \\ t_2 &= 1 - 2w^{3(\gamma-1)F} + 2(w^F - w^{3(\gamma-1)F})/(3\gamma - 4), \quad t_3 = 1 - 2w^{3(\gamma-1)} + 2(w - w^{3(\gamma-1)})/(3\gamma - 4), \\ F &= (m_3/m_2)(\sigma_{12}/\sigma_{13})^2, \quad w = (1 + v_3)/2, \quad \sigma_{1i} = (\sigma_1 + \sigma_i)/2 \quad \text{при } \tau > 0, \end{aligned}$$

где  $\sigma_i$  — диаметр молекулы  $i$ -го газа.

Поведение скоростей и температур тяжелых газов в рассмотренном приближении зависит от отношений масс их молекул и диаметров. При  $F < 1$  пик температуры менее тяжелого газа располагается правее пика температуры тяжелого газа. С ростом  $F$  происходит смещение пика температуры менее тяжелого газа, при  $F \gg 1$  он находится в начале зоны релаксации, а пик температуры тяжелого газа — в конце зоны, что качественно соответствует результатам расчетов по полной модели.

Таким образом, для модели многоскоростной многотемпературной газодинамики смесей получены асимптотические решения задачи о структуре ударной волны. На их основе дано объяснение возникновения плато на профиле плотности легкого газа и немонотонности профилей температур тяжелых газов.

### ЛИТЕРАТУРА

1. **Киселев С. П., Руев Г. А., Трунев А. П. и др.** Ударно-волновые процессы в двухкомпонентных и двухфазных средах. Новосибирск: Наука. Сиб. предприятие РАН, 1992.
2. **Ruev G. A., Fomin V. M., Shavaliyev M. Sh.** Shock wave structure in ternary disparate-mass gas mixture // Proc. of the 17th Intern. symp. on rarefied gas dynamics, Aachen, Germany, July, 1990. Weinheim: VCH Verlagsgesellschaft mbh, 1991. P. 183–190.
3. **Gmurczyk A. S., Tarczynski M., Walenta Z. A.** Shock wave structure in binary mixtures of gases with disparate molecular masses // Proc. of the 11th Intern. symp. on rarefied gas dynamics, Cannes, France, July, 1978. Paris: Commissariat a l'Energie Atomique, 1979. V. 1. P. 333–341.
4. **Schmidt B., Seiler F., Worner M.** Shock structure near a wall in pure inert gas and in binary inert-gas mixtures // J. Fluid Mech. 1984. V. 143. P. 305–326.
5. **Берд Г.** Молекулярная газовая динамика. М.: Мир, 1981.
6. **Fernandez-Feria R., Fernandez de la Mora.** Shock wave structure in gas mixtures with large mass disparity // J. Fluid Mech. 1987. V. 179. P. 21–40.
7. **Bird G. A.** Shock wave structure in gas mixtures // Proc. of the 14th Intern. symp. on rarefied gas dynamics, Tokyo, Japan, July, 1984. Tokyo: Tokyo Univ. Press, 1984. V. 1. P. 175–182.

*Поступила в редакцию 25/III 2002 г.*

---