

НЕЛИНЕЙНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ С ВОЛНИСТОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

В. П. Реутов

Институт прикладной физики РАН, 603600 Нижний Новгород

Исследуется нелинейное взаимодействие турбулентного пограничного слоя с волнистой поверхностью жидкости или твердого тела, отклонение уровня которой имеет вид бегущей монохроматической волны. Для волнистости с малой кривизной предложена процедура расчета амплитудных зависимостей коэффициента сопротивления и комплексной упругости, характеризующей обратное воздействие течения на изгиб поверхности. Анализ основывается на использовании изотропной алгебраической модели турбулентной вязкости и ортогональной системы криволинейных координат, отслеживающих изгибы поверхности. Взаимодействие течения с поверхностной волной описывается в рамках квазилинейной модели, а для определения его поперечной структуры в плавно расширяющемся пограничном слое используется двухмасштабная модель среднего течения.

При взаимодействии упругих покрытий с пограничным слоем на их поверхности возможна генерация бегущих волн смещения, которые существенно влияют на величину силы сопротивления. В настоящее время детально изучены линейные неустойчивости, возникающие при взаимодействии упругих покрытий с ламинарным пограничным слоем [1, 2]. Нелинейные эффекты также рассматривались в случае ламинарного течения [3, 4]. В то же время значительное внимание в экспериментах уделялось турбулентному режиму обтекания [5, 6]. В ряде работ исследовалась структура течения в турбулентном пограничном слое над волнистыми поверхностями и определялся их коэффициент сопротивления (см., например, [7]). Однако для вывода эволюционных уравнений, описывающих развитие неустойчивости поверхностных волн, необходимо знать нелинейные характеристики взаимодействия осциллирующего течения с этими волнами.

Исследование обратного воздействия турбулентного пограничного слоя на волновое движение поверхности представляет интерес в связи с лабораторным моделированием взаимодействия волн на воде с турбулентным ветром [8]. Как и при обтекании покрытий, в лабораторных условиях над поверхностью воды формируется пограничный слой конечной толщины, который сшивается с потенциальным внешним течением. В этом случае возникает задача о соответствии лабораторного моделирования условиям отклика атмосферного пограничного слоя, профиль скорости которого обычно предполагается логарифмическим на произвольном удалении от поверхности.

В настоящей работе изучаются нелинейные характеристики взаимодействия турбулентного пограничного слоя несжимаемого течения с волнистой поверхностью твердого тела или жидкости. Анализ строится на основе подхода, развитого в [9, 10] для описания нелинейного взаимодействия волн на воде с атмосферным (логарифмическим) пограничным слоем. Этот подход включает использование ортогональной системы криволинейных координат, гипотезы изотропной турбулентной вязкости и квазилинейного приближения при решении уравнений осциллирующего течения. Как и в [10], уравнения гидродинамики записываются через функцию тока и завихренность, что позволяет значительно ускорить

сходимость итерационного процесса. Для описания плавного расширения пограничного слоя вниз по потоку используется приближение, аналогичное предложенному ранее для расчета пограничных слоев на плавно искривленных профилях [11, с. 459]. Это позволяет строить решение задачи для волнистой поверхности на основе теории равновесного (автомодельного) пограничного слоя, возникающего над плоской поверхностью [12].

Определяющие уравнения. Квазилинейное приближение. Рассмотрим турбулентный пограничный слой над волнистой поверхностью, отклонение уровня которой в направлении оси y декартовой системы координат (x, y) изменяется по закону $\zeta = a \cos[k(x - ct)]$, где a — амплитуда волнистости; k, c — волновое число и фазовая скорость бегущей волны. Кривизна поверхности считается малой, а расширение пограничного слоя вниз по потоку — плавным: $ka \ll 1$, $1/(kL) \ll 1$ и $\delta/L \ll 1$, где δ — толщина пограничного слоя; $L = \delta/(d\delta/dx)$ — масштаб его расширения. Предполагается, что при больших y пограничный слой переходит в однородное течение с продольной скоростью $U(x)$ и уравнение для продольной составляющей импульса принимает вид $UdU/dx = -dP/dx$, где P — давление, отнесенное к плотности потока. Используя для замыкания уравнений турбулентного течения гипотезу изотропной турбулентной вязкости, введем коэффициент эффективной (суммарной) вязкости, отнесенный к плотности жидкости, $\nu = \nu_0 + \nu_T$, где ν_0, ν_T — молекулярная и турбулентная вязкость.

Следуя [9, 10], перейдем в систему ортогональных криволинейных координат (ξ, η) , движущуюся с фазовой скоростью поверхностной волны:

$$x - ct = \xi - ae^{-k\eta} \sin k\xi; \quad (1a)$$

$$y = \eta + ae^{-k\eta} \cos k\xi. \quad (1b)$$

При этом координатная линия $\eta = 0$ с точностью до членов $\sim ka$ отслеживает отклонения уровня поверхности. Основное предположение относительно коэффициента турбулентной вязкости состоит в том, что в явном виде достаточно учесть только его зависимость от «поперечной» координаты η . Тогда уравнения двумерной гидродинамики для функции тока Φ и завихренности χ , определенных в движущейся системе отсчета, принимают вид [10]

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\chi J^3)}{\partial t} + J^2[\Phi_\eta \chi_\xi - \Phi_\xi \chi_\eta - (\nu \chi)_{\xi\xi} - (\nu \chi)_{\eta\eta}] = -2J\nu_{\eta\eta} \Phi_{\xi\xi} - J_\eta \{ (\Phi_{\eta\xi\xi})_\eta - \nu_\eta \Phi_{\xi\xi} \} - \\ - J_\xi (2\nu_\eta \Phi_{\xi\eta} - \Phi_\xi \nu_{\eta\eta}) + \Phi_\eta \nu_\eta \frac{J_\xi^2 + J_\eta^2}{J}, \quad \Phi_{\xi\xi} + \Phi_{\eta\eta} = J\chi, \end{aligned} \quad (2)$$

где $J = \partial(x, y)/\partial(\xi, \eta) = 1 - 2kae^{-k\eta} \cos k\xi + (ka)^2 e^{-2k\eta}$ — якобиан преобразования координат.

На волнистой поверхности для системы (2) ставится условие непрерывности нормальной компоненты скорости, которая обращается в нуль в движущейся системе отсчета, и условие «непроскальзывания». В рамках используемого далее квазилинейного приближения граничные условия достаточно записать с точностью до членов $\sim ka$, как это делалось в [13]. На твердой поверхности можно пренебречь касательной компонентой скорости, а на поверхности жидкости задать ее в соответствии с потенциальной теорией гравитационно-капиллярных волн. Учитывая наличие на поверхности жидкости индуцированного течения со скоростью $v_0 \ll c$, получим

$$\Phi_\eta = -c + \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} cka \cos k\xi, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial\xi} = 0 \Big|_{\eta=0}. \quad (3)$$

Здесь и далее верхний и нижний коэффициенты в круглых скобках относятся к твердой и жидкой поверхностям соответственно.

Решение системы (2) будем искать в квазилинейном приближении, которое связывает нелинейные по амплитуде волнистости эффекты только с деформацией среднего течения [9, 10]:

$$\Phi = \Phi_0(\eta, x) + [(1/2)\Phi_1(\eta, x)e^{ik\xi} + \text{к.с.}], \quad \chi = \chi_0(\eta, x) + [(1/2)\chi_1(\eta, x)e^{ik\xi} + \text{к.с.}], \quad (4)$$

где Φ_0, χ_0 — средние (по периоду волнистости) компоненты функции тока и завихренности; Φ_1, χ_1 — комплексные амплитуды первой гармоники; к.с. означает комплексно-сопряженное выражение. Для того чтобы описать процесс плавного (с масштабом $\sim L$) расширения турбулентного пограничного слоя вниз по потоку, в (4) введена плавная зависимость среднего и осциллирующего течения от координаты x , связанной с ξ, η и t соотношением (1а). При фиксированных x, η переменная $-\xi/c$ играет роль «запаздывающего» времени. При подстановке (4) в (2) производные по t, ξ и η с учетом (1а) преобразуются следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial t} \rightarrow c \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial \xi} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \xi} + (1 - ka e^{-k\eta} \cos k\xi) \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \rightarrow \frac{\partial}{\partial \eta} + ka e^{-k\eta} \sin k\xi \frac{\partial}{\partial x}. \quad (5)$$

Отметим, что коэффициент эффективной вязкости также зависит от x , вследствие чего в уравнениях (2), строго говоря, следовало бы сохранить производные ν по ξ . Однако, как видно из (5), это привело бы к добавлению малых членов (с производными ν по x), которыми можно пренебречь.

Подставляя (4) и (5) в (2), выделим в уравнениях (2) составляющую $\sim \exp ik\xi$. Тогда нетрудно видеть, что «непараллельность» течения дает поправки порядка $O[a/L, (\delta/L)ka]$. Ограничиваясь точностью $\sim ka$, приходим к системе уравнений, полученной в [10] для параллельного течения. В отличие от [10], введем для описания среднего течения функцию тока в неподвижной системе отсчета $\Psi = \Phi + cy$, которая в соответствии с (16) имеет среднюю по ξ составляющую $\Psi_0 = \Phi_0 + c\eta$. В результате система уравнений (10) из работы [10] принимает вид*

$$ik[(\Psi_{0\eta} - c)\chi_1 - \Phi_1\chi_{0\eta}] - \left(\frac{d^2}{d\eta^2} - k^2\right)(\nu\chi_1) = 2\nu_{\eta\eta}k^2\Phi_1 - 2k^2a e^{-k\eta}[(\Psi_{0\eta} - c)\nu_{\eta}]_{\eta},$$

$$\left(\frac{d^2}{d\eta^2} - k^2\right)\Phi_1 = \chi_1 - 2ka\chi_0 e^{-k\eta}. \quad (6)$$

Поскольку в (6) отсутствуют члены с производной $\partial/\partial x$, осциллирующее течение фактически определяется в рамках локально-параллельной теории.

Выделим теперь в уравнениях (2) среднюю по ξ составляющую и сравним их с уравнениями, полученными в [10] для параллельного среднего течения. Если ограничиться точностью $\sim \delta/L$, отбрасывая поправки $O[k^2a^2(\delta/L), ka^2/L]$, то добавятся только члены с производной $\partial/\partial x$, которые возникают в теории пограничного слоя на плоской поверхности [14].

После проведения указанных преобразований уравнение (2) один раз интегрируется по η , а произвольная функция x , которая появляется в результате интегрирования, находится с помощью упоминавшегося выше уравнения для продольной компоненты импульса во внешнем течении. В результате получим уравнения для функции тока Ψ_0 и завихренности χ_0 среднего течения в неподвижной системе отсчета:

$$\Psi_{0\eta} \frac{\partial}{\partial x} \bar{\Psi}_{0\eta} - \bar{\Psi}_{0\eta\eta} \frac{\partial}{\partial x} \Psi_0 = -\frac{dP}{dx} + (\nu\chi_0)_\eta - F_1; \quad (7a)$$

$$\Psi_{0\eta\eta} = \chi_0 + F_2, \quad (76)$$

*В уравнениях (6) устранены опечатки, допущенные в [10].

где $F_1 = k^2 a \nu_\eta \operatorname{Re}(\Phi_{1\eta} - k\Phi_1) e^{-k\eta} + 2k(ka)^2 \nu_\eta (\Psi_{0\eta} - c) e^{-2k\eta} - (1/2)k \operatorname{Im}(\Phi_1^* \chi_1)$; $F_2 = \chi_0(ka)^2 e^{-2k\eta} - ka(\operatorname{Re} \chi_1) e^{-k\eta}$. При $\partial/\partial x = 0$ уравнения (7) совпадают с полученными в [10] для параллельного течения, а при $F_{1,2} = 0$ переходят в уравнения Прандтля для турбулентного пограничного слоя на пластине [14]. Граничные условия на обтекаемой поверхности (3) с учетом преобразований (5) принимают вид

$$\Psi_{0\eta} = \begin{pmatrix} 0 \\ v_0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial x} \Psi_0 = 0, \quad \Phi_1 = 0, \quad \Phi_{1\eta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} cka \Big|_{\eta=0}. \quad (8)$$

Согласно (6), (7), в области потенциального течения ($\chi_0 = \chi_1 = 0$) решение имеет вид $\Psi_{0\eta} = U(x)$, $\Phi_1 \sim \exp(-k\eta)$. Предполагая, что на некотором уровне $\eta = \delta_1 > \delta$ отличаем течения от потенциального можно пренебречь, запишем внешние граничные условия в виде

$$\Psi_{0\eta} = U, \quad \chi_1 = 0, \quad \Phi_{1\eta} + k\Phi_1 = 0 \Big|_{\eta=\delta_1}. \quad (9)$$

Следует отметить, что деформация среднего течения в присутствии волнистости имеет порядок $(ka)^2$. Если среднее течение искать в виде разложения теории возмущений по $ka \ll 1$, его отклонение от профиля течения в случае плоской поверхности дает в уравнениях (6) члены $\sim (ka)^3$. В то же время в квазилинейном приближении не учитывается вклад второй гармоники осциллирующего течения, который также приводит к добавкам порядка $(ka)^3$ в (6). Таким образом, последовательное применение теории возмущений по ka на первый взгляд вступает в противоречие с квазилинейным приближением. Этот вопрос изучался в [10] при рассмотрении взаимодействия волн на воде с атмосферным пограничным слоем. Обнаружено, что относительное изменение инкремента, вычисленное в квазилинейном приближении, можно представить в виде произведения $(ka)^2$ на большой числовой коэффициент, тогда как вклад второй гармоники представляется в виде произведения $(ka)^2$ на числовой коэффициент не более единицы. Этот численный результат можно объяснить тем, что профиль второй гармоники в большей степени подвержен осцилляциям по η по сравнению с профилем первой (основной) гармоники. В настоящей работе без дополнительного обоснования предполагается, что наличие достаточно большого коэффициента при $(ka)^2$ в относительной добавке к инкременту и коэффициенту сопротивления обеспечивает применимость квазилинейного приближения.

Основные параметры течения. Введем толщину вытеснения для пограничного слоя на волнистой поверхности δ^* как толщину вытесненного слоя потенциального течения по координате η :

$$\delta^* = \int_0^{\delta_1} \left(1 - \frac{u_0}{U}\right) d\eta \quad (10)$$

($u_0 = \Psi_{0\eta}$ — профиль «эффективной» скорости, определяемой по массовому расходу). При записи формулы (10) учтено, что в потенциальном течении с точностью до членов $\sim (ka)^2$ можно положить $u_0 = U$. Пренебрегая непараллельностью течения, можно получить для x -компоненты скорости в неподвижной системе отсчета соотношение вида $v_1 - c = (\Phi_\eta x_\xi - \Phi_\xi x_\eta)/J$. Поскольку в пределах применимости квазилинейного приближения относительные поправки к среднему течению в несколько раз превышают $(ka)^2$, при вычислении v_1 можно пренебречь членами, содержащими $(ka)^2$ в явном виде. В результате получим

$$\langle v_1 \rangle = u_0(\eta) + (1/2) ka e^{-k\eta} \operatorname{Re}(\Phi_{1\eta} + k\Phi_1), \quad (11)$$

где $\langle \dots \rangle$ означает среднее значение за период по ξ . Как видно из (9), (11), в области потенциального течения u_0 совпадает с $\langle v_1 \rangle$.

Для определения коэффициента сопротивления c_f воспользуемся известным выражением для x -компоненты силы, действующей на единицу площади обтекаемой поверхности [11]: $T_1 = -pn_1 + \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2$, где p — поверхностное давление; $\sigma_{11} = 2\nu\Psi_{xy}$ и $\sigma_{12} = \nu(\Psi_{yy} - \Psi_{xx})$ — компоненты тензора вязких напряжений; $n_{1,2}$ — компоненты вектора нормали к обтекаемой поверхности (величины T_1 , p , σ_{11} и σ_{12} берутся отнесенными к плотности течения). Учитывая, что элемент длины вдоль координатной линии $\eta = 0$ равен $J^{1/2}d\xi$, запишем силу на единицу площади невозмущенной поверхности $y = 0$ в виде

$$\frac{1}{2} c_f U^2 = \frac{1}{\lambda} \int_0^\lambda T_1 J^{1/2} d\xi = \langle py_\xi - \sigma_{11}y_\xi + \sigma_{12}y_\eta \rangle \Big|_{\eta=0} \quad (12)$$

($\lambda = 2\pi/k$ — длина волны). Для вычисления поверхностного давления воспользуемся процедурой, описанной в [10]. Это позволяет представить комплексную амплитуду его первой гармоники p_1 в виде

$$p_1 = -i \frac{\nu_0}{k} \chi_{1\eta} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} c^2 ka \Big|_{\eta=0}. \quad (13)$$

После вычисления σ_{11} , σ_{12} в криволинейных координатах ξ, η с удержанием членов, содержащих явно только первую степень ka , запишем коэффициент сопротивления как

$$c_f = \frac{2}{U^2} \left[\nu_0 \chi_0 - \frac{1}{2} \nu_0 ka \operatorname{Re} (k^{-1} \chi_{1\eta} + \chi_1) \right]_{\eta=0}. \quad (14)$$

Коэффициент турбулентной вязкости зададим подобно тому, как это делалось в работе [12] для пограничного слоя на плоской поверхности. Примем, что линейный профиль турбулентной вязкости $\nu_T = \varkappa u_* \eta$, который начинается за пределами буферной области ($\eta^+ = \eta u_* / \nu_0 > 30$) и выходит на постоянное значение $\nu_T = KU\delta^*$ (u_* — динамическая скорость; \varkappa — постоянная Кармана, равная 0,4; K — постоянная Клаузера, равная 0,016). Сглаживая возникающий при этом излом функцией th и используя одну из известных аппроксимаций для профиля $\nu(\eta)$ в буферной области [15], получим

$$N = \frac{\nu}{U\delta^*} = \frac{1}{R} + K \operatorname{th} \left(\frac{\varkappa}{K} Y \right) [1 - \exp(-\mu Y^2 R^2)], \quad (15)$$

где $R = \delta^* U / \nu_0$ — число Рейнольдса; μ — постоянный коэффициент; $Y = \eta / \Delta$ ($\Delta = \delta^* / \gamma$ — толщина вытеснения по дефекту скорости, $\gamma = u_* / U$). В отсутствие волнистости линейному профилю $\nu(\eta)$ соответствует логарифмический профиль скорости [14]:

$$\frac{u_0}{u_*} = \frac{1}{\varkappa} \ln \eta^+ + B, \quad (16)$$

где B — универсальная постоянная. Если коэффициент вязкости определен выражением (15), закон стенки (16) приближенно выполняется в области $30 < \eta^+ < (K/\varkappa)R$, верхняя граница которой соответствует точке излома в кусочно-линейной модели коэффициента вязкости. Расчеты логарифмического профиля скорости, проведенные на основе формулы (15) с $K \rightarrow \infty$, показали, что известное значение универсальной постоянной $B = 5,0$ достигается при $\mu = 0,0019$.

Для определения динамической скорости в пограничном слое на волнистой поверхности u_* следует найти продольную компоненту вязкостно-турбулентного потока импульса через внешнюю границу буферной области $\eta^+ = 30$. Используя соответствующий закон сохранения (см. уравнение (2) из [10]) и отбрасывая члены, содержащие в явном виде $(ka)^2$, получим

$$u_*^2 = \langle \sigma_{11} x_\eta + \sigma_{12} x_\xi \rangle \Big|_{\eta^+=30} = \nu \chi_0 - \frac{1}{2} \nu ka e^{-k\eta} \operatorname{Re} \chi_1 \Big|_{\eta^+=30}. \quad (17)$$

Отметим, что в пограничном слое на волнистой поверхности u_*^2 , вообще говоря, может не совпадать с силой сопротивления.

Будем характеризовать обратное воздействие осциллирующего течения на поверхностные волны комплексной упругостью G [16, 17], через мнимую часть которой выражается поток энергии от пограничного слоя к поверхностной волне S :

$$G = \frac{\tilde{p}_1}{a}, \quad S = -\langle \tilde{p}\zeta_t \rangle = \frac{1}{2} cka^2 \operatorname{Im} G \quad (18)$$

(\tilde{p}_1 — комплексная амплитуда эффективного поверхностного давления \tilde{p}). В случае твердой поверхности поток энергии S определяется нормальной составляющей поверхностного напряжения и следует положить $\tilde{p} = -(n_1 T_1 + n_2 T_2)$ (T_2 — y -компонента поверхностной силы на единицу площади). Вычисления с точностью до членов $\sim ka$ показывают, что вязкое нормальное напряжение не дает вклада в \tilde{p} , т. е. с этой точностью $\tilde{p}_1 = p_1$. Тогда в соответствии с (13), (18) получим

$$\operatorname{Im} G = -\frac{\nu_0}{ka} \operatorname{Re} \chi_{1\eta} \Big|_{\eta=0}. \quad (19)$$

При обдувании поверхности воды воздушным потоком скорость роста поверхностных волн определяется действием как нормальных, так и касательных напряжений. Касательные напряжения трансформируются в нормальные благодаря модуляции динамического пограничного слоя, возникающего вблизи поверхности воды. Именно это суммарное нормальное напряжение входит в (18). Оно находится путем решения уравнений динамического пограничного слоя в воде с условием непрерывности σ_{ij} на границе раздела и имеет вид [9] $\tilde{p}_1 = p_1 - \hat{\sigma}_{22} + i\hat{\sigma}_{12}$ ($\hat{\sigma}$ означает комплексную амплитуду первой гармоники). Удерживая при определении \tilde{p} члены $\sim ka$, получим

$$\operatorname{Im} G = -\frac{\nu_0}{ka} \operatorname{Re} (\chi_{1\eta} - k\chi_1) + 4\nu_0 ck^2 - 2\nu_0 k\chi_0 \Big|_{\eta=0}. \quad (20)$$

Ниже решается задача вычисления мнимой части безразмерной комплексной упругости $g = \operatorname{Im} G / (kU^2)$, которая в соответствии с (18) является также нормированным потоком энергии к поверхностной волне.

Двухмасштабная модель для расчета среднего течения. Предположим, что в отсутствие волнистости во внешней области пограничного слоя (области «следа») реализуется равновесный (автомоделный) режим течения. Теория такого пограничного слоя построена в [12]. Альтернативой решению уравнений в частных производных (6) для пограничного слоя на волнистой поверхности является определение профилей функции тока, скорости и завихренности среднего течения на основе двухмасштабного подхода, построенного по аналогии с теорией равновесного пограничного слоя. Подобная аналогия ранее применялась для расчета ламинарных пограничных слоев на плавно искривленных поверхностях [11].

Следуя [12], выберем в качестве основного (внешнего) масштаба среднего течения толщину вытеснения по дефекту скорости Δ и введем безразмерный градиент давления $b = (\delta^*/u_*^2)dP/dx$. Кроме того, положим $\alpha = k\Delta$, $C = c/u_*$ и введем параметр $q = d\Delta/dx$, характеризующий расширение пограничного слоя. Решение системы (6), (7) с граничными условиями (8), (9) ищем в виде

$$\Psi_0 = -u_*\Delta f(Y) + U\eta, \quad \chi_0 = \frac{u_*}{\Delta} \Omega_0(Y); \quad (21a)$$

$$\Phi_1 = \varphi_1 u_* \Delta, \quad \chi_1 = \Omega_1 u_* / \Delta, \quad (21b)$$

где $Y = \eta/\Delta(x)$ — безразмерная «поперечная» координата, использованная в (15). Заметим, что производная $f_Y = (U - u_0)/u_*$ определяет дефект профиля скорости u_0 . Подстав-

для (21) в уравнения (7), полагая $u_* = \gamma U$ и пренебрегая вкладом $d\gamma/dx$, получим для среднего течения уравнения вида

$$\frac{d}{dY} N\Omega_0 = \left(\frac{q}{\gamma} - b\right)(Y f_{YY} - \gamma f f_{YY}) + b(2f_Y - \gamma f_Y^2) + \mathcal{F}_1; \quad (22a)$$

$$\frac{d^2 f}{dY^2} = -(\Omega_0 + \mathcal{F}_2), \quad (22b)$$

где $\mathcal{F}_1 = \alpha(ka)N_Y \operatorname{Re}(\varphi_{1Y} - \alpha\varphi_1)e^{-\alpha Y} + 2\alpha(ka)^2 N_Y \bar{u}_0 e^{-2\alpha Y} - (1/2)\alpha \operatorname{Im}(\varphi_1^* \Omega_1)$; $\mathcal{F}_2 = \Omega_0(ka)^2 e^{-2\alpha Y} - ka e^{-\alpha Y} \operatorname{Re} \Omega_1$ ($\bar{u}_0 = 1/\gamma - f_Y - C$). При $Y = 0$ и $Y = \delta_1/\Delta$ для средних полей должны выполняться граничные условия

$$f = 0, \quad f_Y = \frac{1}{\gamma} - \frac{v_0}{u_*} \Big|_{Y=0}, \quad N\Omega_0 - \frac{1}{2} ka N \operatorname{Re}(\alpha^{-1} \Omega_{1Y} + \Omega_1) = \frac{2c_f}{\gamma^2} \Big|_{Y=0}; \quad (23a)$$

$$f_Y = 0, \quad f = 1 \Big|_{Y=\delta_1/\Delta}. \quad (23b)$$

Соотношение (17), определяющее динамическую скорость, принимает вид

$$N\Omega_0 - \frac{1}{2} N ka \operatorname{Re} \Omega_1 e^{-\alpha Y} = 1 \Big|_{Y=30/R}. \quad (24)$$

Кроме граничных условий, следующих из (8) и (9), в (23) включены безразмерные аналоги выражений (10) и (14), которые также имеют форму граничных условий. При $a = 0$ система (22) сводится к уравнению для f , полученному в [12] для равновесного пограничного слоя на плоской поверхности. В отличие от [12], пренебрегаем производной $d\gamma/dx$, дающей поправку более высокого порядка малости по «непараллельности течения», так как масштаб изменения γ значительно превышает L .

Система уравнений для осциллирующего течения (6) после перехода к безразмерным переменным принимает вид

$$i\alpha[\bar{u}_0 \Omega_1 - \varphi_1 \Omega_Y] = \left(\frac{d^2}{dY^2} - \alpha^2\right)(N\Omega_1) + 2N_Y \alpha^2 \varphi_1 - 2\alpha ka e^{-\alpha Y} \frac{d}{dY} [N_Y \bar{u}_0], \quad (25)$$

$$\left(\frac{d^2}{dY^2} - \alpha^2\right)\varphi_1 = \hat{\omega}_1 - 2ka e^{-\alpha Y} \hat{\omega}_0.$$

Граничные условия (8) и (9) дают

$$\Omega_1 = 0, \quad \varphi_{1Y} + \alpha\varphi_1 = 0 \Big|_{Y=\delta_1/\Delta}, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_{1Y} = \left(\frac{1}{2}\right) cka \Big|_{Y=0}. \quad (26)$$

Несмотря на то, что при выводе уравнений (22) в явном виде использовался только один масштаб Δ , профиль скорости среднего течения фактически является двухмасштабным, так как коэффициент вязкости (15) задает в пристеночной области вязкостный масштаб $\nu_0/u_* = \Delta/R$. Однако уравнения (22) сохраняют силу и вблизи поверхности, поскольку вклад членов непараллельности ($\sim q, b$) мал ввиду быстрого изменения полей по Y . Фактически уравнения для пристеночной области совпадают с полученными в [10] для параллельного течения, в котором строго сохраняется продольная составляющая среднего по ξ полного потока импульса через координатные линии $\eta = \text{const}$. В слабо непараллельном течении она мало изменяется в пристеночной области и в соответствии с (14) равна $(1/2)c_f U^2$ на поверхности $\eta = 0$. В присутствии волнистости полный поток импульса можно разделить на волновую компоненту и вклад среднего течения. Поэтому поведение профиля средней скорости в пристеночной области существенным образом зависит от изменений волнового поля.

Численная процедура и результаты вычислений. Решение краевой задачи (22)–(26) должно строиться таким образом, чтобы по заданным «входным» параметрам R , b , ka , α и C определялись неизвестные «выходные» параметры γ , q и c_f . Перед численным решением производилась замена переменных $z = \ln(Y + Y_0)$, где параметр Y_0 регулирует сжатие шага по Y (при фиксированном шаге по z). Краевая задача для осциллирующих полей (25), (26) решалась методом итераций, в котором распределения средних полей брались из предыдущей итерации. Производные заменялись конечными разностями и к полученным разностным уравнениям с фиксированным шагом по z применялся метод исключения Гаусса (см. [10]). Интегрирование уравнений (22) от $Y = 0$ до $Y = \delta_1/\Delta$ с начальными данными (23а) определяет f , $f_Y|_{Y=\delta_1/\Delta}$ и левую часть соотношения (24) как функции параметров γ , q и c_f , что позволяет рассматривать условия (23б) и (24) как систему трех алгебраических уравнений относительно γ , q и c_f . Эта система решалась методом Ньютона, в котором производные по искомым переменным заменялись конечными разностями (трехмерный вариант метода секущей). При этом интегрирование уравнений для средних полей (22) по z производилось методом Рунге — Кутты второго порядка точности.

Основные расчеты проводились при $Y_0 = 5 \cdot 10^{-4}$, $\delta_1/\Delta = 0,5$ на сетке из 500 равноотстоящих точек по z . При нулевом градиенте давления ($b = 0$) толщина пограничного слоя δ , определенная по уровню $u_0 = 0,99U$, составляла приблизительно половину интервала интегрирования по Y ($\delta/\Delta \simeq 0,25$). Ее доля увеличивалась при отрицательных градиентах давления ($b < 0$), однако соотношение δ/Δ приближалось к δ_1/Δ только при b , близких к их предельно возможному значению [12] $b = -0,5$. Влияние отклонения течения от потенциального на конце интервала проверялось в выборочных расчетах с $\delta_1/\Delta = 1$ на 1000 точках. Сходимость итерационной процедуры ухудшалась при увеличении ka . При $ka = 0,1$ обычно делалось не более 10–15 итераций. Метод Ньютона для краевой задачи (22)–(24), как правило, сходился после 2–4 итераций.

Нелинейные характеристики течения зависят от того, при каких условиях делается приращение амплитуды. В рамках численной процедуры приращение ka производилось при постоянных значениях параметров R , $b_1 = (\delta^*/U^2)dP/dx = \gamma^2 b$, $k\delta^* = \gamma\alpha$ и $c/U = \gamma C$, которые, в отличие от указанного выше набора входных параметров, определены через «внешние» масштабы течения U и δ^* . Выбор в качестве внешнего параметра толщины вытеснения δ^* продиктован, в частности, тем, что производная $d\delta^*/dx$ определяет наклон линий тока среднего течения за пределами пограничного слоя. Это позволяет предположить, что именно толщина вытеснения в наименьшей степени подвержена изменению при переходе от гладкого к волнистому участку поверхности. При малых ka приращения параметров взаимодействия пограничного слоя с волнистостью квадратичны по амплитуде:

$$g = g_0 + g_1(ka)^2, \quad \gamma = \gamma_0 + \gamma_1(ka)^2, \quad c_f = c_{f0} + (ka)^2 c_{f1} \quad \text{и т. п.} \quad (27)$$

Коэффициенты в разложениях (27) не зависят от a и определяют линейные и нелинейные свойства течения. Нетрудно видеть, что $c_{f0} = 2\gamma_0^2$.

В расчетах взаимодействия турбулентного пограничного слоя с длинной гравитационной волной на поверхности воды волновое число и толщина пограничного слоя выбирались в соответствии с данными работы [8]: $k = 0,04 \text{ см}^{-1}$, $\delta \sim 25 \text{ см}$ (при этом фазовая скорость $c = 1,57 \text{ м/с}$). Скорость дрейфового течения в воде v_0 полагалась равной u_* [18]. На рис. 1 показаны зависимости коэффициентов g_0 и g_1 от скорости потока в пограничном слое над гравитационной волной (на рис. 1, а кривые 1' и 2' соответствуют c_{f1} , 1 и 1' — $\delta^* = 4 \text{ см}$, 2 и 2' — $\delta^* = 8 \text{ см}$; сплошные линии отвечают $b_1 = 0$, штриховые — $b_1 = -0,0003$). Значение $b_1 = -0,0003$ является существенным отрицательным градиентом давления в рассматриваемой области значений U/c , поскольку параметр b достигает половины своего предельного значения. Полученные данные говорят о слабом влиянии

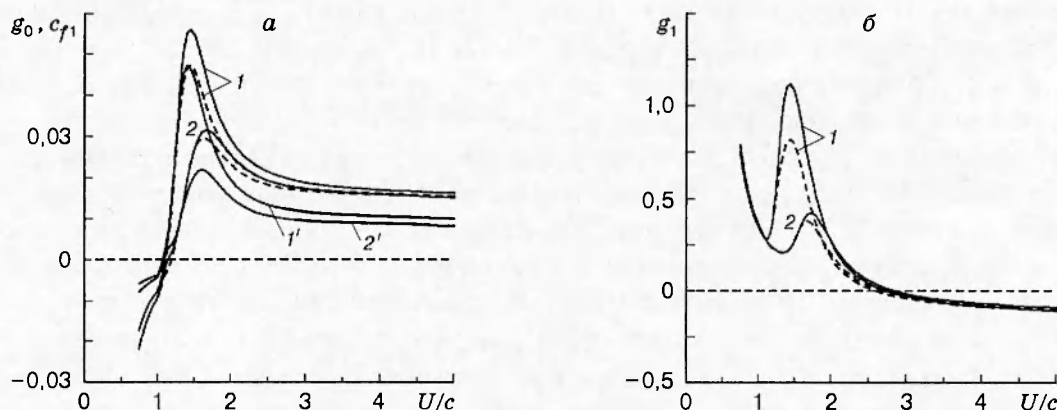


Рис. 1

отрицательного градиента давления на поведение как линейной, так и нелинейной части комплексной упругости.

Если в определении c_f (14) и выражении для $\text{Im } G$ (20) сохранить только вклад поверхностного давления, получим $c_{f1} = g_0$. Поэтому различие между g_0 и c_{f1} на рис. 1, а определяется влиянием касательных поверхностных напряжений. Отношение δ/δ^* зависит от δ_* и градиента давления. В частности, для сплошной кривой 1 при увеличении U/c оно монотонно возрастает от 6,5 до 7,5. Добавим, что при $U = \text{const}$ и изменении U/c за счет вариаций волнового числа были получены зависимости, аналогичные показанным на рис. 1.

Из рис. 1 видно, что при $U/c \leq 2,5$ амплитудное приращение $\text{Im } G$ становится положительным ($g_1 > 0$), что соответствует жесткому возбуждению волны. Смена знака g_1 происходит, когда критический уровень, определенный условием $u_0(y) = c$, приближается к верхней границе буферной области пограничного слоя, где $u_0 \simeq 0,55U$. Для логарифмического пограничного слоя бесконечной толщины при тех же значениях k в [10] было получено мягкое возбуждение. Чтобы сравнить построенные в [10] зависимости коэффициента взаимодействия волн с ветром β от u_*/c с теорией пограничного слоя конечной толщины, следует положить $\beta = \alpha^2 g/\gamma^2$ и $u_*/c = \gamma U/c$. Таким образом, в лабораторном эксперименте возможно существенное различие в поведении потока энергии к поверхностным волнам по сравнению с натурными условиями.

Из рис. 1 видно, что вблизи $U/c \simeq 1,4$ происходит аномальное увеличение g_0 и g_1 . Расчеты показали, что этот эффект проявляется только для достаточно длинных волн ($k\delta \leq 1$). Аномальное увеличение параметров взаимодействия непосредственно связано с конечной толщиной пограничного слоя, так как при $U/c \simeq 1,4$ критический уровень оказывается вблизи «излома» на профиле эффективной вязкости (15). В тестовых расчетах было зафиксировано резкое ослабление аномальных отклонений, когда логарифмический участок профиля скорости удлинялся за счет увеличения постоянной K в (15) в 1,5–2 раза.

Аналогичные расчеты, проведенные для коэффициентов γ_0 и γ_1 , показали, что поведение γ_0 соответствует известному для пограничного слоя на плоской поверхности. Например, при $\delta^* = 4$ см и $b_1 = 0$ γ_0 монотонно убывает от 0,039 до 0,033 в интервале $0,75 < U/c < 5$ (рис. 1). Нелинейный параметр γ_1 отрицателен, что соответствует уменьшению u_* в присутствии волнистости. Это качественно согласуется с экспериментальными данными [8]. В окрестности $U/c \simeq 1,4$ коэффициент γ_1 претерпевает аномальное отклонение в сторону отрицательных значений. Так, при $\delta^* = 4$ см и $b_1 = 0$ получаются значения $\gamma_1 = -0,048$, когда $U/c = 5$, и $\gamma_1 = -0,14$, когда $U/c = 1,4$.

Расчеты профиля скорости u_0 показали, что в присутствии волнистости u_0/U уменьшается во всем интервале по Y за исключением граничных значений 0 и 1. При этом на профиле четко просматриваются буферная область, логарифмический участок и область следа. Это отличается от поведения профиля скорости в логарифмическом пограничном слое, в котором уменьшение скорости среднего течения выходит на постоянное значение при удалении от поверхности [10]. Вычисления показали, что замена u_0 на $\langle v_1 \rangle$ (см. (11)) практически не изменяет картину деформации профиля скорости среднего течения под действием волнистости. Замена u_0 на $\langle v_1 \rangle$ в определении толщины вытеснения (10) также слабо влияет на результаты. Наиболее значительное уменьшение средней скорости возникает при $U/c \simeq 1,4$, т. е. в области аномального возрастания g_0 и g_1 . Это можно связать с ростом нелинейности в результате более глубокого проникновения осциллирующего течения в пограничный слой.

Для оценки влияния волнистости на среднее течение можно воспользоваться профилем вязкостно-турбулентного касательного напряжения, определенного выражением в правой части (17), взятым при произвольном η . Вычисления показали, что это касательное напряжение хорошо аппроксимируется любой из трех величин $\nu u_{0\eta}$, $\nu \chi_0$ или $\nu \langle v_{1\eta} \rangle$, что позволяет рассматривать его как вклад среднего течения в продольную составляющую потока импульса к волнистой поверхности. Отношение вязкостно-турбулентного напряжения к силе сопротивления (на единицу площади), определенное как $\tau = 2\nu u_{0\eta}/(c_f U^2)$, показано на рис. 2 ($\delta^* = 4$ см, $b_1 = 0$, линии 1 — $U/c = 1,4$, линии 2 — $U/c = 3$; сплошные линии — $ka = 0,1$, штриховая — $ka = 0,001$). Видно, что при $ka \rightarrow 0$, когда волновая часть потока импульса исчезает, $\tau(0)$ близко к единице. При $ka = 0,1$ величина $\tau(0)$ заметно меньше единицы, что можно объяснить появлением положительной волновой составляющей потока импульса.

Линейному участку профиля турбулентной вязкости соответствует область $0,02 \leq \eta/\delta \leq 0,15$ для кривых 1 или область $0,01 \leq \eta/\delta \leq 0,15$ для кривых 2. Отсюда следует, что при $ka = 0,1$ величина τ относительно слабо изменяется как в области существования линейного профиля вязкости (где возникает логарифмический профиль скорости (16)), так и в буферной области пограничного слоя. В данном случае u_*^2 совпадает с вязкой составляющей силы сопротивления, которая заметно меньше ее полного значения. Такое поведение τ можно объяснить слабым изменением волнового потока импульса на расстояниях $\eta \ll \delta$ от поверхности из-за большой длины поверхностной волны ($k\delta \leq 1$).

Хотя в присутствии волнистости отношение u_0/U уменьшается, за счет уменьшения u_* возможен рост постоянной B . Так, при $ka = 0,001$ вычисления дают значение $B \approx 6,0$,

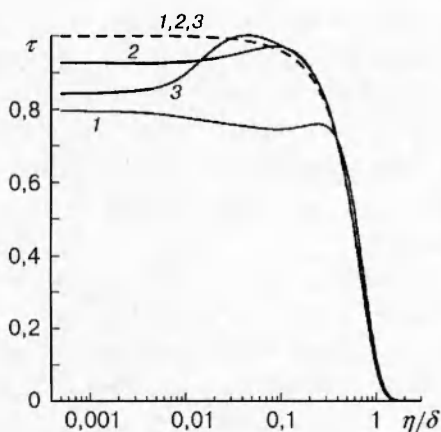


Рис. 2

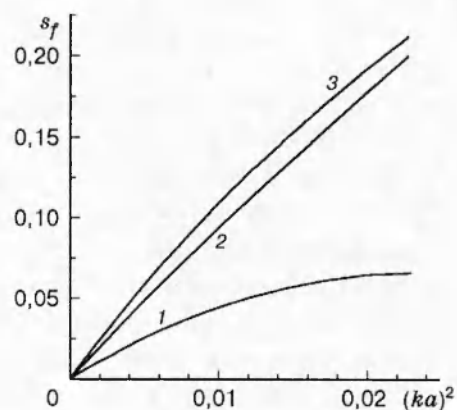


Рис. 3

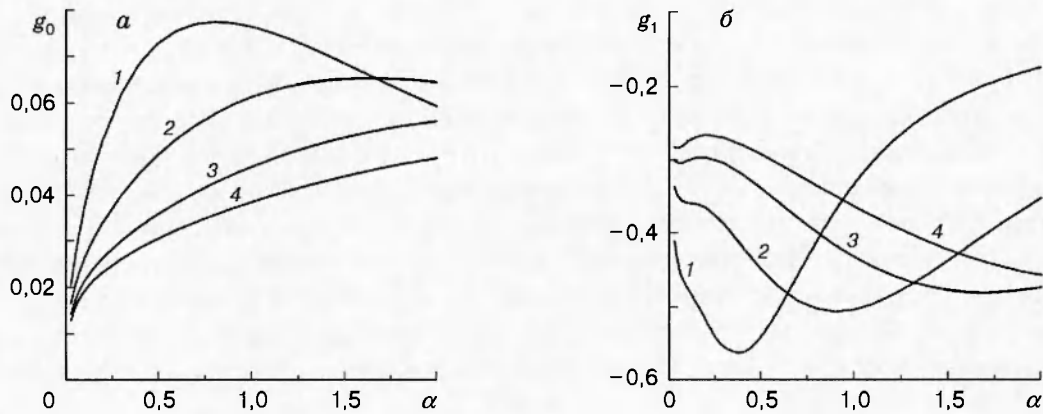


Рис. 4

которое превышает постоянную $B = 5,0$ для плоской поверхности на величину безразмерной скорости поверхностного дрейфа v_0/u_* . В то же время при $ka = 0,1$ были получены значения $B \approx 6,0$ и $6,45$ для $U/c = 3$ и $1,4$ соответственно. Увеличение постоянной B в экспериментах [8] выражено значительно сильнее, что, возможно, связано с особенностями метода определения u_* .

Расчеты для твердой поверхности производились в случае медленных поверхностных волн ($c \ll U$), которые в лабораторных условиях обычно наблюдаются на вязкоупругих покрытиях [5, 6]. В данном случае можно положить $c \rightarrow 0$, а результаты расчета коэффициента сопротивления применимы также для жесткого волнистого профиля. На рис. 3 показана амплитудная зависимость относительного приращения коэффициента сопротивления $s_f = (c_f - c_{f0})/c_{f0}$ ($R = 3200$, $b_1 = 0$, кривые 1–3 соответствуют $k\delta^* = 0,05; 0,8; 2,5$). Видно, что коэффициент сопротивления возрастает при увеличении амплитуды волнистости, причем отклонения от квадратичного закона проявляются раньше для длинных волн. Поведение линейных и нелинейных характеристик энергообмена пограничного слоя с медленной волной на твердом покрытии в зависимости от волнового числа показано на рис. 4 ($b_1 = 0$, кривые 1–4 соответствуют $R = 1500; 3200; 6000; 9000$). Видно, что приток энергии к поверхностной волне, определяемый параметром $g_0 > 0$ на рис. 4,а, ослабляется под действием нелинейности ($g_1 < 0$ на рис. 4,б). Вклад среднего течения в касательное напряжение для твердой поверхности с относительно мелкомасштабной волнистостью ($k\delta \approx 5$) показан кривыми 3 на рис. 2 ($R = 3200$, $b_1 = 0$, $k\delta^* = 0,8$, сплошная линия — $ka = 0,1$, штриховая — $ka = 0,001$). Линейному участку профиля вязкости соответствует область $0,035 \leq \eta/\delta \leq 0,15$, в которой изменения τ относительно малы и, следовательно, реализуется логарифмический профиль скорости (16). Поведение τ говорит о том, что затухание волновой части потока импульса даже при умеренно больших $k\delta$ происходит в пределах буферной области. В результате u_*^2 совпадает с силой сопротивления и превосходит силу вязкого трения на поверхности в $1/\tau(0)$ раз.

Для выяснения различия между характеристиками взаимодействия пограничного слоя с поверхностью жидкости и твердого покрытия производилось сравнение результатов решения задачи с обдуванием длинных волн на воде ($k\delta \sim 1$) в отсутствие дрейфа ($v_0 = 0$) и задачи с обтеканием твердой поверхности. При этом не обнаружено существенных изменений как линейных, так и нелинейных характеристик взаимодействия.

Заключение. Таким образом, нелинейное взаимодействие длинных поверхностных волн на воде с пограничным слоем конечной толщины может качественным образом от-

личаться от их взаимодействия с атмосферным пограничным слоем (аномальный рост мнимой части комплексной упругости, переход от мягкого к жесткому возбуждению). Нелинейные добавки к комплексной упругости малы при $ka \ll 1$, однако они играют принципиальную роль, например, при выводе эволюционных уравнений для поверхностных волн вблизи порога их устойчивости.

Четко выраженный логарифмический участок профиля средней скорости в пограничном слое на волнистой поверхности появляется в случае длинных ($k\delta \leq 1$) и коротких ($k\delta \geq 5$) волн. При этом динамическая скорость, определяемая как параметр логарифмического профиля, дает заниженное значение силы сопротивления для крупномасштабной волнистости и ее полное значение — для мелкомасштабной.

Важным элементом предложенного подхода является использование для расчета среднего течения двухмасштабной модели. Чтобы оценить ее применимость, заметим, что изменения среднего течения, определяемые волнистостью, в большинстве случаев оказываются локализованными на небольшой части пограничного слоя вблизи поверхности. Эволюция течения в этой пристеночной области определяется изменением динамической скорости (при постоянстве амплитуды волнистости, волнового числа и фазовой скорости). Поэтому течение в области следа, имеющее собственный масштаб установления $\sim L$, будет отслеживать изменения, вносимые пристеночной областью. В других случаях можно предположить, что данная модель дает разумные оценки нелинейных параметров отклика течения и коэффициента сопротивления.

Автор выражает благодарность Ю. И. Троицкой за полезные обсуждения и помощь в проведении расчетов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 97-01-00183, 96-15-96593).

ЛИТЕРАТУРА

1. Landahl M. T. On the stability of a laminar incompressible boundary layer over a flexible surface // *J. Fluid Mech.* 1962. V. 13, N 4. P. 609–632.
2. Carpenter P. W., Garrad A. D. The hydrodynamic stability of flow over Kramer-type compliant surfaces. Pt 2. Flow-induced surface instabilities // *J. Fluid Mech.* 1986. V. 170. P. 199–232.
3. Pierce R. The Ginzburg — Landay equation for interfacial instabilities // *Phys. Fluids A.* 1992. V. 4, N 11. P. 2486–2494.
4. Rotenberry J. M. Finite-amplitude shear waves in a channel with compliant boundaries // *Phys. Fluids A.* 1992. V. 4, N 2. P. 270–276.
5. Gad-el-Hak M. Boundary layer interactions with compliant coatings. An overview // *Appl. Mech. Rev.* 1986. V. 39, N 4. P. 511–523.
6. Riley J. J., Gad-el-Hak M., Metcalfe R. W. Compliant coatings // *Ann. Rev. Fluid. Mech.* 1988. V. 20. P. 393–421.
7. Sengupta T. K., Lekoudis S. G. Calculation of two-dimensional turbulent boundary layer over rigid and moving wavy surfaces // *AIAA J.* 1985. V. 23, N 4. P. 530–536.
8. Hsu C. T., Hsu E. N. On the structure of turbulent flow over a progressive water wave: theory and experiment in a transformed wave following coordinate system. Pt 2 // *J. Fluid Mech.* 1983. V. 131. P. 123–153.
9. Jenkins A. D. A quasi-linear eddy-viscosity model for the energy and momentum to wind waves using conservation-law equations in a curvilinear coordinate system // *J. Phys. Oceanogr.* 1992. V. 22, N 8. P. 843–858.

10. Реутов В. П., Троицкая Ю. И. О нелинейных эффектах при взаимодействии волн на воде с турбулентным ветром // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1995. Т. 36, № 6. С. 825–834.
11. Лойцянский Л. Г. Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1978.
12. Mellor L. G., Gibson D. M. Equilibrium turbulent boundary layers // J. Fluid Mech. 1966. V. 24, pt 2. P. 225–253.
13. Benjamin T. B. Shearing flow over a wavy boundary // J. Fluid Mech. 1959. V. 6. P. 161–250.
14. Федяевский К. К., Гиневский А. С., Колесников А. В. Расчет турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости. Л.: Судостроение, 1973.
15. Смольяков А. В. Спектр квадрупольного излучения плоского турбулентного пограничного слоя // Акуст. журн. 1973. Т. 19, № 3. С. 420–425.
16. Реутов В. П. О неустойчивости периодического прогиба панельной поверхности в турбулентном пограничном слое // ПМТФ. 1992. № 4. С. 74–83.
17. Реутов В. П. Нелинейный флаттер пластин в турбулентном пограничном слое слабосжимаемого течения // ПМТФ. 1993. Т. 34, № 2. С. 58–66.
18. Wu J. Wind-induced drift currents // J. Fluid Mech. 1975. V. 68. P. 49–70.

*Поступила в редакцию 18/X 1996 г.,
в окончательном варианте — 17/IV 1997 г.*
