

О РАВНОВЕСИИ ИЗОЛИРОВАННОЙ ТРЕЩИНЫ В УПРУГОЙ ПОЛОСЕ

П. А. Мартынюк, Э. В. Поляк
(Новосибирск)

В работах [1—3] решалась задача о бесконечной полосе шириной $2h$, содержащей продольную симметрично расположенную трещину длиной $2l$. Рассматривалось три типа граничных условий на боковых поверхностях полосы: контакт с абсолютно жесткими гладкими основаниями (это условие выполняется и в задаче о периодической системе параллельных трещин одинаковой длины), границы полосы свободны от нагрузок и условия жесткого сцепления (смещения на боковых поверхностях полосы равны нулю). Полученные решения в общем случае справедливы при $h/l \gg 1$ (в работе [3] при $h/l \geq 2$). В работах [4, 5] методом Винера — Хопфа получены решения этой задачи в предельном случае, когда $h/l \ll 1$.

В данной работе приводится общее решение задачи при условии, что трещина располагается параллельно границам полосы, но не обязательно на одинаковом расстоянии от них. Предельное равновесие трещины в полосе в этом случае будет определяться двумя коэффициентами интенсивности напряжений K_I и K_{II} в отличие от симметричного случая, где предельное равновесие определяется только одним K_I . Для различных граничных условий построены зависимости K_I и K_{II} от величины отношения расстояния между трещиной и ближайшей границей к полудлине трещины.

1. В предположении, что деформационное состояние симметрично относительно оси $x = 0$, общее решение уравнений равновесия изотропного упругого тела

$$(1 - 2\nu)\Delta u + \text{grad div } u = 0, \quad u = u \cdot i + w \cdot j$$

можно записать в виде

$$(1.1) \quad w(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} [(A + Bsy) \text{sh}(sy) + (C + Dsy) \text{ch}(sy)] \cos(sx) ds,$$

$$-u(x, y) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} [(A + Dsy + \gamma B) \text{sh}(sy) + (A + Bsy + \gamma D) \text{ch}(sy)] \sin(sx) ds,$$

где $\gamma = 3 - 4\nu$; A, B, C, D — произвольные функции от s . Связь между компонентами тензоров напряжения и деформации дается законом Гука

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \sigma_{yy} &= 2(1 - 2\nu)^{-1} [(1 - \nu)\partial u/\partial x + \nu\partial w/\partial y], \\ \sigma_{xx} &= 2(1 - 2\nu)^{-1} [\nu\partial u/\partial x + (1 - \nu)\partial w/\partial y], \\ \sigma_{xy} &= \partial u/\partial y + \partial w/\partial x. \end{aligned}$$

В формулах (1.1), (1.2) присутствуют безразмерные величины. Штрихи для простоты записи опущены

$$\langle x, y, u, w, h \rangle' = \frac{\langle x, y, u, w, h \rangle}{l}, \quad \sigma'_{ij} = \sigma_{ij}/\mu, \quad \mu = E/2(1 + \nu).$$

Рассматривается упругий слой $-h_2 \leq y \leq h_1, |x| < \infty$ с разрезом, расположенным при $y = 0, |x| \leq l$, в условиях плоской деформации. На боковых поверхностях слоя при $y = h_1$ и $y = -h_2, |x| < \infty$ предполагается выполнение следующих граничных условий:

слой находится между абсолютно жесткими гладкими плитами

$$(1.3) \quad \sigma_{xy} = 0, \quad w = 0;$$

границы слоя свободны

$$(1.4) \quad \sigma_{yy} = 0, \quad \sigma_{xy} = 0;$$

основания слоя жестко заделаны

$$(1.5) \quad u = 0, \quad w = 0.$$

На поверхности разреза при $y = 0, |x| \leq 1$

$$(1.6) \quad \sigma_{yy} = -p(x)/\mu, \quad \sigma_{xy} = -\tau(x)/\mu.$$

Выделим в слое $-h_2 \leq y \leq h_1$ две области: первая область $0 \leq y \leq h_1, |x| < \infty$ и вторая $-h_2 \leq y \leq 0, |x| < \infty$. Величины, относящиеся к первой области, будут помечаться индексом 1, а ко второй — индексом 2. Вид решения (1.1) будет общим для этих областей. Таким образом, для определения восьми неизвестных функций $A_i(s), B_i(s), C_i(s), D_i(s) (i = 1, 2)$ имеем шесть граничных условий: четыре на боковых поверхностях полосы и два на поверхности разреза. Кроме граничных условий, должны выполняться условия непрерывности напряжений при $y = 0$ и непрерывности смещений при $y = 0$ и $|x| > 1$

$$(1.7) \quad \left. \begin{aligned} \sigma_{1yy} - \sigma_{2yy} &= 0, \\ \sigma_{1xy} - \sigma_{2xy} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{при } |x| < \infty, \\ \left. \begin{aligned} w_1 - w_2 &= 0, \\ u_1 - u_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{при } |x| > 1.$$

Приведем решение задачи с граничными условиями (1.3). В случае использования граничных условий (1.4), (1.5) решение проводится совершенно аналогично. Используя (1.3) и первую пару условий из (1.7), получим

$$\begin{aligned} A_1 &= \psi^{-1} [B_1 \Phi_2 - B_2 \Phi_1], \quad A_2 = \psi^{-1} [B_1 \Phi_1^1 - B_2 \Phi_2^1], \\ C_1 &= \psi^{-1} [B_1 \Phi_4 + B_2 \Phi_3], \quad C_2 = \psi^{-1} [B_1 \Phi_3^1 + B_2 \Phi_4^1], \\ D_1 &= -B_1 \operatorname{cth} H_1, \quad D_2 = B_2 \operatorname{cth} H_2, \end{aligned}$$

где $H_1 = sh_1; H_2 = sh_2; \Phi_1 = \Phi_1(H_1, H_2) = H_2 \operatorname{ch} H_1 \cdot \operatorname{sh}^{-1} H_2 + \operatorname{ch} H_1 \cdot \operatorname{ch} H_2; \Phi_2 = \Phi_2(H_1, H_2) = H_1 \operatorname{ch} H_2 \cdot \operatorname{sh}^{-1} H_1 + 2(1 - \nu) \operatorname{ch} H_1 \cdot \operatorname{ch} H_2 + (1 - 2\nu) \operatorname{ch}^2 H_1 \cdot \operatorname{sh} H_2 \cdot \operatorname{sh}^{-1} H_1; \Phi_3 = \Phi_3(H_1, H_2) = H_2 \operatorname{sh} H_1 \cdot \operatorname{sh}^{-1} H_2 + \operatorname{ch} H_2 \operatorname{sh} H_1; \Phi_4 = \Phi_4(H_1, H_2) = H_1 \operatorname{sh} H_2 \operatorname{sh}^{-1} H_1 - 2(1 - \nu) \operatorname{ch} H_2 \operatorname{sh} H_1 - (1 - 2\nu) \operatorname{ch} H_1 \operatorname{sh} H_2; \psi = \operatorname{sh}(H_1 + H_2),$

а функции $\Phi_i^1 (i = 1, 2, 3, 4)$ строятся по правилу

$$\Phi_i^1 = \Phi_i(H_2, H_1).$$

Оставшиеся смешанные граничные условия (1.6) и вторую пару условий из (1.7) можно записать, используя только функции B_1 и B_2 в виде парных интегральных уравнений

$$(1.8) \quad \left. \begin{aligned} \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} s [B_1 \Phi_1^1 - B_2 \Phi_1] \psi^{-1} \cos(sx) ds &= -p(x)/\mu, \\ \frac{4}{\pi} \int_0^{\infty} s [B_1 \Phi_3^1 + B_2 \Phi_3] \psi^{-1} \sin(sx) ds &= \tau(x)/\mu \end{aligned} \right\} x < 1, \\ \left. \begin{aligned} 4(1 - \nu) \pi^{-1} \int_0^{\infty} [B_1 - B_2] \cos(sx) ds &= 0, \\ 4(1 - \nu) \pi^{-1} \int_0^{\infty} s [B_1 \operatorname{cth} H_1 + B_2 \operatorname{cth} H_2] \cos(sx) ds &= 0 \end{aligned} \right\} x > 1.$$

Последнее уравнение отвечает условию $\partial u_1 / \partial x - \partial u_2 / \partial x = 0$ при $y = 0, |x| > 1$.

2. Очевидно, что два последних уравнения системы (1.8) можно переписать в виде

$$(2.1) \quad B_1(s) - B_2(s) = \int_0^1 w_0(x) \cos(sx) dx,$$

$$s [B_1(s) \operatorname{cth} H_1 + B_2(s) \operatorname{cth} H_2] = \int_0^1 u_0(x) \cos(sx) dx,$$

где функции $w_0(x)$ и $u_0(x)$ пропорциональны соответственно функциям $w_1(x, 0) - w_2(x, 0)$ и $\partial u_1/\partial x - \partial u_2/\partial x$ при $y = 0$.

Используя асимптотическое поведение смещений в окрестности носика трещины, можем представить $w_0(x)$ и $u_0(x)$ в виде интегралов от некоторых функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, непрерывных на отрезке $[0, 1]$ [6],

$$(2.2) \quad w_0(x) = \int_x^1 \frac{\varphi(\tau) d\tau}{\sqrt{\tau^2 - x^2}}, \quad u_0(x) = \frac{\delta}{\sqrt{1 - x^2}} + \int_x^1 \frac{\psi(\tau) d\tau}{\sqrt{\tau^2 - x^2}}, \quad \delta = - \int_0^1 \psi(\tau) d\tau,$$

где постоянная δ определяется из условия $\lim_{x \rightarrow 1} \int_0^x u_0(\xi) d\xi = 0$, последнее обеспечивает выполнение равенства $u_1(x, 0) = u_2(x, 0)$ при $x \geq 1$.

Подставив (2.2) в (2.1), получим

$$(2.3) \quad B_1(s) - B_2(s) = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \tau \varphi(\tau) J_0(s\tau) d\tau = \frac{\pi}{2} \Phi_0(s),$$

$$s [B_1(s) \operatorname{cth} H_1 + B_2(s) \operatorname{cth} H_2] = \frac{\pi}{2} \left[\delta J_0(s) + \int_0^1 \psi(\tau) J_0(s\tau) d\tau \right] = \frac{\pi}{2} \Psi_0(s).$$

Отсюда имеем

$$B_1(s) = \frac{\pi}{2} F_0^{-1} [\Psi_0(s) s^{-1} + \Phi_0(s) \operatorname{cth} H_2],$$

$$B_2(s) = \frac{\pi}{2} F_0^{-1} [\Psi_0(s) s^{-1} - \Phi_0(s) \operatorname{cth} H_1], \quad F_0 = \operatorname{cth} H_1 + \operatorname{cth} H_2.$$

Подставим эти выражения для $B_1(s)$ и $B_2(s)$ в неиспользованные первые два уравнения системы (1.8) и получим для $x < 1$

$$(2.4) \quad \int_0^\infty [\Phi_0(s) f_2(s) + \Psi_0(s) f_1(s)] \sin(sx) ds = - \int_0^\infty p(x)/\mu \cdot dx,$$

$$\int_0^\infty [\Phi_0(s) f_4(s) + \Psi_0(s) f_3(s)] s \sin(sx) ds = \tau(x)/\mu,$$

где первое уравнение из (1.8) проинтегрировано по x в пределах от 0 до x , а

$$f_1(s) = 2 (s\psi F_0)^{-1} [\varphi_1^1 - \varphi_1],$$

$$f_2(s) = 2 (\psi F_0)^{-1} [\varphi_1^1 \operatorname{cth} H_2 + \varphi_1 \operatorname{cth} H_1],$$

$$f_3(s) = 2 (s\psi F_0)^{-1} [\varphi_1^1 + \varphi_3], \quad f_4(s) = s f_1(s).$$

При больших значениях s функция $f_1(s) \sim O(e^{-H_1}, e^{-H_2})$.

Вместо функций $f_2(s)$, $f_3(s)$ введем $g_2(s)$ и $g_3(s)$ равенствами

$$\begin{aligned} f_2(s) &= 1 + g_2(s), \quad g_2(s) \sim O(H_1 e^{-H_1}, H_2 e^{-H_2}), \\ sf_3(s) &= 1 + g_3(s), \quad g_3(s) \sim O(H_1 e^{-H_2}, H_2 e^{-H_1}). \end{aligned}$$

Подставим в интегральные уравнения таким образом определенные функции $f_2(s)$ и $f_3(s)$ и выражения (2.3) для $\Phi_0(s)$ и $\Psi_0(s)$. Меняя порядок интегрирования и используя известный интеграл

$$\int_0^{\infty} J_0(s\tau) \sin(sx) ds = (x^2 - \tau^2)^{-1/2} \text{ при } x > \tau,$$

получаем два уравнения Абеля

$$\int_0^x \frac{\tau \varphi(\tau) d\tau}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} = H(x), \quad \int_0^x \frac{\psi(\tau) d\tau}{\sqrt{x^2 - \tau^2}} = H_0(x),$$

где

$$\begin{aligned} H(x) &= -\mu^{-1} \int_0^x p(x) dx - \int_0^1 \tau \varphi(\tau) d\tau \int_0^{\infty} g_2(s) J_0(s\tau) \sin(sx) ds - \\ &\quad - \int_0^1 \psi(\tau) d\tau \int_0^{\infty} f_1(s) [J_0(s\tau) - J_0(s)] \sin(sx) ds; \\ H_0(x) &= \tau(x)/\mu - \int_0^1 \psi(\tau) d\tau \int_0^{\infty} g_3(s) [J_0(s\tau) - J_0(s)] \sin(sx) ds - \\ &\quad - \int_0^1 \tau \varphi(\tau) d\tau \int_0^{\infty} sf_4(s) J_0(s\tau) \sin(sx) ds, \end{aligned}$$

решения которых имеют вид

$$\varphi(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^t \frac{H'(x) dx}{\sqrt{t^2 - x^2}}, \quad \psi(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^t \frac{H_0'(x) dx}{\sqrt{t^2 - x^2}}.$$

Не снижая общности рассуждений, полагаем в дальнейшем $\tau(x) = 0$, $p(x) = p_0 = \text{const}$. Продифференцировав $H(x)$ и $H_0(x)$ по x и проведя вычисления, получим систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \varphi_0(t) + \int_0^1 \varphi_0(\tau) K_1(\tau, t) d\tau + \int_0^1 \psi_0(\tau) K_2(\tau, t) d\tau &= -\sqrt{t}, \\ \psi_0(t) + \int_0^1 \psi_0(\tau) K_3(\tau, t) d\tau + \int_0^1 \varphi_0(\tau) K_4(\tau, t) d\tau &= 0, \quad 0 \leq t, \tau \leq 1. \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \varphi_0(t) &= \varphi(t) t^{1/2} p_0^{-1} \mu; \quad \psi_0(t) = \psi(t) t^{-1/2} p_0^{-1} \mu; \\ K_1(\tau, t) &= \sqrt{\tau t} \int_0^{\infty} s g_2(s) J_0(st) J_0(s\tau) ds; \\ K_2(\tau, t) &= \sqrt{\tau t} \int_0^{\infty} s f_1(s) [J_0(s\tau) - J_0(s)] J_0(st) ds; \\ K_3(\tau, t) &= \sqrt{\tau t} \int_0^{\infty} s g_3(s) [J_0(s\tau) - J_0(s)] J_0(st) ds; \end{aligned}$$

$$K_4(\tau, t) = \sqrt{\tau t} \int_0^{\infty} s^2 f_4(s) J_0(s\tau) J_0(st) ds.$$

При использовании граничных условий (1.4) (границы слоя свободны) получаем ту же самую систему интегральных уравнений Фредгольма (2.5), в которой

$$(2.6) \quad \begin{aligned} -g_2(s) &= 2(\psi F_0)^{-1} \{ \text{sh}^2 H_1 \text{sh}^2 H_2 \text{sh}^2 (H_1 + H_2) + H_1^2 H_2^2 \times \\ &\times (\text{sh}^2 H_1 + \text{sh}^2 H_2) - H_1^3 \text{sh}^3 H_2 \text{ch} H_2 - H_2^3 \text{sh}^3 H_1 \text{ch} H_1 - \\ &- H_2^2 \text{sh}^2 H_1 (\text{sh}^2 H_1 + \text{ch}^2 H_1 \text{sh}^2 H_2 + \text{sh} H_1 \text{sh} H_2 \text{ch} H_1 \text{ch} H_2) - \\ &- H_1^2 \text{sh}^2 H_2 (\text{sh}^2 H_2 + \text{ch}^2 H_2 \text{sh}^2 H_1 + \text{sh} H_1 \text{sh} H_2 \text{ch} H_1 \text{ch} H_2) + \\ &+ H_1 H_2 (H_1^2 \text{sh}^2 H_2 + H_2^2 \text{sh}^2 H_1 + H_1 \text{sh}^2 H_2 \text{sh} H_1 \text{ch} H_1 + \\ &+ H_2 \text{sh}^2 H_1 \text{sh} H_2 \text{ch} H_2 - 2 \text{sh}^2 H_1 \text{sh}^2 H_2) \} + 1, \\ f_1(s) &= 2(sF_0)^{-1} [H_2^2 \text{sh}^2 H_1 - H_1^2 \text{sh}^2 H_2], \\ g_3(s) &= 2F_0^{-1} [H_1 H_2 (H_1 + H_2) - H_2 \text{sh}^2 H_1 - H_1 \text{sh}^2 H_2 + \\ &+ H_1^2 \text{sh} H_2 \text{ch} H_2 + H_2^2 \text{sh} H_1 \text{ch} H_1 - \text{sh} H_1 \text{sh} H_2 \text{sh} (H_1 + H_2)] - 1, \\ f_4(s) &= s f_1(s), \quad F_0 = [(H_1 + H_2)^2 - \text{sh}^2 (H_1 + H_2)], \\ \psi &= H_1 \text{sh}^2 H_2 + H_2 \text{sh}^2 H_1 + \text{sh} H_1 \text{sh} H_2 \text{sh} (H_1 + H_2). \end{aligned}$$

3. Условие предельного равновесия трещины полностью определяется коэффициентами интенсивности напряжения K_I и K_{II} в вершине трещины при особенности порядка $(\Delta x)^{-1/2}$ ($\Delta x \ll 1$). Покажем, что компоненты тензора напряжения имеют особенность нужного порядка, и найдем коэффициенты при этой особенности. Используя полученное решение (1.1), (2.3), можно записать

$$\sigma_{xx}(x, 0) = -2 \int_0^{\infty} [\Psi_0(s) f_5(s) + \Phi_0(s) f_6(s)] s \cos(sx) ds,$$

$$f_5(s) = (s\psi F_0)^{-1} [H_1 \text{ch} H_2 \text{sh}^{-1} H_1 - H_2 \text{ch} H_1 \text{sh}^{-1} H_2 - \\ - 2 \text{ch} H_1 \text{ch} H_2 - 2 \text{ch}^2 H_1 \frac{\text{sh} H_2}{\text{sh} H_1}],$$

$$f_6(s) = (\psi F_0)^{-1} [H_1 \text{ch} H_2 \text{sh}^{-1} H_1 \text{cth} H_2 + H_2 \text{ch} H_1 \text{sh}^{-1} H_2 \text{cth} H_1 - F_0 \text{ch} H_1 \text{ch} H_2].$$

В этом выражении и в выражениях (2.4) для σ_{yy} и σ_{xy} выделив главные члены в функциях $f_i(s)$ ($i = 1, 2, \dots, 6$), запишем

$$(3.1) \quad \sigma_{xx}(x, 0) \simeq \int_0^{\infty} [2\Psi_0(s) + s\Phi_0(s)] \cos(sx) ds,$$

$$\sigma_{yy}(x, 0) \simeq \int_0^{\infty} s\Phi_0(s) \cos(sx) ds, \quad \sigma_{xy}(x, 0) \simeq - \int_0^{\infty} \Psi_0(s) \sin(sx) ds.$$

В выражениях для $\Phi_0(s)$ и $\Psi_0(s)$ возьмем тоже только главную неинтегральную часть, так как можно показать, что остальные члены не участвуют в формировании особенности

$$\begin{aligned} \Phi_0(s) &= \int_0^1 \tau \varphi(\tau) J_0(s\tau) d\tau = s^{-1} \left[\varphi(1) J_1(s) - \int_0^1 \varphi'(\tau) \tau J_1(s\tau) d\tau \right] \simeq \\ &\simeq s^{-1} \varphi(1) J_1(s) - \dots, \quad \Psi_0(s) \simeq \delta J_0(s) + \dots \end{aligned}$$

Подставив эти соотношения в (3.1), получаем

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}(x, 0) &\simeq \varphi(1) \int_0^{\infty} J_1(s) \cos(sx) ds + 2\delta \int_0^{\infty} J_0(s) \cos(sx) ds, \\ \sigma_{yy}(x, 0) &\simeq \varphi(1) \int_0^{\infty} J_1(s) \cos(sx) ds, \quad \sigma_{xy}(x, 0) \simeq -\delta \int_0^{\infty} J_0(s) \sin(sx) ds.\end{aligned}$$

Теперь, используя известные интегралы [7], можно записать асимптотическое представление в окрестности точки $x = 1$ компонент тензора напряжения ($\varepsilon \ll 1$)

$$\begin{aligned}\sigma_{xx}(x, 0) &\simeq -\varphi(1)[x^2 - 1]^{-1/2}(x + \sqrt{x^2 - 1})^{-1}, \\ \sigma_{yy}(x, 0) &\simeq -\varphi(1)[x^2 - 1]^{-1/2}(x + \sqrt{x^2 - 1})^{-1}, \\ \sigma_{xy}(x, 0) &\simeq -\delta[x^2 - 1]^{-1/2} \text{ при } x = 1 + \varepsilon; \\ \sigma_{xx}(x, 0) &\simeq 2\delta[1 - x^2]^{-1/2} + \varphi(1), \\ \sigma_{yy}(x, 0) &\simeq \varphi(1), \quad \sigma_{xy}(x, 0) \simeq 0\end{aligned}$$

при $x = 1 - \varepsilon$.

Отсюда видно, что напряжения имеют нужную особенность в окрестности точки $x = 1$. Коэффициенты при этой особенности — коэффициенты интенсивности напряжения — выражаются через решения интегральных уравнений Фредгольма (2.5)

$$K_I = -p_0\varphi_0(1)\sqrt{l/2}, \quad K_{II} = p_0\sqrt{l/2} \cdot \int_0^1 \psi_0(t)\sqrt{t} dt.$$

Рассмотрим более подробно два предельных случая. Первый, когда трещина расположена в слое симметрично, т. е. $h_1 = h_2$, и второй — трещина расположена под границей полупространства, т. е. $h_2 \rightarrow \infty$. При $h_1 = h_2 = h$ $K_2(\tau, t) = K_4(\tau, t) = 0$, следовательно, $\psi(t) = 0$, и задача сводится к решению одного интегрального уравнения для функции $\varphi_0(t)$

$$(3.2) \quad \varphi_0(t) + \int_0^1 \varphi_0(\tau) K_{i0}(\tau, t) d\tau = -\sqrt{t},$$

$$K_{10}(\tau, t) = \sqrt{\tau t} \int_0^{\infty} s [H \operatorname{sh}^{-2} H + \operatorname{cth} H - 1] J_0(st) J_0(s\tau) ds,$$

$$K_{20}(\tau, t) = -\sqrt{\tau t} \int_0^{\infty} s \left[\frac{H^2 - \operatorname{sh}^2 H}{H + \operatorname{sh} H \operatorname{ch} H} + 1 \right] J_0(st) J_0(s\tau) ds,$$

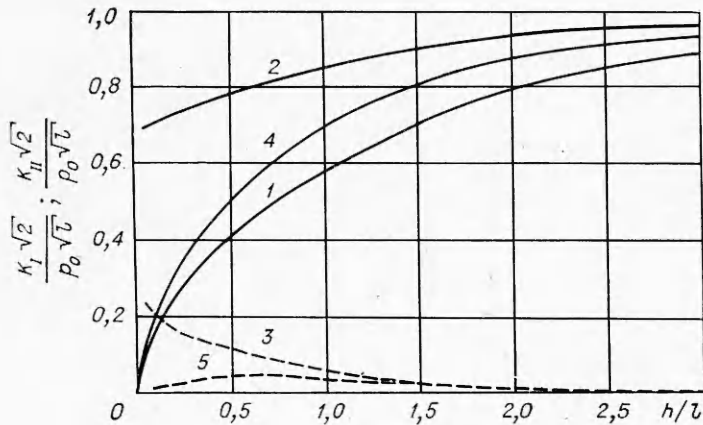
$$K_{30}(\tau, t) = \sqrt{\tau t} \int_0^{\infty} s \left[\frac{H^2 + (1 - 2\nu)^2 + \gamma \operatorname{ch}^2 H}{\gamma \operatorname{ch} H \operatorname{sh} H - H} - 1 \right] J_0(st) J_0(s\tau) ds,$$

где первое ядро соответствует граничным условиям (1.3), второе — условиям (1.4) и третье — условиям (1.5). Результаты численного счета уравнения (3.2) с ядрами $K_{i0}(\tau, t)$ ($i = 1, 2, 3$) представлены на фиг. 1, 2 кривыми 1, а на фиг. 3 кривыми 1—4, построенными при коэффициенте Пуассона $\nu = 0,15; 0,25; 0,35; 0,45$ соответственно. Кривые 1 на фиг. 1, 2 полностью совпадают с кривыми, построенными по зависимостям, приведенным в работе [3]. Кривые на фиг. 3 существенно зависят от коэффициента Пуассона ν . С увеличением ν кривые быстрее сходят с асимптотической формулы [5]

$$(3.3) \quad K_I = p_0\sqrt{1 - 2\nu} (1 - \nu)^{-1}\sqrt{h/2\pi},$$

справедливой при $h \ll l$. Так, при $\nu = 0,45$ расхождение с вычислениями по формуле (3.3) начинается с отношения $h/l = 0,5$, в то время как асимптотические формулы [4, 5]

$$K_I = p_0\sqrt{h/2\pi},$$



Фиг. 1

$$K_I = \rho_0 \sqrt{6h/\pi} [0,1267 + 0,6733\lambda^{-1} + 0,5\lambda^{-2} + (0,0104 - 0,1267\lambda^{-1} - 0,3367\lambda^{-2} - 1/6 \cdot \lambda^{-3}) / (0,6733 + \lambda^{-1})], \lambda = h/l,$$

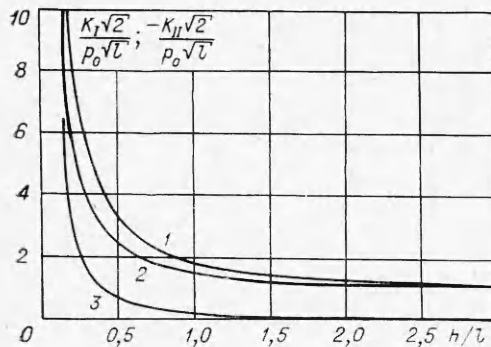
соответствующие граничным условиям (1.3), (1.4), работают до отношения $h/l < 2$ с точностью 1—2%. В работах [3—5] дано полное решение симметричной задачи о трещине в полосе, за исключением случая, когда границы полосы жестко заделаны, т. е. выполнены граничные условия (1.5). Решение в этом случае при $0,5 < h/l < 2$ практически не было определено.

Когда $h_2 \rightarrow \infty$, трещина располагается под границей полупространства. В отличие от симметричного случая здесь не равны нулю оба коэффициента интенсивности напряжения K_I и K_{II} и должна решаться общая система уравнений Фредгольма (2.5), (2.6) при выполнении граничных условий (1.3), (1.4). Если граница полупространства жестко заделана (при $y = h$ и $u = w = 0$), то приходим к системе, аналогичной (2.5):

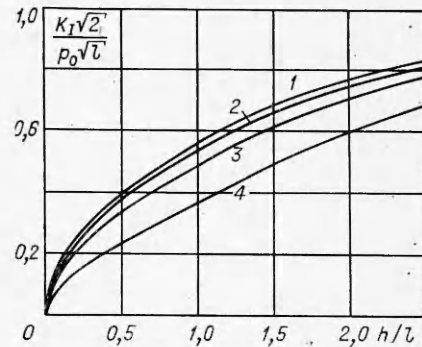
$$(3.4) \quad \begin{aligned} \varphi_0(t) - \int_0^1 \varphi_0(\tau) K_1(\tau, t) d\tau - \int_0^1 \psi_0(\tau) K_2(\tau, t) d\tau &= \sqrt{t}, \\ \psi_0(t) - \int_0^1 \psi_0(\tau) K_3(\tau, t) d\tau - \int_0^1 \varphi_0(\tau) K_4(\tau, t) d\tau &= 0, \\ K_1(\tau, t) &= \sqrt{\tau t} \int_0^\infty s \left[2 \frac{f_1 f_5 + f_4 f_3}{\psi F_0} + 1 \right] J_0(s\tau) J_0(st) ds, \\ K_2(\tau, t) &= \sqrt{\tau t} \int_0^\infty 2 \frac{f_3 - f_1}{F_0} J_0(st) [J_0(s\tau) - J_0(s)] ds, \\ K_3(\tau, t) &= \sqrt{\tau t} \int_0^\infty s \left[2 \frac{f_2 - f_1}{F_0} + 1 \right] J_0(st) [J_0(s\tau) - J_0(s)] ds, \\ K_4(\tau, t) &= \sqrt{\tau t} \int_0^\infty 2s^2 \frac{f_5 f_1 + f_4 f_2}{\psi F_0} J_0(s\tau) J_0(st) ds, \end{aligned}$$

где

$$f_1 = H^2 + \gamma \operatorname{ch}^2 H + (1 - 2\nu)^2; F_0 = \gamma e^{2H};$$



Фиг. 2



Фиг. 3

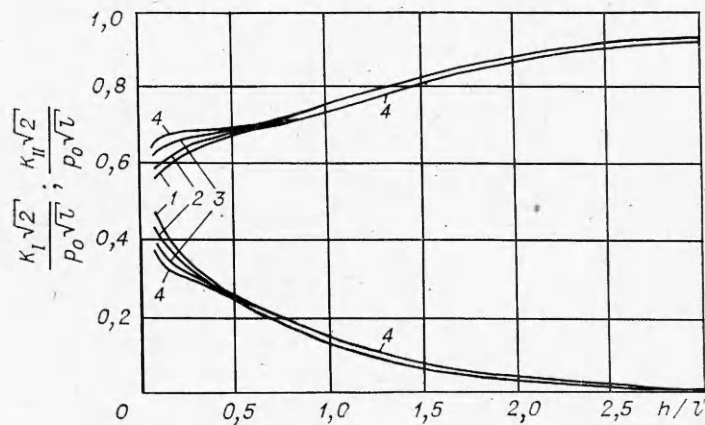
$$f_2 = H - \gamma \operatorname{ch} H \operatorname{sh} H; \quad \psi = H + (1 - 2\nu) - \gamma e^H \operatorname{ch} H;$$

$$f_3 = \gamma \operatorname{ch}^2 H - (1 - 2\nu); \quad f_4 = H + 2(1 - \nu) + \gamma e^H \operatorname{sh} H;$$

$$f_5 = -H - 2(1 - \nu) + \gamma e^H \operatorname{ch} H.$$

Уравнения (2.5), (2.6) (при $h \rightarrow \infty$) и (3.4) считались численно. Результаты расчетов представлены на фиг. 1, 2 и 4. На фиг. 1, 2 кривые 2 и 3 обозначают соответственно $K_{II}\sqrt{2}/\rho_0\sqrt{l}$ и $K_{II}\sqrt{2}/\rho_0\sqrt{l}$. Кривые 1—4 на фиг. 4 изображают $K_I\sqrt{2}/\rho_0\sqrt{l}$ (верхние) и $K_{II}\sqrt{2}/\rho_0\sqrt{l}$ (нижние), посчитанные при $\nu = 0,15; 0,25; 0,35; 0,45$. Как видно из представленных зависимостей на фиг. 4, влияние коэффициента Пуассона ν начинает проявляться при $h/l \leq 0,5$, т. е. только при приближении трещины к границе полупространства.

На фиг. 1 кривые 4, 5 изображают $K_I\sqrt{2}/\rho_0\sqrt{l}$ и $K_{II}\sqrt{2}/\rho_0\sqrt{l}$, посчитанные по уравнениям (2.5) при $h_1 = h$ и $h_2 = 2h$, что соответствует трещине, расположенной в по-



Фиг. 4

лосе шириной $3h$ и отстоящей на $1/3$ ее ширины от верхней границы. Как видно из представленных графиков, при малых значениях h/l ($h/l < 1$) величина отношения $K_{II}\sqrt{2}/\rho_0\sqrt{l}$ меняется незначительно, а величина K_I хорошо описывается формулой

$$K_I = \sqrt{3h/4\pi} \cdot p_0,$$

т. е. ведет себя так же, как и в случае системы параллельных трещин, расположенных друг от друга на одинаковом расстоянии $3h$.

Поступила 22 VI 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Lowengrub M. A two-dimensional crack problem.— «Int. J. Engng Sci.», 1966, vol. 4, N 3.
2. England A. M., Green A. F. Some two-dimensional punch and crack problem in classical elasticity.— «Proc. Cambridge Philos. Soc.», 1963, 59, N 2, p. 489—500.
3. Сметанин Б. И. Некоторые задачи о щелях в упругом клине и слое.— «Инж. журн. МГТ», 1968, № 2.
4. Александров В. М., Сметанин Б. И. Равновесная трещина в слое малой толщины.— ПММ, 1965, № 4.
5. Александров В. М., Сметанин Б. И. О равновесных продольных трещинах в пластинках.— В кн.: VI Всесоюзная конференция по теории оболочек и пластинок. М., «Наука», 1966.
6. Sih G. C., Embley G. T., Ravera R. S. Impact response of a finite crack in plane extension.— «Int. J. Solids and Struct.», 1972, vol. 8, N 7.
7. Рывкин И. М., Градштейн И. С. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., «Наука», 1963.

УДК 539.214

ПЛАСТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ШЕРОХОВАТОЙ ПОВЕРХНОСТИ

М. У. Ушицкий

(Москва)

В некоторых технологических задачах и, в частности, при получении композиционных материалов путем соединения их компонентов в твердом состоянии существенную роль играет процесс образования физического контакта между ними, который сопровождается пластической деформацией микрорельефа на соединяемых поверхностях [1].

Основной модельной задачей об образовании физического контакта является задача о пластическом деформировании шероховатой поверхности идеально пластического тела гладким жестким штампом [2]. Рассмотрим решение этой задачи в условиях плоской деформации, полагая профиль шероховатой поверхности $H(x)$ реализацией стационарного случайного процесса.

Следуя [2], аппроксимируем микрорельеф деформируемой поверхности системой клиньев. Пусть на участке реализации профиля длиной L расположено N таких клиновидных микровыступов. Процесс смятия каждого из них может быть описан в рамках автомодельного решения Хилла [3], в соответствии с которым величина образующейся площадки контакта h_i пропорциональна осадке штампа c и составляет

$$(1) \quad h_i = 2c\varphi_i \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

где $\varphi_i = (1 + \sin \psi_i) \sec \psi_i$, ψ_i — угол центрированного веера поля линий скольжения. При этом величина действующего на клин контактного усилия p_i равна [3]

$$(2) \quad p_i = \sigma_k h_i = 4kc\chi_i \quad (i = 1, 2, \dots, N),$$

где $\sigma_k = 2k(1 + \sin \psi_i)$ — контактное напряжение, определяемое решением Хилла [3]; k — значение предела текучести при сдвиге; $\chi_i = (1 + \sin \psi_i)(1 + \sin \psi_i) \sec \psi_i$.

Воспользуемся соотношениями (1), (2) для построения уравнений, описывающих смятие ансамбля клиновидных микровыступов. Пронумеруем высоты H_i вершин микровыступов на участке реализации L в порядке их возрастания от H_1 до H_N и зафиксируем начальное положение штампа на высоте H_N . Перемещая штамп вниз произвольно малыми ступенями так, чтобы каждому приращению осадки соответствовало смятие не более одного нового микровыступа, определим величину суммарной площадки контакта h . Для этого разобьем область изменения осадки штампа c на N интервалов следующим образом: