

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ТОНКОГО СЛОЯ ГРАНУЛИРОВАННОГО МАТЕРИАЛА, ДВИЖУЩЕГОСЯ ПО НАКЛОННОЙ ПЛОСКОСТИ

Ю. А. Березин, Л. А. Сподарева

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, 630090 Новосибирск

Исследована устойчивость слоя сыпучей среды на наклонной плоскости в рамках модели неньютоновской жидкости с показателем 2, что обеспечивает установленную экспериментально квадратичную зависимость напряжения сдвига от сдвига скоростей. Аналитически и численно показано, что такие течения устойчивы или неустойчивы в зависимости от величины обобщенного числа Рейнольдса по отношению к критическому значению, равному $5 \operatorname{ctg} \alpha$.

Интерес к исследованию законов движения гранулированных (или сыпучих) сред обусловлен их большой распространенностью в природе и различных технологических процессах [1, 2]. Хорошо известно, что в гранулированных быстрых сдвиговых течениях напряжение сдвига пропорционально квадрату скорости сдвига, в связи с чем сыпучие материалы часто рассматривают как неньютоновскую среду.

В [3] нами изучено двумерное течение слоя такого материала со свободной поверхностью, медленно движущегося по шероховатой наклонной плоскости, на основе модели несжимаемой неньютоновской жидкости степени 2. Предположение о медленности движения соответствует пренебрежению инерционными слагаемыми в уравнениях движения. Полученное уравнение для свободной поверхности слоя при малых, но конечных амплитудах сводится к уравнению Бюргера, решения которого устойчивы по отношению к малым возмущениям во всем диапазоне длин волн (или волновых чисел). В случае быстрых течений в уравнениях движения необходимо учитывать слагаемые, соответствующие ускорению потока, что может изменить характер устойчивости. Настоящая статья посвящена изучению именно таких вопросов.

Как и в [3], примем за исходные уравнения

$$\begin{aligned} \rho(u_t + uu_x + vv_y) &= -p_x + \rho g \sin \alpha + (\sigma_{xx})_x + (\tau_{xy})_y, \\ \rho(v_t + uv_x + vv_y) &= -p_y - \rho g \cos \alpha + (\tau_{yx})_x + (\sigma_{yy})_y, \quad u_x + v_y = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Ось x направлена вдоль наклонной плоскости, а ось y — поперек. Сделаем предположение о том, что продольный масштаб L_0 существенно больше поперечного масштаба H_0 ($\varepsilon = H_0/L_0 \ll 1$). Тогда поперечная скорость v значительно меньше продольной u , но $v_y \sim u_x$ (как это следует из уравнения непрерывности), а давление может рассматриваться как гидростатическое. Поскольку поток в основном продольный, то будем учитывать только компоненту напряжения сдвига $\tau_{xy} = \tau_{yx}$, величина которой равна $\mu|u_y|u_y$ (μ — коэффициент динамической вязкости или мера консистенции среды). В результате уравнения (1) приобретают вид

$$u_t + uu_x + vv_y = -p_x/\rho + g \sin \alpha + \nu(|u_y|u_y)_y, \quad p_y = -\rho g \cos \alpha, \quad u_x + v_y = 0. \quad (2)$$

Здесь $\nu = \mu/\rho$; $H = H(x, t)$ — функция, описывающая форму свободной поверхности.

Дополним эти уравнения граничными условиями: $u = v = 0$ на наклонной плоскости при $y = 0$; $p = 0$, $\tau_{xy} = 0$, $H_t + uH_x = v$ на свободной поверхности слоя при $y = H(x, t)$. Так как напряжение сдвига $\tau_{xy} \sim |u_y|u_y$, то равенство нулю τ_{xy} на свободной поверхности эквивалентно равенству $u_y = 0$ при $y = H(x, t)$.

Для анализа системы (2) используем обычную процедуру перехода к уравнениям, проинтегрированным по толщине рассматриваемого слоя, которая подробно изложена, например, в [4] для вязкой ньютоновской жидкости. Соответствующие выкладки с привлечением указанных выше граничных условий дают

$$\begin{aligned} H_t + (H\langle u \rangle)_x &= 0, \\ (H\langle u \rangle)_t + (H\langle u^2 \rangle)_x &= gH(\sin \alpha - H_x \cos \alpha) - \nu u_y^2(0), \end{aligned} \quad (3)$$

где

$$\langle u \rangle = H^{-1} \int_0^H u \, dy, \quad \langle u^2 \rangle = H^{-1} \int_0^H u^2 \, dy.$$

Теперь необходимо связать среднюю продольную скорость с ее средним квадратом. Примем в качестве приближения профиль, подобный стационарному, т. е.

$$u(x, y, t) = u_s [1 - (1 - y/H)^{3/2}], \quad u_s = (2/3)(gH^3 \sin \alpha / \nu)^{1/2},$$

и в результате найдем $\langle u \rangle = 3u_s/5$, $\langle u^2 \rangle = 5\langle u \rangle^2/4$. Подставляя эти выражения в (3), получим искомые уравнения:

$$H_t + Q_x = 0, \quad Q_t + 5(\langle u \rangle Q)_x / 4 = -(g/2)(H^2)_x \cos \alpha + gH \sin \alpha - 25\nu Q^2 / (4H^4). \quad (4)$$

Здесь $Q = \int_0^H u \, dy = \langle u \rangle H$ есть полный расход.

На основе уравнений (4) проведем анализ устойчивости однородного потока $H = H_0$, $Q = Q_0 = (2/5)(gH_0^5 \sin \alpha / \nu)^{1/2}$, $u_0 = Q_0/H_0$ по отношению к бесконечно малым периодическим возмущениям. Для этого запишем $H = H_0 + h$, $Q = Q_0 + q$ ($h \ll H_0$, $q \ll Q_0$), представим возмущения в виде $q, h \sim \exp i(kx - \omega t)$, где $\omega = \omega_r + i\gamma$ — комплексная частота, и используем условие разрешимости системы алгебраических уравнений для амплитуд возмущений. В результате получим дисперсионное уравнение, связывающее частоту с волновым числом k , которое в безразмерных переменных имеет вид

$$\omega^2 - (5/2)(k - 5i/\varepsilon \operatorname{Re})\omega + (5/4)(1 - 5 \operatorname{ctg} \alpha / \operatorname{Re})k^2 - 125 ik / (4\varepsilon \operatorname{Re}) = 0. \quad (5)$$

Здесь в качестве масштабов частоты и волнового числа взяты u_0/L_0 , $1/L_0$ соответственно, а $\operatorname{Re} = H_0^2/\nu$ — аналог числа Рейнольдса для рассматриваемой среды. В длинноволновом приближении ($k \ll 1$) решения уравнения (5) могут быть найдены аналитически. Действительно, представляя частоту в виде разложения по степеням волнового числа $\omega = \omega_0 + k\omega_1 + k^2\omega_2$ и приравнявая отдельно слагаемые при одинаковых степенях k к нулю, получим

$$\omega^{(1)} = 5k/2 + 0,1i\varepsilon(\operatorname{Re} - 5 \operatorname{ctg} \alpha)k^2, \quad \omega^{(2)} = -i[12,5/(\varepsilon \operatorname{Re}) + 0,1\varepsilon(\operatorname{Re} - 5 \operatorname{ctg} \alpha)k^2].$$

Комплексная частота первой гармоники имеет ненулевую вещественную часть, пропорциональную волновому числу, и мнимую часть, пропорциональную квадрату волнового числа. Знак мнимой части зависит от числа Рейнольдса: при $\operatorname{Re} > \operatorname{Re}_* = 5 \operatorname{ctg} \alpha$, инкремент первой гармоники $\gamma^{(1)} \sim (\operatorname{Re} - \operatorname{Re}_*)k^2 > 0$ и при $\operatorname{Re} < \operatorname{Re}_*$ инкремент $\gamma^{(1)} < 0$.

Комплексная частота второй гармоники имеет нулевую вещественную часть и отрицательную мнимую часть. Таким образом, в длинноволновой области первая гармоника распространяется с фазовой скоростью $\omega^{(1)}/k = 5/2$ и неустойчива (устойчива) при $\text{Re} > \text{Re}_*$ ($\text{Re} < \text{Re}_*$), а вторая гармоника не распространяется и затухает (устойчива).

Для произвольных волновых чисел возмущений, разделив вещественную и мнимую части комплексной частоты, из дисперсионного уравнения (5) получим

$$\omega_r = \frac{2,5(\gamma + a)k}{2\gamma + a}, \quad a = \frac{12,5}{\varepsilon \text{Re}}, \quad k^2 = \frac{0,8\gamma(\gamma + a)(2\gamma + a)^2}{(1 - 5 \text{Re}^{-1} \text{ctg } \alpha)(2\gamma + a)^2 - 5\gamma(\gamma + a)}.$$

В пределе при $k \rightarrow 0$ инкременты $\gamma^{(1)} \rightarrow 0$, $\gamma^{(2)} \rightarrow -12,5/(\varepsilon \text{Re})$. Для очень коротких волн предельные значения инкремента γ_1 и декремента γ_2 могут быть определены, если приравнять нулю знаменатель выражения $k^2(\gamma)$. Например, при $\varepsilon = 0,1$, $\alpha = 45^\circ$ имеем

$$\gamma_1 = (62,5/\text{Re})(\sqrt{5 \text{Re}/(\text{Re} + 20)} - 1), \quad \gamma_2 = -(62,5/\text{Re})(\sqrt{5 \text{Re}/(\text{Re} + 20)} + 1).$$

При малых отклонениях числа Рейнольдса от критического значения инкремент первой гармоники равен $(\text{Re} - \text{Re}_*)k^2$. Он монотонно возрастает от нуля до γ_1 с увеличением волнового числа, и инкремент второй гармоники монотонно изменяется от значения $\gamma^{(2)} = -12,5/(\varepsilon \text{Re})$ до γ_2 .

Рассмотрим случай слабой нелинейности. Это означает, что при подстановке $H = H_0 + h$, $Q = Q_0 + q$ в уравнения (4) мы сохраним кроме линейных еще и квадратичные по возмущениям q , h слагаемые, в результате чего получим

$$h_t + q_x = 0,$$

$$\begin{aligned} & q_t + \left(\frac{5Q_0}{2H_0}\right)q_x - \left(\frac{5Q_0^2}{4H_0^2}\right)h_x - g(h \sin \alpha - H_0 h_x \cos \alpha) + \frac{25Q_0^2}{2H_0^2 \text{Re}} \left(\frac{q}{Q_0} - \frac{2h}{H_0}\right) = \\ & = \frac{5Q_0}{2H_0} \left(\frac{q}{Q_0} - \frac{h}{H_0}\right)q_x + \frac{5Q_0^2}{2H_0^2} \left(\frac{q}{Q_0} - \frac{h}{H_0}\right)h_x - gh h_x \cos \alpha - \frac{25Q_0^2}{4H_0^2 \text{Re}} \left(\frac{q^2}{Q_0^2} - \frac{8qh}{Q_0 H_0} + \frac{10h^2}{H_0^2}\right). \end{aligned}$$

Продифференцируем первое уравнение по времени t , второе — по координате x и найдем уравнение

$$\begin{aligned} h_t + c_0 h_x + \frac{2H_0^2 \text{Re}}{25Q_0} [h_{tt} + c_0 h_{xt} + (0,2c_0^2 - gH_0 \cos \alpha)h_{xx}] = \frac{2H_0^2 \text{Re}}{25Q_0} \left[\frac{5}{2H_0} (qq_x)_x - \right. \\ \left. - \frac{5Q_0}{2H_0^2} (qh)_{xx} + \left(\frac{5Q_0^2}{2H_0^3} + g \cos \alpha\right)(hh_x)_x + \frac{25}{2H_0^2 \text{Re}} \left(qq_x - \frac{4Q_0}{H_0} (qh)_x + \frac{10Q_0^2}{H_0^2} hh_x \right) \right], \end{aligned}$$

где $c_0 = 5Q_0/2H_0 = (5/2)u_0$.

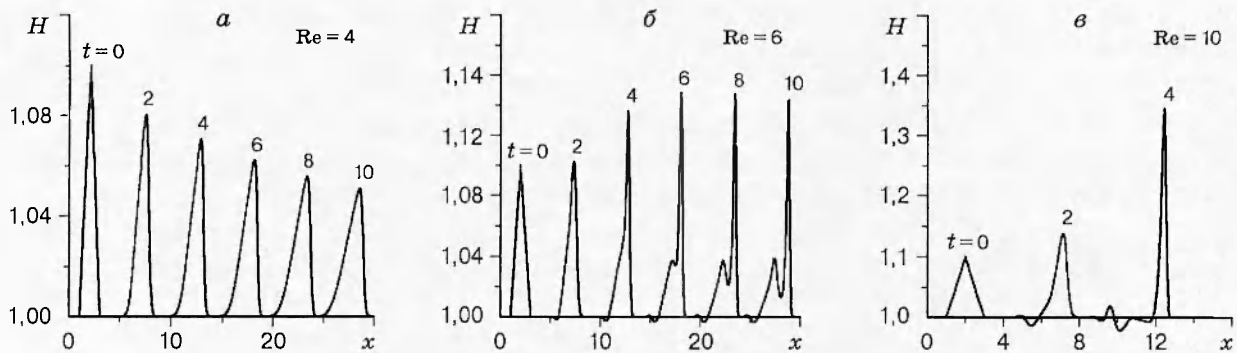
По предположению нелинейность невелика, поэтому можно в нелинейных слагаемых положить $q = c_0 h$, и тогда

$$h_t + c_0 h_x + \left(\frac{3c_0}{2H_0}\right)hh_x + \left(\frac{H_0 \text{Re}}{5c_0}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{c_1 \partial}{\partial x}\right) \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{c_2 \partial}{\partial x}\right) h = \left(\frac{c_0 \text{Re}}{5}\right) \left(\frac{9}{10} + \frac{\text{ctg } \alpha}{\text{Re}}\right) (hh_x)_x.$$

Здесь $c_{1,2} = (c_0/2)(1 \pm \sqrt{1/5 + 4 \text{ctg } \alpha/\text{Re}})$. Делая замену $\partial/\partial t \rightarrow -c_0 \partial/\partial x$ в слагаемых со смешанными производными, что не нарушает порядок точности, получим уравнение

$$h_t + c_0 h_x + \left(\frac{3c_0}{2H_0}\right)hh_x + \frac{c_0 H_0 \text{Re}}{25} \left(1 - 5 \text{ctg } \frac{\alpha}{\text{Re}}\right) h_{xx} = \frac{c_0 \text{Re}}{5} \left(\frac{9}{10} + \text{ctg } \frac{\alpha}{\text{Re}}\right) (hh_x)_x.$$

Последнее слагаемое в левой части соответствует положительной или «отрицательной» вязкости в зависимости от того, меньше или больше число Рейнольдса величины



$Re_* = 5 \operatorname{ctg} \alpha$. Как и в линейном случае, при больших значениях $Re > Re_*$ течение неустойчиво, а при малых $Re < Re_*$ устойчиво. Для изучения нелинейной эволюции пространственно локализованных начальных возмущений численно решали уравнения (3), которые имеют безразмерную форму

$$H_t + Q_x = 0, \quad Q_t + (5/4)((u)Q)_x = -(25 \operatorname{ctg} \alpha / 4 Re) H H_x + (25/4 \epsilon Re)(H - Q^2/H^4).$$

Решение проводилось по явной условно-устойчивой схеме с учетом знака осредненной продольной скорости. Потoki массы и импульса аппроксимируются односторонними, а градиент давления — центральными разностями. В качестве начального возмущения для простоты выбран треугольник высотой $H_1 = 0,1$ и шириной основания $\Delta = 2$ в безразмерных единицах. В начальный момент времени этот треугольник, помещенный на однородном слое с невозмущенной поверхностью $H = 1$, внезапно освобождается, и возмущение начинает, изменяясь по форме, двигаться вдоль слоя. Расчеты выполнены при $\epsilon = 0,1$ и $\alpha = 45^\circ$.

На рисунке представлены профили возвышения свободной поверхности слоя гранулированного материала в зависимости от координаты вдоль наклонной плоскости в различные моменты времени и при разных числах Рейнольдса:

(а) — при числе Рейнольдса меньше критического $Re = 4$ (напомним, что, согласно линейному анализу, критическое значение $Re_* = 5$ при $\alpha = 45^\circ$), начальное возмущение распространяется вниз по потоку с заметным уменьшением амплитуды и увеличением ширины;

(б) — $Re = 6$, с течением времени начальное возвышение теряет симметричную форму и возникает пилообразный профиль;

(в) — изменение начального профиля начинается на более ранних стадиях эволюции ($Re = 10$).

Таким образом, для слоя сухого гранулированного материала, рассматриваемого как неньютоновская жидкость степени 2, движущегося по шероховатой наклонной плоскости, выведены уравнения для формы свободной поверхности и продольного импульса, осредненные по глубине этого слоя. С помощью линейного анализа показано, что бесконечно малые возмущения устойчивы (неустойчивы) при $Re < Re_*$ ($Re > Re_*$). В случае слабой нелинейности задача сведена к одному уравнению для свободной поверхности. С помощью численного решения прослежена эволюция начальных возмущений конечной амплитуды при докритических и сверхкритических числах Рейнольдса.

ЛИТЕРАТУРА

1. Savage S. B. Gravity flow of cohesionless granular materials in chutes and channels // J. Fluid Mech. 1979. V. 92. P. 53–96.

2. **Hutter K., Rajagopal K. R.** On flows of granular materials // *Cont. Mech. Thermodyn.* 1994. V. 4, N 2. P. 82–141.
3. **Березин Ю. А., Сподарева Л. А.** Медленное движение гранулированного слоя по наклонной плоскости // *ПМТФ.* 1998. Т. 39, № 2. С. 117–120.
4. **Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Шрейбер И. Р.** Распространение волн в газо- и парожидкостных средах. Новосибирск: Ин-т теплофизики, 1983.

Поступила в редакцию 3/IV 1997 г.
