

УДК 532.529+541.126

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В СМЕСИ НЕИДЕАЛЬНОГО ГАЗА И МЕЛКИХ ТВЕРДЫХ ЧАСТИЦ ПРИ ВОЗДЕЙСТВИИ МОНОХРОМАТИЧЕСКОГО ИЗЛУЧЕНИЯ

Г. Натх, П. К. Саху

Национальный технологический институт им. М. Неру, 211004 Аллахабад, Уттар-Прадеш, Индия
gn_chaurasia univgkp@yahoo.in, praveensahu173@gmail.com

Исследуется распространение цилиндрической ударной волны в запыленном газе звездной атмосферы при воздействии монохроматического излучения постоянной интенсивности на единицу площади. Газ считается серым и светонепроницаемым, ударная волна — прозрачной. Запыленный газ рассматривается как смесь неидеального газа и мелких твердых частиц. Для определения особенностей распространения ударной волны мелкие твердые частицы рассматриваются как псевдожидкость и условия равновесности принимаются постоянными во всем поле течения жидкости. Исследуется влияние изменения параметров неидеальности газа, массовой концентрации твердых частиц в смеси, отношения плотности твердых частиц к начальной плотности газа и параметра излучения на параметры потока. Установлено, что увеличение параметра неидеальности газа и параметра излучения способствует ослаблению ударных волн, в то время как с ростом отношения плотности твердых частиц к начальной плотности газа интенсивность ударной волны увеличивается. Увеличение параметра неидеальности газа и отношения плотности твердых частиц к начальной плотности газа оказывает противоположное влияние на скорость жидкости, давление и интенсивность ударной волны. Показано, что увеличение параметра излучения приводит к уменьшению параметров течения и интенсивности ударной волны.

Ключевые слова: ударная волна, автомодельное течение, запыленный газ, неидеальный газ, монохроматическое излучение.

DOI 10.15372/FGV20170307

ВВЕДЕНИЕ

В последние годы изучению процессов, происходящих при воздействии радиации на газообразные вещества в недрах звезд, уделялось достаточно много внимания. Благодаря использованию теории размерности Седова [1], появилась возможность анализа некоторых классов автомодельных решений в задачах с возмущенным энерговыделением. Используя методы теории подобия, разработанной в [1], ряд авторов исследовали проблемы взаимодействия излучения с газодинамическими потоками. Одно из решений радиационной газовой динамики с учетом того, что газ является оптически толстым, получено в работе [2]. В работах [3–5] рассмотрены вопросы стационарных или движущихся излучающих стенок, генерирующих головную ударную волну в автомодельном поле течения. В работе

[6] в изотермическом приближении и в предположении прозрачности ударной волны получены автомодельные решения для центральных взрывов в звездах с учетом излучения. В [7] обсуждалась автомодельная задача о движении газа под действием монохроматического излучения. Рассматривался однородный газ в состоянии покоя, занимающий полупространство, ограниченное неподвижной плоской стенкой, и предполагалось, что поток излучения движется через газ в направлении стенки с постоянной интенсивностью на единицу площади. Предполагалось, что с момента прихода излучения на стенку ударная волна распространяется от стенки в направлении, противоположном направлению потока излучения. Поток излучения поглощается в зоне между ударной волной и стенкой и не поглощается в невозмущенной среде. Также предполагалось, что газ сам по себе не излучает. В [8] разработано семейство точных решений одномерных движений газа (плоской, цилиндрической или сферической симметрии) с учетом поглощения

© Nath G., Sahu P. K., 2017.

Department of Mathematics, Motilal Nehru National Institute of Technology Allahabad, 211004 Allahabad, Uttar Pradesh, India.

монохроматического излучения. Распространение цилиндрических ударных волн в идеальном газе во вращающихся или невращающихся средах под действием монохроматического излучения изучалось в работах [9, 10]. В работах [11–14] с помощью автоматических подходов исследовалось влияние магнитного поля на распространение цилиндрических ударных волн под действием монохроматического излучения.

Интерес к ударным волнам в смеси газа и мелких твердых частиц обусловлен многочисленными приложениями: анализ потоков лунного пепла, течений в соплах; изучение различных взрывов в угольных шахтах, бомб, металлизированных ракетных топлив, взрывов подземных, вулканических и космических; сверхзвуковые полеты в загрязненной атмосфере; описание формирования звезд, столкновений комет с планетами; ударно-волновое ускорение частиц, формирование пылевых кристаллов и многие другие инженерные задачи (см. [15–22]). Аналитическое решение для плоского течения запыленного газа с постоянной скоростью ударной волны и движущимся за ней поршнем было получено в работе [23]. Так как объем, занимаемый твердыми частицами, смешанными с идеальным газом, пренебрежимо мал, пыль фактически характеризуется массовой долей, а не объемной. Результаты [23] свидетельствуют о влиянии дополнительной инерции пыли на распространение ударной волны. В работе [15] известное решение для сильного взрыва при мгновенном высвобождении энергии в газе [1, 24] обобщено на случай двухфазного потока смеси идеального газа и мелких твердых частиц, определены ключевые эффекты влияния частиц пыли на распространение сильной ударной волны. Поскольку в работе [15] приняты ненулевые объемные доли твердых частиц в смеси, результаты показывают влияние как уменьшения сжимаемости, так и увеличения инерции смеси [18, 25, 26] на распространение ударной волны.

Во всех упомянутых выше работах при изучении воздействия монохроматического излучения газ считался либо идеальным, либо неидеальным. Влияние малых твердых частиц при воздействии монохроматического излучения не учитывалось. В настоящей работе решение [9] для идеального газа (решение [14] для неидеального газа) обобщается на случай запыленного газа (смеси неидеального газа и мел-

ких твердых частиц), получены автоматические решения для течения за цилиндрической ударной волной, распространяющейся в запыленном газе под действием монохроматического излучения. При этом полагалось, что поток излучения с постоянной интенсивностью j_0 направлен в сторону, противоположную распространению ударной волны. При этом сам газ не излучает, а излучение поглощается только за ударной волной. Рассматривая автоматическое приближение основных уравнений, аналогично [1], можно получить систему обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями на фронте ударной волны. Число Маха ударной волны не является бесконечной величиной. Для того чтобы определить основные особенности распространения ударной волны, мелкие твердые частицы рассматривались как псевдожидкость, а полученная смесь считалась равновесной по температуре и скорости с постоянным отношением теплоемкостей [27]. Теплопроводность и вязкие напряжения смеси газа и мелких твердых частиц предполагались пренебрежимо малыми (как в [15, 16, 25, 26, 18, 28]).

Детально исследуется влияние изменения параметра неидеальности газа \bar{b} , отношения плотности твердых частиц к начальной плотности газа μ_a , массовой концентрации твердых частиц в смеси K_p и параметра излучения ξ . Показано, что увеличение параметров K_p (при $\mu_a = 1$ или $\mu_a = 10$, $\bar{b} = 0$), \bar{b} и ξ оказывает ослабляющее действие на ударную волну, в то время как интенсивность ударной волны возрастает с увеличением параметра K_p (при $\mu_a = 50$ или 10 , $b \neq 0$) и параметра μ_a .

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ И ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

Основные уравнения в эйлеровых координатах одномерного неустановившегося адиабатического и цилиндрически-симметричного течения смеси неидеального газа и мелких твердых частиц под действием монохроматического излучения, в пренебрежении теплопроводностью, вязкостью и излучением среды, можно представить в виде [7, 10, 12, 29]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial r} + \rho \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u \rho}{r} = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} = 0, \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U_m}{\partial t} + u \frac{\partial U_m}{\partial r} - \frac{p}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial r} \right) = \\ = \frac{1}{\rho r} \frac{\partial}{\partial r} (jr), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\frac{\partial j}{\partial r} = Kj, \quad (4)$$

где t и r — независимые временная и пространственная координаты, u — скорость жидкости, j — поток монохроматического излучения на единицу площади на расстоянии r по радиусу в момент времени t , K — коэффициент поглощения, ρ , p , U_m — плотность, давление и внутренняя энергия на единицу массы смеси.

Будем считать, что среда является запыленным газом (смесь неидеального газа и мелких твердых частиц). Уравнение состояния неидеального газа в смеси возьмем в следующем виде [18, 30–33]:

$$p_g = R^* \bar{\rho}_g (1 + b \bar{\rho}_g) T, \quad (5)$$

где p_g и $\bar{\rho}_g$ — парциальное давление и парциальная плотность газа в смеси, T — температура газа (и твердых частиц — в предположении равновесности течения), R^* — удельная газовая постоянная, b — внутренний объем молекул газа. В этом уравнении принимается во внимание отклонение фактического газа от идеального состояния, что обусловлено взаимодействием молекул его компонентов. Считается, что газ все еще настолько разрежен, что тройные, четверные и т. д. столкновения между молекулами пренебрежимо редки, взаимодействие происходит только посредством бинарных столкновений.

Удельный объем твердых частиц предполагается постоянным при изменении температуры и давления. Таким образом, уравнение состояния твердых частиц в смеси имеет простой вид

$$\rho_{sp} = \text{const}, \quad (6)$$

где ρ_{sp} — удельная плотность твердых частиц.

Уравнение состояния смеси неидеального газа и мелких твердых частиц записывается в виде [18, 27, 33]

$$p = \frac{1 - K_p}{1 - Z} [1 + b\rho(1 - K_p)] \rho R^* T, \quad (7)$$

где $K_p = m_{sp}/m$ — массовая доля (концентрация) твердых частиц в смеси, $Z = V_{sp}/V_m$ — их объемная доля, m_{sp} и V_{sp} — общая масса и объем твердых частиц, V_m и m — общий объем и общая масса смеси.

Соотношение между K_p и Z задается формулой [27]

$$K_p = \frac{Z \rho_{sp}}{\rho}. \quad (8)$$

В равновесном течении массовая доля частиц K_p постоянна во всем поле течения. Следовательно, из (8) следует соотношение

$$\frac{Z}{\rho} = \text{const} \quad (9)$$

во всем поле течения. Также справедливо [27]

$$Z = \frac{K_p}{(1 - K_p)\mu + K_p}, \quad (10)$$

где $\mu = \rho_{sp}/\rho_g$ — отношение плотности твердых частиц к плотности газа.

Внутренняя энергия смеси на единицу массы представлена в виде

$$U_m = [K_p c_{sp} + (1 - K_p) c_v] T = c_{vm} T, \quad (11)$$

где c_{sp} — удельная теплоемкость частиц, c_v — теплоемкость газа при постоянном объеме, c_{vm} — удельная теплоемкость смеси при постоянном объеме.

Удельная теплоемкость смеси при постоянном давлении определяется как

$$c_{pm} = K_p c_{sp} + (1 - K_p) c_p, \quad (12)$$

где c_p — удельная теплоемкость газа при постоянном давлении.

Отношение удельных теплоемкостей смеси дается формулой [15, 27]

$$\Gamma = \frac{c_{pm}}{c_{vm}} = \gamma \frac{1 + \delta' \beta' / \gamma}{1 + \delta' \beta'}, \quad (13)$$

где $\gamma = c_p/c_v$, $\delta' = K_p/(1 - K_p)$, $\beta' = c_{sp}/c_v$. Тогда, пренебрегая членом, содержащим $b^2 \rho^2$, получаем [18, 30, 33]

$$\begin{aligned} c_{pm} - c_{vm} &= (1 - K_p)(c_p - c_v) = \\ &= (1 - K_p) R^*. \end{aligned} \quad (14)$$

Следовательно, внутренняя энергия смеси на единицу массы записывается в виде

$$U_m = \frac{p(1-Z)}{(\Gamma-1)\rho[1+b\rho(1-K_p)]}. \quad (15)$$

Считается [7, 10, 12], что коэффициент поглощения K подчиняется зависимости

$$K = K_a \rho^\alpha p^\delta j^q r^s t^l, \quad (16)$$

где коэффициент поглощения излучения перед фронтом ударной волны K_a — размерная постоянная, показатели степени α, δ, q, s, l — рациональные числа.

Рассмотрим расходящуюся цилиндрическую ударную волну, распространяющуюся по покоящейся смеси неидеального газа и мелких твердых частиц с постоянной плотностью. Таким образом, для параметров течения перед фронтом ударной волны (обозначаются индексом a) выполняются равенства

$$u = u_a = 0, \quad \rho = \rho_a = \text{const}. \quad (17)$$

Условия на ударной волне, прозрачной для потока излучения, определяются из законов сохранения массы, импульса и энергии при переходе через скачок, а именно:

$$\rho_a W = \rho_n (W - u_n),$$

$$p_a + \rho_a W^2 = p_n + \rho_n (W - u_n)^2,$$

$$U_{m_a} + \frac{p_a}{\rho_a} + \frac{1}{2} W^2 = U_{m_n} + \frac{p_n}{\rho_n} + \frac{1}{2} (W - u_n)^2,$$

$$\frac{Z_a}{\rho_a} = \frac{Z_n}{\rho_n}, \quad j_a = j_n, \quad (18)$$

где индексом n обозначены условия непосредственно за фронтом ударной волны, $W \left(= \frac{dR}{dt} \right)$ — скорость фронта, R — радиус его поверхности. Тогда из уравнения (18) можно получить условия на скачке:

$$\rho_n = \frac{\rho_a}{\beta}, \quad u_n = (1 - \beta)W,$$

$$p_n = \left[(1 - \beta) + \frac{1}{\gamma M^{*2}} \right] \rho_a W^2, \quad (19)$$

$$Z_n = \frac{Z_a}{\beta}, \quad j_n = j_a,$$

где $M^* = (\rho_a W^2 / \gamma p_a)^{1/2}$ — число Маха ударной волны относительно замороженной скорости звука $(\gamma p_a / \rho_a)^{1/2}$. Отношение плотностей

β ($0 < \beta < 1$) на фронте определяется из квадратного уравнения

$$\begin{aligned} & \beta^2 \left(\frac{\Gamma + 1}{2} \right) - \\ & - \beta \left[\frac{\Gamma}{\gamma M^{*2}} + \left(\frac{\Gamma - 1}{2} \right) \{1 + \bar{b}(1 - K_p)\} + \right. \\ & + Z_a - (\Gamma - 1)\bar{b}(1 - K_p) \left. \right] - \left(\frac{\Gamma - 1}{2} \right) \bar{b}(1 - K_p) - \\ & - \frac{(\Gamma - Z_a)\bar{b}(1 - K_p) + (\Gamma - 1)\bar{b}^2(1 - K_p)^2}{\gamma M^{*2} \{1 + \bar{b}(1 - K_p)\}} = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

где $\bar{b} = b\rho_a$. Для всех значений параметров в физических пределах уравнение (20) дает по два значения $\Gamma, \gamma, M^*, \bar{b}, K_p, Z_a$, из которых только одно имеет физический смысл для рассматриваемой задачи, т. е. находится в пределах $0 < \beta < 1$.

Начальная объемная концентрация твердых частиц определяется по формуле

$$Z_a = \frac{V_{sp}}{V_{ma}} = \frac{K_p}{(1 - K_p)\mu_a + K_p}, \quad (21)$$

где $\mu_a = \rho_{sp} / \rho_{ga}$ — отношение плотности твердых частиц к начальной удельной плотности газа.

Размерный постоянный коэффициент K_a в уравнении (16) взят в виде [14]

$$[K_a] = M^{-\alpha - \delta - q} L^{3\alpha + \delta - s - 1} T^{2\delta + 3q - l}. \quad (22)$$

Следуя подходу Седова [1], примем условия, при которых поставленная задача имеет автомодельное решение. Размерными константами в этой задаче являются ρ_a, p_a, j_a и K_a . Первые три из них связаны соотношением

$$j_a = p_a^{3/2} \rho_a^{-1/2}. \quad (23)$$

Для выполнения условия автомодельности коэффициент поглощения излучения K_a должен зависеть от размерности величин j_a, ρ_a , что эквивалентно $s + l = -1$.

Автомодельная безразмерная независимая переменная η берется в виде $\eta = r/R$, где

$$R = \bar{\beta} j_a^{1/3} \rho_a^{1/3} t. \quad (24)$$

Константа $\bar{\beta}$ выбирается такой, чтобы соблюдалось $\eta = 1$ на поверхности ударной волны [7, 9, 14].

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ АВТОМОДЕЛЬНОСТИ

Зельдович и Райзер [34] показали, что уравнения газодинамики допускают преобразования подобия и возможны различные течения, которые подобны друг другу и выводимы одно из другого при изменении основных масштабов длины, времени и плотности. Само течение может быть описано в общем виде через функции двух переменных r и t : $u(r, t)$, $\rho(r, t)$, $p(r, t)$ и $j(r, t)$. Эти функции также содержат параметры из начальных и граничных условий задачи (и параметра адиабаты γ). Тем не менее существуют течения, отличительным свойством которых является сходство самих течений. Такие течения называются автомодельными [1, 34]. В автомодельных течениях распределение любого параметра потока (как функции координаты), например давления p , развивается со временем таким образом, что только масштаб давления $\Pi(t)$ и длина шкалы $R(t)$ области меняются при движении, но форма распределения давления остается неизменной. Кривые $p(r)$, соответствующие различным моментам времени t , можно построить теми же самыми путями — растягиванием либо сжатием масштабов Π и R . Функция $p(r, t)$ может быть записана в виде

$$p(r, t) = \Pi(t)P(r/R),$$

где размерные масштабы Π и R зависят от времени и отношение $p/\Pi = P(r/R)$ является «универсальной» (в том смысле, что не зависит от времени) функцией новой безразмерной координаты $\eta = r/R$. Умножая переменные $P(r/R)$ и η на масштабирующие функции $\Pi(t)$ и $R(t)$, можно получить из универсальной функции $P(\eta)$ истинное распределение давления $p(r)$ как функцию координаты в любой момент времени t . Другие параметры течения — плотность, скорость и поток монохроматического излучения выражаются аналогичным образом. Для автомодельных течений система газодинамических уравнений в частных производных (1)–(4) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для новых неизвестных функций от переменной подобия η .

Давление, плотность, скорость и масштабы длины не все являются независимыми друг от друга параметрами. Если в качестве базовых масштабов выбрать R и ρ_a , то величина $\frac{dR}{dt} = W$ может служить масштабом скорости,

а $\rho_a W^2$ — масштабом давления. Это не ограничивает общности нашего решения, так как шкала определена только с точностью до числового множителя, который всегда может быть включен в новую неизвестную функцию. Для получения подобия решений параметры поля течения, описывающие структуру потока, запишем в следующем виде [11, 12, 14]:

$$\begin{aligned} u &= WV(\eta), \quad \rho = \rho_a G(\eta), \quad p = \rho_a W^2 P(\eta), \\ j &= j_a J(\eta), \quad Z = Z_a G(\eta), \end{aligned} \quad (25)$$

где V , G , P , J — новые безразмерные функции переменной подобия η , в терминах которой формулируются дифференциальные уравнения. Переменная η принимает значение 1 на фронте ударной волны и η_p на поршне.

С помощью преобразования подобия (25) систему определяющих уравнений (1)–(4) можно преобразовать в систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$G'\eta(V - \eta) + G(V'\eta + V) = 0, \quad (26)$$

$$(V - \eta)V' + \frac{P'}{G} = 0, \quad (27)$$

$$\begin{aligned} (V - \eta)[\bar{b}PG^2G'(1 - K_p)\{Z_a + \bar{b}(1 - K_p)\} - \\ - \Gamma PG'\{1 + \bar{b}G(1 - K_p)\}^2] + \\ + P'G(V - \eta)(1 - Z_a G)\{1 + \bar{b}G(1 - K_p)\} = \\ = \frac{(\Gamma - 1)G\{1 + \bar{b}G(1 - K_p)\}^2}{\eta\gamma^{3/2}M^{*3}}(\eta J' + J), \end{aligned} \quad (28)$$

$$J' = \xi(\gamma^{3/2}M^{*3})^{-q}\eta^s G^\alpha P^\delta J^{q+1}, \quad (29)$$

где

$$\xi = K_a \rho_a^{\alpha+\delta+q} W^{2\delta+3q+s+1} \quad (30)$$

— константа, выбранная в качестве параметра, характеризующего взаимодействие между газом и падающим потоком излучения [7, 10, 12].

Решая систему дифференциальных уравнений (26)–(29) для $\frac{dV}{d\eta}$, $\frac{dG}{d\eta}$, $\frac{dP}{d\eta}$ и $\frac{dJ}{d\eta}$, получаем

$$V' = \frac{1}{\eta L} \left[\bar{b} P G^3 V (1 - K_p) \{Z_a + \bar{b}(1 - K_p)\} - \right. \\ \left. - P G V \Gamma \{1 + \bar{b} G (1 - K_p)\}^2 + \right. \\ \left. + \frac{(\Gamma - 1) G \{1 + \bar{b} G (1 - K_p)\}^2}{\gamma^{3/2} M^{*3}} (\eta J' + J) \right], \quad (31)$$

$$G' = \frac{G(V'\eta + V)}{\eta(\eta - V)}, \quad (32)$$

$$P' = G(\eta - V)V', \quad (33)$$

$$J' = \xi(\gamma^{3/2} M^{*3})^{-q} \eta^s G^\alpha P^\delta J^{q+1}, \quad (34)$$

где

$$L = P G \Gamma \{1 + \bar{b} G (1 - K_p)\}^2 - \\ - (V - \eta)^2 G^2 (1 - Z_a G) \{1 + \bar{b} G (1 - K_p)\} - \\ - \bar{b} P G^3 (1 - K_p) \{Z_a + \bar{b}(1 - K_p)\}.$$

Условия на ударной волне (19) преобразуются в следующие:

$$V(1) = (1 - \beta), \quad G(1) = \frac{1}{\beta}, \quad (35)$$

$$P(1) = (1 - \beta) + \frac{1}{\gamma M^{*2}}, \quad J(1) = 1.$$

За ударной волной на внутренней граничной поверхности поля течения (поршне) выполняется условие равенства нормальной скорости жидкости на поверхности и скорости поверхности. Это кинематическое условие из уравнения (25) можно записать в виде

$$V(\eta_p) = \eta_p, \quad (36)$$

где η_p — значение η на внутренней граничной поверхности.

Нормализуя параметры потока u , ρ , Z , p , j по их соответствующим значениям на фронте ударной волны, получаем

$$\frac{u}{u_n} = \frac{V(\eta)}{V(1)}, \quad \frac{\rho}{\rho_n} = \frac{Z}{Z_n} = \frac{G(\eta)}{G(1)}, \quad (37)$$

$$\frac{p}{p_n} = \frac{P(\eta)}{P(1)}, \quad \frac{j}{j_n} = \frac{J(\eta)}{J(1)}.$$

РЕЗУЛЬТАТЫ И ОБСУЖДЕНИЕ

Система дифференциальных уравнений (31)–(34) с граничными условиями (35) и (36) интегрировалась численно методом Рунге — Кутты четвертого порядка, определялись распределения параметров в поле течения за фронтом ударной волны. Значения параметров инертной смеси (оксида алюминия Al_2O_3 или стекла) принимались в следующих пределах: размер частиц пыли $1 \div 10$ мкм [16, 35], плотность материала твердых частиц $\rho_{sp} = 2.5$ г/см³, массовая доля (концентрация) твердых частиц $K_p = 0 \div 0.4$. Этот случай может быть реализован в потоке воздуха с суспензией частиц оксида алюминия и стекла. Для численного интегрирования принимались следующие [7, 10, 11, 14, 15, 18, 25, 36] значения констант: $\gamma = 1.4$; $\beta' = 1$; $\alpha = -1/2$; $q = 0$; $s = 1$; $\delta = 3/2$; $M^{*2} = 25$; $K_p = 0, 0.2, 0.4$; $\mu_a = 1, 10, 50$; $\bar{b} = 0, 0.05, 0.1$; $\xi = 0.01, 0.1, 10, 100$. Значения $\gamma = 1.4$, $\beta' = 1$ могут соответствовать смеси воздуха и частиц стекла [23], $K_p = 0$, $\bar{b} = 0$ — совершенному газу, $K_p = 0$ — отсутствию пыли. Число Маха ударной волны $M^* = 5$ можно считать приемлемым, потому что мы рассматриваем поток псевдожидкости (мелких твердых частиц) и неидеального газа при скоростном и температурном равновесии.

Схема GPR успешно применялась для решения сложных взаимодействий ударных волн в чистых газах (см, например, [37–40]). В этих работах установлено хорошее согласие численных решений с экспериментальными данными, и тем самым подтверждена достоверность численных решений, полученных для рассмотренных случаев. Мы отсылаем читателя к работе [40], где представлен детальный обзор принципов схемы GPR и ее гидродинамических реализаций.

В работе [41] регистрировалась временная история ударной волны. Она инициировалась в секции вертикальной ударной трубы с чистым газом, затем взаимодействовала с запыленным газом и затухала в смеси до тех пор, пока не устанавливалась равновесная скорость ударной волны. Получено хорошее согласие экспериментальных результатов с численными расчетами методом случайного выбора.

В нашем случае течение происходит в двухфазной среде под действием монохроматического излучения. К сожалению, нам неизвестны экспериментальные результаты, кото-

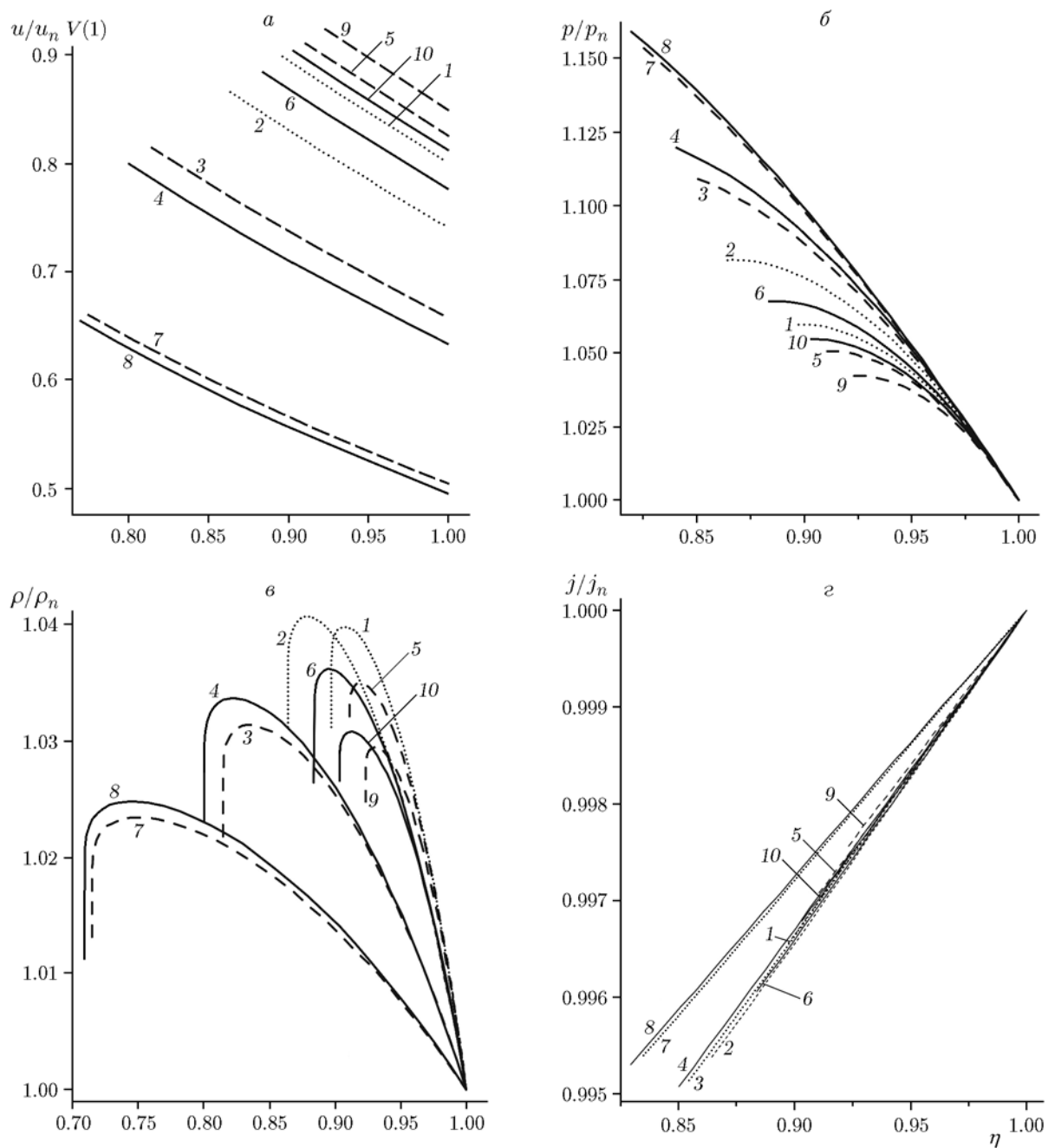


Рис. 1. Распределения приведенных параметров течения в области за фронтом ударной волны: скорости $u/u_n V(1)$ (*a*), давления p/p_n (*б*), плотности ρ/ρ_n (*в*), потока излучения j/j_n (*г*):

1 — $K_p = 0$, $\bar{b} = 0$; 2 — $K_p = 0$, $\bar{b} = 0.1$; 3 — $K_p = 0.2$, $\mu_a = 1$, $\bar{b} = 0$; 4 — $K_p = 0.2$, $\mu_a = 1$, $\bar{b} = 0.1$; 5 — $K_p = 0.2$, $\mu_a = 50$, $\bar{b} = 0$; 6 — $K_p = 0.2$, $\mu_a = 50$, $\bar{b} = 0.1$; 7 — $K_p = 0.4$, $\mu_a = 1$, $\bar{b} = 0$; 8 — $K_p = 0.4$, $\mu_a = 1$, $\bar{b} = 0.1$; 9 — $K_p = 0.4$, $\mu_a = 50$, $\bar{b} = 0$; 10 — $K_p = 0.4$, $\mu_a = 50$, $\bar{b} = 0.1$; пунктирные линии — незапыленный газ [14], штриховые — смесь идеального газа и мелких твердых частиц, сплошные — смесь неидеального газа и мелких твердых частиц

Таблица 1

Отношение плотностей на ударной волне β
и положение внутренней границы поверхности η_p
при различных значениях K_p, μ_a, \bar{b}

K_p	Γ	μ_a	Z_a	\bar{b}	β	η_p				
0	1.4	—	0	0	0.2	0.897344				
				0.05	0.234135	0.878622				
				0.1	0.259555	0.864486				
0.2	1.32	1	0.2	0	0.342857	0.814938				
				0.05	0.355860	0.807255				
				0.1	0.367533	0.800298				
				0	0.191469	0.901611				
				0.05	0.217078	0.887664				
				0.1	0.237133	0.876629				
		10	0.0243902	0	0	0.174732	0.910660			
					0.05	0.202648	0.895577			
					0.1	0.223904	0.883970			
					50	0.00497512	0	0	0.495918	0.715198
								0.05	0.500386	0.712271
								0.1	0.504673	0.709449
1	0.4	0	0	0.194579				0.899509		
			0.05	0.210790				0.890694		
			0.1	0.224459				0.883210		
			10	0.0625	0	0	0.150524	0.923262		
						0.05	0.171411	0.912130		
						0.1	0.187857	0.903300		
50	0.0131579	0				0	0.150524	0.923262		
						0.05	0.171411	0.912130		
						0.1	0.187857	0.903300		

Примечание. $\alpha = -1/2, q = 0, s = 1, \delta = 3/2, \xi = 0.1, M^* = 5, \gamma = 1.4, \beta' = 1$.

рые можно использовать в качестве ориентира. Мы обобщаем решение [9] для идеального газа (решение [14] для неидеального газа) на случай запыленного газа (смесь неидеального газа и мелких твердых частиц). На рис. 1 кривая 1 соответствует случаю идеального незапыленного газа [9], а кривая 2 — случаю неидеального незапыленного газа, т. е. кривая 1 представляет решение, полученное в работе [9], а кривые 1 и 2 — решение из работы [14]. Эти кривые хорошо согласуются между собой.

В табл. 1 показано изменение отношения плотностей на ударном фронте $\beta (= \rho_a/\rho_n)$ и положения внутренней граничной поверхности η_p при различных значениях K_p, μ_a, \bar{b} и при

Таблица 2

Отношение плотностей на ударной волне β
и положение внутренней граничной поверхности η_p
при различных значениях \bar{b}, ξ

\bar{b}	β	ξ	η_p
0	0.191469	0.01	0.901613
		0.1	0.901611
		10	0.901416
		100	0.900906
0.05	0.217078	0.01	0.887667
		0.1	0.887664
		10	0.887430
		100	0.886899

Примечание. $\alpha = -1/2, q = 0, s = 1, \delta = 3/2, \xi = 0.1, M^* = 5, \gamma = 1.4, \beta' = 1, K_p = 0.2, \mu_a = 10, \Gamma = 1.32, Z_a = 0.0243902$.

$\gamma = 1.4, \beta' = 1, \alpha = -1/2, q = 0, s = 1, \delta = 3/2, M^{*2} = 25, \xi = 0.1$, а в табл. 2 — при различных значениях ξ, \bar{b} и при $\gamma = 1.4, \beta' = 1, \alpha = -1/2, q = 0, s = 1, \delta = 3/2, M^{*2} = 25, K_p = 0.2, \mu_a = 10$.

Изменения параметров течения — скорости u/u_n , давления p/p_n , плотности ρ/ρ_n , потока излучения j/j_n в зависимости от автомодельной переменной η показаны на рис. 1 при различных значениях K_p, μ_a, \bar{b} , а на рис. 2 — при различных значениях ξ и \bar{b} . Видно, что $u/u_n, p/p_n$ возрастают, а j/j_n уменьшается, в то время как ρ/ρ_n возрастает и начинает уменьшаться вблизи внутренней граничной поверхности после достижения максимума по мере продвижения от фронта ударной волны к внутренней граничной поверхности.

Эффект от увеличения отношения плотности твердых частиц к начальной плотности газа μ_a проявляется в следующем:

(I) значение β уменьшается, т. е. интенсивность ударной волны возрастает (см. табл. 1);
(II) параметр η_p возрастает, т. е. уменьшается расстояние от фронта ударной волны до внутренней граничной поверхности. Это значит, что увеличение отношения удельной плотности твердых частиц к начальной удельной плотности газа повышает интенсивность ударной волны, так же как в п. (I) (см. табл. 1);
(III) параметры потока $u/u_n, \rho/\rho_n$ возрастают, но уменьшается параметр p/p_n в любой точке

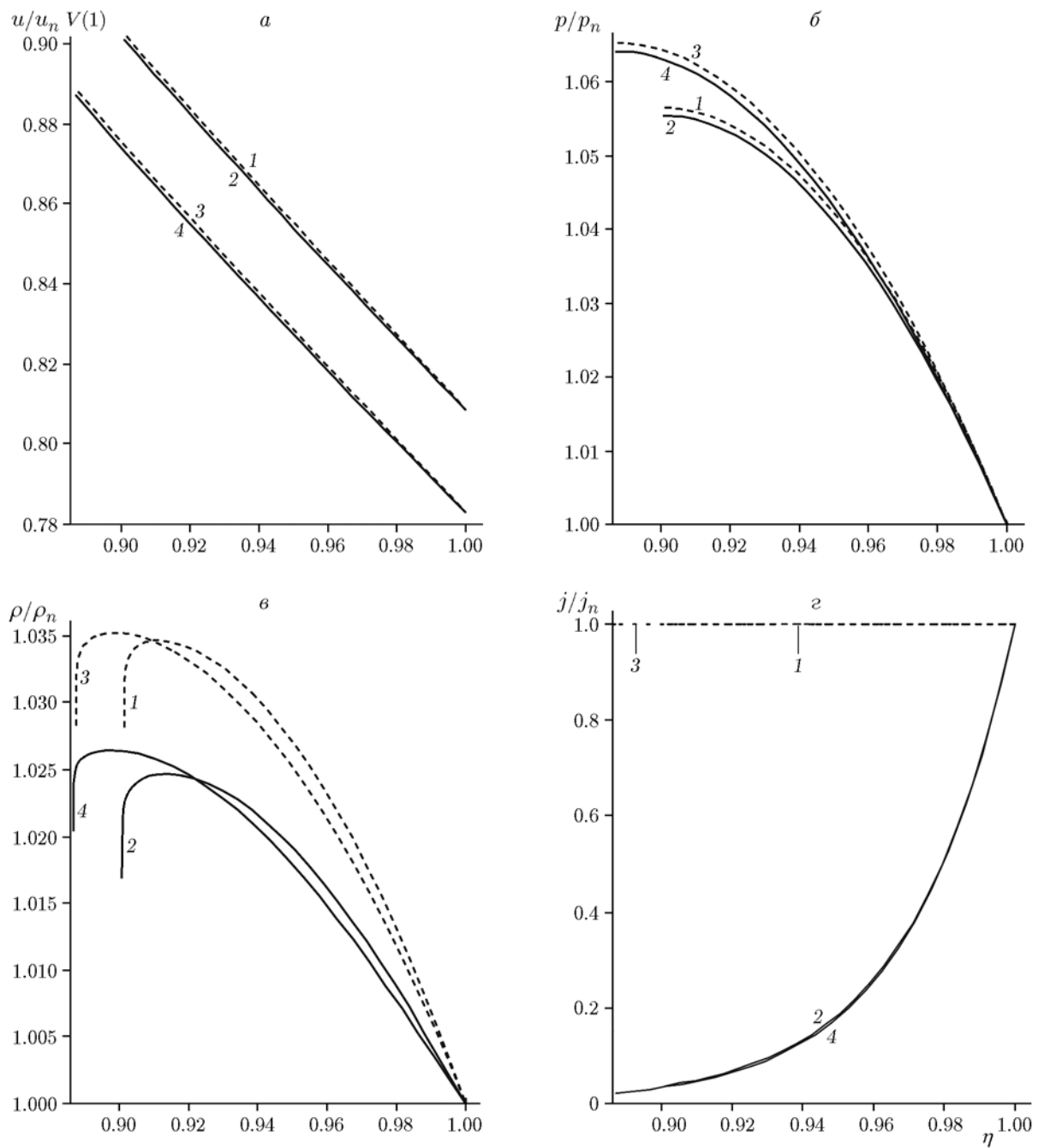


Рис. 2. Распределение приведенных параметров течения в области за фронтом ударной волны: скорости $u/u_n V(1)$ (а), давления p/p_n (б), плотности ρ/ρ_n (в), потока излучения j/j_n (г):

1 — $K_p = 0.2$, $\bar{b} = 0$, $\xi = 0.01$; 2 — $K_p = 0.2$, $\bar{b} = 0$, $\xi = 100$; 3 — $K_p = 0.2$, $\bar{b} = 0.05$, $\xi = 0.01$; 4 — $K_p = 0.2$, $\bar{b} = 0.05$, $\xi = 100$; штриховые линии — смесь идеального газа и мелких твердых частиц, сплошные — смесь неидеального газа и мелких твердых частиц

поля течения за фронтом ударной волны (см. рис. 1,а-в);

(IV) переменная потока j/j_n уменьшается, но возрастает при $K_p = 0.2$, $\bar{b} = 0$ (см. рис. 1,г).

Указанные эффекты сильнее выражены при высоких значениях K_p . Их можно физически интерпретировать следующим образом. При увеличении μ_a (при постоянном K_p) значительно снижается Z_a , т. е. объемная доля твердых частиц в невозмущенной среде становится очень малой. Это приводит к большему сжатию смеси в области между фронтом ударной волны и внутренней граничной поверхностью, что проявляется в указанных эффектах.

Влияние увеличения параметра неидеальности газа \bar{b} проявляется в следующем:

(I) значение β возрастает, т. е. интенсивность ударной волны уменьшается (см. табл. 1 и 2);
 (II) расстояние от фронта ударной волны до внутренней граничной поверхности возрастает, т. е. течение за фронтом становится более разреженным. В результате, как и в п. (I), снижается интенсивность ударной волны (см. табл. 1 и 2);

(III) уменьшается параметр u/u_n , но увеличивается p/p_n в любой точке поля течения за фронтом ударной волны (см. рис. 1,а,б и 2,а,б);
 (IV) плотность ρ/ρ_n уменьшается вблизи фронта ударной волны, но возрастает вблизи внутренней расширяющейся поверхности, при этом она возрастает и при $\mu_a = 1$, $\xi = 0.1$ (см. рис. 1,в и 2,в);

(V) уменьшается поток излучения j/j_n , но он увеличивается при $\mu_a = 1$ и $\xi = 0.1$ (см. рис. 1,г и 2,г).

Таким образом, неидеальность газа обуславливает ослабление ударной волны и значительно влияет на параметры поля течения за ударной волной. Фактически, увеличение параметра неидеальности газа \bar{b} уменьшает сжимаемость газа, что выражается в эффектах (I) и (II).

Эффект от увеличения массовой концентрации твердых частиц K_p в смеси проявляется в следующем:

(I) значение β уменьшается, т. е. увеличивается интенсивность ударной волны, в то же время при $\mu_a = 1$ или при $\mu_a = 10$ и $\bar{b} = 0$ отношение теплоемкостей β увеличивается (интенсивность ударной волны уменьшается, см. табл. 1);

(II) параметр η_p уменьшается при $\mu_a = 1$ или при $\mu_a = 10$ и $\bar{b} = 0$, т. е. интенсивность

ударной волны снижается, в то время как при $\mu_a = 10$, $\bar{b} \neq 0$ или при $\mu_a = 50$ наблюдается противоположное поведение, так же как в п. (I) (см. табл. 1);

(III) параметр u/u_n уменьшается при $\mu_a = 1$, но возрастает при $\mu_a = 50$ в любой точке поля течения за фронтом ударной волны, в то время как параметр p/p_n ведет себя противоположным образом (см. рис. 1,а,б);

(IV) параметр ρ/ρ_n уменьшается, но всегда возрастает параметр j/j_n в любой точке поля течения за фронтом ударной волны (см. рис. 1,в,г).

Физическая интерпретация этих эффектов может быть представлена следующим образом. В случае $\mu_a = 1$ мелкие твердые частицы плотностью, равной плотности идеального (или неидеального) газа, занимают значительную часть объема смеси, что существенно снижает сжимаемость среды. Увеличение K_p дополнительно уменьшает сжимаемость, что приводит к увеличению расстояния между фронтом ударной волны и внутренней расширяющейся поверхностью, уменьшению интенсивности ударной волны и вышеуказанному поведению параметров течения. Подобные эффекты могут быть получены и при $\mu_a = 10$.

В случае $\mu_a = 50$ мелкие твердые частицы плотностью, в 50 раз большей, чем плотность идеального (или неидеального) газа, занимают в смеси очень малую часть объема, следовательно, сжимаемость снижается незначительно, но инерция смеси значительно возрастает из-за загрузки частиц. Увеличение K_p от 0.2 до 0.4 при $\mu_a = 50$ означает, что идеальный (или неидеальный) газ в смеси, составлявший 80 % общей массы и занимавший 99.50 % общего объема, теперь составляет 60 % общей массы и занимает 98.68 % общего объема. Благодаря этому плотность идеального (или неидеального) газа в смеси сильно снижается, что перекрывает эффект несжимаемости смеси и в конечном счете ведет к небольшому уменьшению расстояния между поршнем и фронтом ударной волны, увеличению интенсивности ударной волны и обуславливает вышеуказанные особенности параметров течения.

Эффект от увеличения параметра излучения ξ проявляется в следующем:

(I) уменьшается η_p , т. е. падает интенсивность ударной волны (см. табл. 2);

(II) снижаются значения параметров u/u_n , p/p_n , ρ/ρ_n и j/j_n в любой точке поля течения

за фронтом ударной волны (см. рис. 2).

Указанные эффекты показывают, что монокроматическое излучение больше поглощается газом в поле течения за ударной волной при увеличении параметра излучения ξ .

ВЫВОДЫ

В настоящей работе получены автомодельные решения для задачи распространения цилиндрической ударной волны в запыленном газе (смесь неидеального или идеального газа и мелких твердых частиц) под действием монокроматического излучения. Исследованы эффекты изменения параметров: неидеальности газа \bar{b} , массовой концентрации твердых частиц в смеси K_p , отношения плотности твердых частиц к начальной плотности газа μ_a и параметра излучения ξ . Работа касается задачи о взрыве, однако методология и анализ, представленные здесь, могут быть использованы для описания многих других физических систем, связанных нелинейными гиперболическими уравнениями в частных производных. Приведенные примеры проясняют характер ударных волн в запыленных средах и служат, в основном, иллюстрацией того, как могут быть описаны ударные волны в запыленной среде. В действительности, в астрофизике могут иметь значение и многие другие процессы, и требуется более глубокий анализ ударных волн. Ударно-волновые процессы в запыленном газе важны для описания взрывов сверхновых, а также изучения звездных вспышек галактик, ядерных взрывов, разрывов сосудов под давлением, взрывов в ионосфере и т. д. Кроме того, применение результатов этого исследования возможно также при анализе данных сверхзвуковых полетов в загрязненной атмосфере, в экспериментах по взрыву проволочек в запыленной среде и при решении цилиндрически-симметричных задач гиперзвукового обтекания, связанных с метеорами или возвращаемыми аппаратами [42], а также при исследовании астрофизической плазмы [17, 43]. Насколько нам известно, в литературе нет доступных данных экспериментов или наблюдений, относящихся к теме настоящей работы, поэтому пока невозможно провести соответствующие сравнения.

По результатам данной работы можно сделать следующие выводы.

- Интенсивность ударной волны уменьшается, а расстояние между фронтом ударной

волны и внутренней граничной поверхностью возрастает с увеличением параметра неидеальности газа \bar{b} и параметра излучения ξ , в то время как противоположное поведение наблюдается при увеличении отношения плотности твердых частиц к начальной плотности газа.

- Массовая концентрация твердых частиц в смеси K_p оказывает такое же влияние на интенсивность ударной волны, как \bar{b} и ξ , при $\mu_a = 1$ или при $\mu_a = 10$ и $\bar{b} = 0$. При $\mu_a = 10$ и $\bar{b} \neq 0$ или при $\mu_a = 50$ параметры K_p и μ_a одинаково влияют на интенсивность ударной волны.

- Увеличение параметра неидеальности газа \bar{b} приводит к увеличению параметров течения p/p_n , ρ/ρ_n , j/j_n при $\mu_a = 1$, но к уменьшению параметров u/u_n , ρ/ρ_n , j/j_n при $\mu_a = 50$.

- Увеличение параметра неидеальности газа \bar{b} и массовой концентрации твердых частиц в смеси K_p обуславливает такое же, как в вышеприведенном пункте, поведение параметров течения u/u_n , p/p_n и j/j_n при $\mu_a = 1$, но противоположное поведение при $\mu_a = 50$. Увеличение K_p и \bar{b} оказывает такое же воздействие на ρ/ρ_n при $\mu_a = 50$, но противоположное при $\mu_a = 1$.

- Увеличение параметра неидеальности газа \bar{b} и отношения плотности твердых частиц к начальной плотности газа μ_a противоположным образом действует на параметры течения u/u_n и p/p_n .

- Увеличение параметра излучения ξ приводит к уменьшению параметров течения u/u_n , p/p_n , ρ/ρ_n , j/j_n и интенсивности ударной волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sedov L. I. Similarity and Dimensional Methods in Mechanics. — New York: Academic Press, 1959.
2. Elliott L. A. Similarity methods in radiation hydrodynamics // Proc. Roy. Soc. Lond. Ser. A. — 1996. — V. 258. — P. 287–301.
3. Wang K. C. The piston problem with thermal radiation // J. Fluid Mech. — 1964. — V. 20. — P. 447–455.
4. Helliwell J. B. Self-similar piston problems with radiative heat transfer // J. Fluid Mech. — 1969. — V. 37. — P. 497–512.
5. NiCastro J. R. Similarity analysis of the radiative gas dynamic equations with spherical symmetry // Phys. Fluids. — 1970. — V. 13. — P. 2000–2006.

6. **Deb Ray G., Bhowmick J. B.** Similarity solutions for expansions in stars // *Ind. J. Pure Appl. Math.* — 1976. — V. 7. — P. 96–103.
7. **Khudyakov V. M.** The self-similar problem of the motion of a gas under the action of monochromatic radiation // *Soviet. Phys. Dokl.* — 1983. — V. 28. — P. 853–855. — (Trans. Amer. Inst. of Phys.).
8. **Zheltukhin A. N.** A family of exact solutions of the equations of the onedimensional motion of a gas under the influence of monochromatic radiation // *J. Appl. Math. Mech.* — 1988. — V. 52. — P. 262–263.
9. **Nath O., Takhar H. S.** Propagation of cylindrical shock waves under the action of monochromatic radiation // *Astrophys. Space Sci.* — 1990. — V. 166. — P. 35–39.
10. **Nath O.** Propagation of cylindrical shock waves in a rotating atmosphere under the action of monochromatic radiation // *IL Nuovo Cimento. D.* — 1998. — V. 20. — P. 1845–1852.
11. **Nath O.** A study of self-similar cylindrical MHD shock waves in monochromatic radiation // *Astrophys. Space Sci.* — 1989. — V. 155. — P. 163–167.
12. **Nath O., Takhar H. S.** Spherical MHD shock waves under the action of monochromatic radiation // *Astrophys. Space Sci.* — 1993. — V. 202. — P. 355–362.
13. **Shinde S.** Propagation of cylindrical shock waves in a non-uniform rotating stellar atmosphere under the action of monochromatic radiation and gravitation // *Math. Comput. Appl.* — 2006. — V. 11. — P. 95–102.
14. **Vishwakarma J. P., Pandey V. K.** Self-similar flow under the action of monochromatic radiation behind a cylindrical MHD shock in a non-ideal gas // *Appl. Math.* — 2012. — V. 2. — P. 28–33.
15. **Pai S. I., Menon S., Fan Z. Q.** Similarity solution of a strong shock wave propagation in a mixture of a gas and dust particles // *Intern. J. Eng. Sci.* — 1980. — V. 18. — P. 1365–1373.
16. **Higashino F., Suzuki T.** The effect of particles on blast wave in a dusty gas // *Z. Naturforsch.* — 1980. — Bd 35a. — S. 1330–1336.
17. **Popel S. I., Gisko A. A.** Charged dust and shock phenomena in the solar system // *Non-linear. Process Geophys.* — 2006. — V. 13. — P. 223–229.
18. **Vishwakarma J. P., Nath G.** A self-similar solution of shock propagation in a mixture of a non-ideal gas and small solid particles // *Meccanica.* — 2009. — V. 44. — P. 239–254.
19. **Igra O., Hu G., Falcovitz J., Wang B. Y.** Shock wave reflection from a wedge in a dusty gas // *Intern. J. Mult. Flow.* — 2004. — V. 30. — P. 1139–1169.
20. **Sommerfeld M.** The unsteadiness of shock waves propagating through gasparticle mixtures // *Exper. Fluids.* — 1985. — V. 3. — P. 197–206.
21. **Elperin T., Ben-Dor G., Igra O.** Head-on collision of normal shock waves in dusty gases // *Intern. J. Heat Fluid Flow.* — 1987. — V. 8. — P. 303–312.
22. **Miura H.** Decay of shock waves in a dusty-gas shock tube // *Fluid Dyn. Res.* — 1990. — V. 6. — P. 251–259.
23. **Miura H., Glass I. I.** Development of the flow induced by a piston moving impulsively in a dusty gas // *Proc. Roy. Soc. Lond. A.* — 1985. — V. 397. — P. 295–309.
24. **Коробейников В. П.** Задачи теории точечного взрыва в газах // *Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова.* — 1973. — Т. 119.
25. **Steiner H., Hirschler T.** A self-similar solution of a shock propagation in a dusty gas // *Eur. J. Mech. B/Fluids.* — 2002. — V. 21. — P. 371–380.
26. **Vishwakarma J. P., Nath G.** Similarity solutions for unsteady flow behind an exponential shock in a dusty gas // *Phys. Scri.* — 2006. — V. 74. — P. 493–498.
27. **Pai S. I.** Two Phase Flows. Vieweg Tracts in Pure and Applied Physics. — Braunschweig: Vieweg-Verlag, 1977. — V. 3, ch. V.
28. **Geng J. H., Groenig H.** Dust suspensions accelerated by shock waves // *Exp. Fluids.* — 1980. — V. 28. — P. 360–367.
29. **Zedan H. A.** Applications of the group of equations of the one-dimensional motion of a gas under the influence of monochromatic radiation // *Appl. Math. Comput.* — 2002. — V. 132. — P. 63–71.
30. **Anisimov S. I., Spiner O. M.** Motion of an almost ideal gas in the presence of a strong point explosion // *J. Appl. Math. Mech.* — 1972. — V. 36. — P. 883–887.
31. **Ranga Rao M. P., Purohit N. K.** Self-similar piston problem in non-ideal gas // *Intern. J. Eng. Sci.* — 1976. — V. 14. — P. 91–97.
32. **Nath G.** Similarity solutions for unsteady flow behind an exponential shock in an axisymmetric rotating non-ideal gas // *Meccanica.* — 2015. — V. 50. — P. 1701–1715.
33. **Vishwakarma J. P., Nath G.** Similarity solutions for the flow behind an exponential shock in a non-ideal gas // *Meccanica.* — 2007. — V. 42. — P. 331–339.
34. **Zel'dovich Y. B., Raizer Y. P.** Physics of Shock Waves and High Temperature Hydrodynamic Phenomena. — New York: Academic Press, 1967. — V. II.
35. **Fedorov A. V., Kratova Y. V.** Interaction of heterogeneous detonation waves with the cloud of inert particles // *Heat Transf. Res.* — 2012. — V. 43. — P. 123–138.
36. **Miura H., Glass I. I.** On the passage of a shock wave through a dusty gas layer // *Proc. Roy. Soc. Lond. A.* — 1983. — V. 385. — P. 85–105
37. **Igra O., Falcovitz J., Reichenbach H., Heilig W.** Experimental and numerical study of the interaction between a planar shock wave and

- a square cavity // J. Fluid Mech. — 1996. — V. 313. — P. 105–130.
38. **Igra O., Wu X., Falcovitz J., Meguro T., Takayama K., Heilig W.** Experimental and theoretical study of shock wave propagation through double-bend ducts // J. Fluid Mech. — 2001. — V. 437. — P. 255–282.
39. **Falcovitz J., Alfandary G., Ben-Dor G.** Numerical simulation of the head-on reflection of a regular reflection // Intern. J. Numer. Methods Fluids. — 1993. — V. 17. — P. 1055–1077.
40. **Falcovitz J., Ben-Artzi M.** Recent developments of the GRP method // JSME Intern. J. B. — 1995. — V. 38. — P. 497–517.
41. **Sommerfeld M.** The unsteadiness of shock waves propagating through gasparticle mixtures // Exp. Fluids. — 1985. — V. 3. — P. 197–206.
42. **Hutchens G. J.** Approximate cylindrical blast theory: nearfield solutions // J. Appl. Phys. — 1995. — V. 1977. — P. 2912–2915.
43. **Popel S. I., Tsyтович V. N., Yu M. Y.** Shock structures in plasmas containing variable-charge macro particles // Astrophys. Space Sci. — 1998. — V. 256. — P. 107–123.

*Поступила в редакцию 28/II 2016 г.,
в окончательном варианте — 26/VII 2016 г.*
