

УДК 519.632.4

Решение вырожденной задачи Неймана смешанным методом конечных элементов

М.И. Иванов, И.А. Кремер, Ю.М. Лаевский

Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук,
просп. Акад. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

E-mails: ivanov@sscc.ru (Иванов М.И.), kremer@sscc.ru (Кремер И.А.), laev@labchem.sccc.ru (Лаевский Ю.М.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 4, Vol. 15, 2022.

Иванов М.И., Кремер И.А., Лаевский Ю.М. Решение вырожденной задачи Неймана смешанным методом конечных элементов // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2022. — Т. 25, № 4. — С. 385–401.

В статье предлагается новый способ численного решения вырожденной задачи Неймана для уравнения диффузии в смешанной постановке. В основе излагаемого подхода лежит включение условия однозначной разрешимости задачи в одно из уравнений системы с использованием множителя Лагранжа с последующим понижением ее порядка. Доказаны утверждения об однозначной разрешимости сконструированной задачи и об ее эквивалентности исходной смешанной постановке в подпространстве. Осуществлена аппроксимация задачи на основе смешанного метода конечных элементов. Исследован вопрос об однозначной разрешимости полученной седловой системы линейных алгебраических уравнений. Теоретические результаты проиллюстрированы численными экспериментами.

DOI: 10.15372/SJNM20220404

Ключевые слова: задача Неймана, обобщенная постановка, множители Лагранжа, смешанный метод конечных элементов, седловая система линейных алгебраических уравнений, ядро матрицы.

Ivanov M.I., Kremer I.A., Laevsky Yu.M. Solving the pure Neumann problem by a mixed finite element method // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2022. — Vol. 25, № 4. — P. 385–401.

This paper proposes a new method for the numerical solution of a pure Neumann problem for the diffusion equation in a mixed formulation. The method is based on the inclusion of a condition of unique solvability of the problem in one of the equations of the system with a subsequent decrease in its order by using a Lagrange multiplier. The unique solvability of the problem obtained and its equivalence to the original mixed formulation in a subspace are proved. The problem is approximated on the basis of a mixed finite element method. The unique solvability of the resulting saddle system of linear algebraic equations is investigated. Theoretical results are illustrated by computational experiments.

Keywords: Neumann problem, generalized formulation, Lagrange multipliers, mixed finite element method, saddle point algebraic linear system, matrix kernel.

Введение

В работе исследуются вопросы численного решения вырожденной задачи Неймана для уравнения диффузии в смешанной постановке. С точки зрения построения вычислительных моделей механики сплошной среды такие постановки имеют крайне важное значение. Во-первых, речь идет о непосредственной аппроксимации системы законов сохранения, когда сеточные балансы выполняются автоматически. И, во-вторых, часто

наряду с получением искомой скалярной функции (температуры, концентрации, давления) требуется информация о векторном потоке. Характерным примером такой ситуации является задача о фильтрации несжимаемой жидкости в соответствии с законом Дарси. Задачи такого сорта широко используются при моделировании процессов нефтедобычи, когда условия на нагнетательных и эксплуатационных скважинах определяются их дебитам [1–3]. В этом случае наиболее важной информацией о процессе является скорость фильтрационного потока.

В области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с липшицевой границей $\partial\Omega$ рассматривается задача:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = f, \quad \mathbf{u} = -k \nabla p, \quad \mathbf{x} \in \Omega, \quad (1)$$

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{x} \in \partial\Omega, \quad (2)$$

где $\mathbf{n}$ — заданный почти всюду на $\partial\Omega$ единичный вектор внешней нормали,

$$0 < k_{\min} \leq k \leq k_{\max}, \quad \mathbf{x} \in \Omega.$$

Необходимым условием разрешимости задачи (1), (2) является ортогональность правой части константе:

$$\int_{\Omega} f \, d\mathbf{x} = 0. \quad (3)$$

При этом для устранения неоднозначности решения может быть использовано, например, условие, аналогичное (3):

$$\int_{\Omega} p \, d\mathbf{x} = 0. \quad (4)$$

Различные варианты обобщенных постановок задачи (1)–(4) рассмотрены, например, в книгах [4–6]. В частности, можно рассмотреть слабую постановку, включающую ограничение (4). Обозначим

$$L_{2,\perp}(\Omega) = \left\{ q \in L_2(\Omega), \left| \int_{\Omega} q \, d\mathbf{x} = 0 \right. \right\}, \quad \mathbf{H}_0(\operatorname{div}, \Omega) = \{ \mathbf{v} \in \mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega) \mid \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \}.$$

По заданной функции $f \in L_{2,\perp}(\Omega)$ требуется найти векторную функцию $\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0(\operatorname{div}, \Omega)$ и скалярную функцию $p \in L_{2,\perp}(\Omega)$ такие, что

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\operatorname{div}, \Omega) \quad \int_{\Omega} \frac{1}{k} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = 0, \quad (5)$$

$$\forall q \in L_{2,\perp}(\Omega) \quad - \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} q f \, d\mathbf{x}. \quad (6)$$

Такая задача однозначно разрешима (см., например, [6]). В этом случае, когда пространство решений включает условие (4), необходимо перенести его в конечно-элементное подпространство смешанного метода конечных элементов. В противном случае система линейных алгебраических уравнений, сформированная смешанным методом конечных элементов, окажется вырожденной. Для прямой обобщенной формулировки речь идет о поиске решения $p \in H_{\perp}^1(\Omega)$, где $H_{\perp}^1(\Omega) = H^1(\Omega) \cap L_{2,\perp}(\Omega)$, и здесь возникает та же трудность, связанная с реализацией главного условия (4) в конечно-элементном подпространстве. Для устранения этой трудности рядом авторов [7–10] рассматривался подход, при котором ограничение на решение (4) является естественным условием.

При этом наряду со стандартным уравнением диффузии рассматривались задачи статической теории упругости [11], электромагнетизма [12, 13], а также регуляризация на уровне системы линейных алгебраических уравнений [14].

В данной работе рассмотрена альтернативная по отношению к (5), (6) постановка обобщенной задачи, заключающаяся в расширении исходной формулировки, таким образом, что не возникает никаких связанных с удовлетворением условию ортогональности сложностей при конструировании конечно-элементного подпространства. Полученная при этом система уравнений имеет формальную аналогию с задачей, рассмотренной в [6, с. 44, (1.36)]. Для прямой постановки вырожденной задачи Неймана расширенная формулировка рассматривалась в [7, 9] на основе метода штрафа и в [8, 10] с использованием множителей Лагранжа. Отметим, что для сеточной задачи, полученной смешанным методом конечных элементов, рассмотренный в данной работе подход был использован нами в статье [15] при построении противопотоковых схем для задачи двухфазной фильтрации.

Статья организована следующим образом. В пункте 1 описан способ расширения формулировки (5), (6) на пространство $\mathbf{H}_0(\operatorname{div}, \Omega) \times L_2(\Omega)$, при котором ограничение (4) переходит из главного условия в естественное. В п. 2 обсуждаются вопросы аппроксимации возникающей задачи смешанным методом конечных элементов. Далее, в п. 3 полученные результаты проиллюстрированы численными расчетами. И, наконец, в заключительных замечаниях (п. 4) дается краткий комментарий полученным результатам и намечены дальнейшие пути их развития.

1. Расширенная смешанная постановка

В основе дальнейших построений лежит расширение системы (5), (6) с использованием множителей Лагранжа. Отметим, что ограничение (4) может быть переписано в виде

$$\forall \mu \in \mathbb{R} \quad \int_{\Omega} p \mu \, d\mathbf{x} = 0. \quad (7)$$

Введем множество $\Sigma = \mathbf{H}_0(\operatorname{div}, \Omega) \times L_2(\Omega)$, на котором зададим функционал $\mathcal{L}: \Sigma \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ вида

$$\mathcal{L}(\mathbf{v}, q, \mu) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{1}{k} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} q (\operatorname{div} \mathbf{v} - f) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} q \mu \, d\mathbf{x}. \quad (8)$$

Функционал (8) задает функцию Лагранжа, для которой поставим задачу о поиске стационарной точки $(\mathbf{u}, p, \lambda) \in \Sigma \times \mathbb{R}$:

$$\forall (\mathbf{v}, q, \mu) \in \Sigma \times \mathbb{R} \quad \mathcal{L}(\mathbf{u}, p, \mu) \leq \mathcal{L}(\mathbf{u}, p, \lambda) \leq \mathcal{L}(\mathbf{v}, q, \lambda). \quad (9)$$

Следуя [6], выпишем уравнения Эйлера, которым удовлетворяет решение $(\mathbf{u}, p, \lambda) \in \Sigma \times \mathbb{R}$ задачи о поиске стационарной точки. В результате приходим к следующей системе интегральных тождеств:

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\operatorname{div}, \Omega) \quad & \int_{\Omega} \frac{1}{k} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = 0, \\ \forall q \in L_2(\Omega) \quad & - \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} q \lambda \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} q f \, d\mathbf{x}, \\ \forall \mu \in \mathbb{R} \quad & \int_{\Omega} p \mu \, d\mathbf{x} = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Дальнейшие наши усилия будут направлены на доказательство существования и единственности решения задачи (10), после чего множитель Лагранжа будет исключен из системы уравнений.

Теорема 1. Для произвольной функции $f \in L_2(\Omega)$ задача (10) однозначно разрешима.

Доказательство. Введем оператор $\mathcal{D} : \Sigma \rightarrow \mathbb{R}$ в соответствии с равенством

$$\forall \mu \in \mathbb{R} \quad \langle \mathcal{D}\mathbf{y}, \mu \rangle = \int_{\Omega} p \mu \, d\mathbf{x},$$

где $\mathbf{y} = (\mathbf{u}, p)$. Здесь и далее через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ будем обозначать отношение двойственности, в том числе и скалярное произведение в $L_2(\Omega)$. Отметим, что в задании оператора $\mathcal{D}$ отсутствует зависимость от первого аргумента, т. е. пространство $\mathbf{H}_0(\text{div}, \Omega)$ участвует в определении чисто формально. При этом, согласно третьему из тождеств (10),

$$\text{Ker } \mathcal{D} = \mathbf{H}_0(\text{div}, \Omega) \times L_{2,\perp}(\Omega) \equiv \Sigma_{\perp}.$$

Сопряженный к $\mathcal{D}$ оператор $\mathcal{D}^t : \mathbb{R} \rightarrow \Sigma'$ задается тождеством

$$\forall \mathbf{z} = (\mathbf{v}, q) \in \Sigma \quad \langle \mathcal{D}^t \lambda, \mathbf{z} \rangle = \int_{\Omega} q \lambda \, d\mathbf{x}.$$

Далее, определим оператор $\mathcal{M} : \Sigma \rightarrow \Sigma'$:

$$\forall \mathbf{z} = (\mathbf{v}, q) \in \Sigma \quad \langle \mathcal{M}\mathbf{y}, \mathbf{z} \rangle = \int_{\Omega} \frac{1}{k} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p \, \text{div } \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} q \, \text{div } \mathbf{u} \, d\mathbf{x}.$$

Пусть $\mathcal{M}_R : \Sigma_{\perp} \rightarrow \Sigma'_{\perp}$ — сужение оператора $\mathcal{M}$ на ядро оператора $\mathcal{D}$. Тогда задачу (5), (6) можно записать в операторной форме как $\mathcal{M}_R \mathbf{y} = \mathbf{f}$, где правая часть $\mathbf{f} \in \Sigma'_{\perp}$ задается интегральным тождеством

$$\forall \mathbf{z} \in \Sigma_{\perp} \quad \langle \mathbf{f}, \mathbf{z} \rangle = - \int_{\Omega} q f \, d\mathbf{x}.$$

Как уже говорилось, задача (5), (6) однозначно разрешима и, следовательно, $\mathcal{M}_R$ является изоморфизмом из $\Sigma_{\perp}$ на $\Sigma'_{\perp}$. Далее, для оператора $\mathcal{D}$ выполняется *inf-sup* условие (см., например, [5, 6]):

$$\forall \mu \in \mathbb{R} \quad \sup_{\mathbf{z} \in \Sigma} \frac{\langle \mathcal{D}\mathbf{z}, \mu \rangle}{\|\mathbf{z}\|_{\Sigma}} = \sup_{q \in L_2(\Omega)} \frac{\int_{\Omega} q \mu \, d\mathbf{x}}{\|q\|_{L_2(\Omega)}} \geq \frac{\mu^2 \int_{\Omega} e \, d\mathbf{x}}{|\mu| \cdot \|e\|_{L_2(\Omega)}} = \sqrt{|\Omega|} |\mu|,$$

где $\|\mathbf{z}\|_{\Sigma}^2 = \|\mathbf{v}\|_{\text{div}}^2 + \|q\|_2^2$, $|\Omega|$ — объем области Ω , и при получении неравенства полагали $q(\mathbf{x}) = \mu e(\mathbf{x})$, $e(\mathbf{x}) \equiv 1$ в Ω . Таким образом, выполнены условия теоремы 4.1 из [5], согласно которой решение задачи (10) существует и единственно. $\square$

Замечание 1. Полученный результат не требует для правой части выполнения условия (3). Это означает, что задача (10) может иметь решения, не являющиеся решениями задачи (5), (6). При этом, как легко видеть, любое решение задачи (5), (6) является решением задачи (10). В дальнейшем мы не предполагаем наличие условия (3).

Из системы уравнений (10) можно исключить множитель Лагранжа λ . Заметим, что если во втором уравнении в (10) положить $q = e$, то в соответствии с условием (2), формулой Грина и с учетом третьего уравнения системы (10) можно записать:

$$\lambda = -\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f \, d\mathbf{x} = -\frac{\langle f, e \rangle}{|\Omega|} = -\frac{\langle f, e \rangle}{|\Omega|} - \mu \int_{\Omega} p \, d\mathbf{x}.$$

С использованием этой формулы второе уравнение преобразуется к виду:

$$-\int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} \, d\mathbf{x} - \mu \int_{\Omega} p \, d\mathbf{x} \int_{\Omega} q \, d\mathbf{x} = \frac{\langle f, e \rangle}{|\Omega|} \int_{\Omega} q \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} q f \, d\mathbf{x}.$$

Пусть

$$\hat{f} = f - \frac{\langle f, e \rangle}{|\Omega|}. \quad (11)$$

При этом нетрудно заметить, что $\hat{f} \in L_{2,\perp}(\Omega)$. Таким образом, система (10) преобразуется в задачу: найти функции $(\mathbf{u}, p) \in \Sigma$ такие, что

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\operatorname{div}, \Omega) \quad \int_{\Omega} \frac{1}{k} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = 0, \quad (12)$$

$$\forall q \in L_2(\Omega) \quad -\int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u} \, d\mathbf{x} - \mu \int_{\Omega} p \, d\mathbf{x} \int_{\Omega} q \, d\mathbf{x} = -\int_{\Omega} q \hat{f} \, d\mathbf{x}. \quad (13)$$

Здесь $\mu \in \mathbb{R}$ — произвольный числовой параметр. Приведем соображения, из которых следует существование и единственность решения задачи (12), (13), и установим в некотором смысле эквивалентность задач (5), (6) и (12), (13) при любом $\mu > 0$.

Теорема 2. Для произвольной функции $f \in L_2(\Omega)$ задача (12), (13) при $\mu > 0$ однозначно разрешима.

Доказательство. Введем операторы

$$\mathcal{A} : \mathbf{H}_0(\operatorname{div}, \Omega) \rightarrow (\mathbf{H}_0(\operatorname{div}, \Omega))', \quad \mathcal{B} : \mathbf{H}_0(\operatorname{div}, \Omega) \rightarrow L_2(\Omega), \quad \mathcal{C}_{\mu} : L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$$

по формулам

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{w} \in \mathbf{H}_0(\operatorname{div}, \Omega) \quad \langle \mathcal{A}\mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle &= \int_{\Omega} \frac{1}{k} \mathbf{v} \cdot \mathbf{w} \, d\mathbf{x}, \\ \forall q \in L_2(\Omega) \quad \langle \mathcal{B}\mathbf{v}, q \rangle &= -\int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \\ \forall r \in L_2(\Omega) \quad \langle \mathcal{C}_{\mu}q, r \rangle &= \mu \int_{\Omega} q \, d\mathbf{x} \int_{\Omega} r \, d\mathbf{x}, \quad \mu > 0. \end{aligned}$$

Сопряженный к $\mathcal{B}$ оператор $\mathcal{B}^t : L_2(\Omega) \rightarrow (\mathbf{H}_0(\operatorname{div}, \Omega))'$ задается тождеством

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\operatorname{div}, \Omega) \quad \langle \mathcal{B}^t q, \mathbf{v} \rangle = -\int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x}.$$

При этом

$$\operatorname{Ker} \mathcal{B} = \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\operatorname{div}, \Omega) \mid \operatorname{div} \mathbf{v} = 0\}, \quad \operatorname{Ker} \mathcal{B}^t = \{q \in L_2(\Omega) \mid q = \alpha e, \alpha \in \mathbb{R}\}.$$

Легко видеть, что

$$\forall \mathbf{v} \in \operatorname{Ker} \mathcal{B} \quad \langle \mathcal{A}\mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq \frac{1}{k_{\max}} \|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega)}^2, \quad (14)$$

$$\forall q \in \operatorname{Ker} \mathcal{B}^t \quad \langle \mathcal{C}_{\mu}q, q \rangle = \mu |\Omega| \cdot \|q\|_{L_2(\Omega)}^2. \quad (15)$$

Отметим, что (15) имеет место для любых квадратично суммируемых функций, а не только для функций из $\text{Ker } \mathcal{B}^t$. Далее имеет место *inf-sup* условие:

$$\forall q \in L_{2,\perp}(\Omega) \quad \sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\text{div}, \Omega)} \frac{\langle \mathcal{B}\mathbf{v}, q \rangle}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)}} \geq c_0 \|q\|_{L_2(\Omega)}. \quad (16)$$

Для установления этого неравенства рассмотрим вспомогательную задачу Неймана: по заданной функции $q \in L_{2,\perp}(\Omega)$ найти функцию $\varphi \in H^1(\Omega) \cap L_{2,\perp}(\Omega)$ такую, что выполняется интегральное тождество

$$\forall \psi \in H^1(\Omega) \cap L_{2,\perp}(\Omega) \quad \int_{\Omega} \nabla \varphi \cdot \nabla \psi \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} q \psi \, d\mathbf{x}.$$

Эта задача однозначно разрешима, причем из неравенства Пуанкаре следует существование положительного числа c_1 такого, что

$$\|\nabla \varphi\|_{L_2(\Omega)} \leq c_1 \|q\|_{L_2(\Omega)}$$

(см., например, [5, с. 14, утверждение 1.2]). Пусть $\mathbf{w} = \nabla \varphi$ и, как показано там же, $\mathbf{w} \in \mathbf{H}_0(\text{div}, \Omega)$, причем $\text{div } \mathbf{w} = -q \in L_{2,\perp}(\Omega)$. Тогда

$$\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)} \leq (1 + c_1) \|q\|_{L_2(\Omega)}.$$

Из последнего неравенства следует, что

$$\sup_{\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\text{div}, \Omega)} \frac{\langle \mathcal{B}\mathbf{v}, q \rangle}{\|\mathbf{v}\|_{\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)}} \geq \frac{-\int_{\Omega} q \, \text{div } \mathbf{w} \, d\mathbf{x}}{\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)}} = \frac{\|q\|_{L_2(\Omega)}^2}{\|\mathbf{w}\|_{\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)}} \geq \frac{1}{1 + c_1} \|q\|_{L_2(\Omega)}.$$

Таким образом, установлено неравенство (16) с константой $c_0 = 1/(1 + c_1)$. Согласно неравенствам (14)–(16), выполнены условия теоремы 4.3.1 в [16], из которой следует однозначная разрешимость задачи (12), (13). $\square$

Замечание 2. Заметим, что оператор $\mathcal{A}$ обратим только на множестве $\text{Ker } \mathcal{B}$. В дальнейшем при его аппроксимации учитывается этот факт, что фактически сводится к аппроксимации оператора, определяемого весовым (с учетом коэффициента $1/k$) скалярным произведением в пространстве векторов $\mathbf{L}_2(\Omega)$.

Рассмотрим вопрос об эквивалентности задач (5), (6) и (12), (13). В дальнейшем без специального упоминания будем полагать $\mu > 0$. Имеет место следующая

Теорема 3. *Решение задачи (5), (6) является решением задачи (12), (13). С другой стороны, решение задачи (12), (13) является решением задачи (5), (6) с правой частью, заданной равенством (11).*

Доказательство. Пусть $f \in L_{2,\perp}(\Omega)$ и $(\mathbf{u}, p) \in \Sigma_{\perp}$ — решение задачи (5), (6). Через $(\mathbf{u}_{\mu}, p_{\mu}) \in \Sigma$ обозначим решение задачи (12), (13), и пусть $\mathbf{w}_{\mu} = \mathbf{u}_{\mu} - \mathbf{u}$ и $r_{\mu} = p_{\mu} - p$. Поскольку $L_{2,\perp}(\Omega) \subset L_2(\Omega)$ равенство (13) имеет место для $f \in L_{2,\perp}(\Omega)$ и для произвольного $q \in L_{2,\perp}(\Omega)$. При этом, согласно (11), $\hat{f} = f$. Тогда в соответствии с (5), (6), (12), (13) приходим к системе

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}_0(\operatorname{div}, \Omega) \quad & \int_{\Omega} \frac{1}{k} \mathbf{w}_{\mu} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} r_{\mu} \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = 0, \\ \forall q \in L_{2,\perp}(\Omega) \quad & - \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{w}_{\mu} \, d\mathbf{x} = 0, \end{aligned}$$

из которой немедленно следует, что $\mathbf{u}_{\mu} = \mathbf{u}$ и $p_{\mu} = p$ при любом $\mu \in \mathbb{R}$. Далее, пусть $f \in L_2(\Omega)$ и $(\mathbf{u}, p) \in \Sigma_{\perp}$ — решение системы (5), (6) с правой частью $\hat{f} \in L_{2,\perp}(\Omega)$. В случае $q \in L_{2,\perp}(\Omega)$ повторяются предыдущие рассуждения. Учитывая очевидное разложение

$$L_2(\Omega) = L_{2,\perp}(\Omega) \oplus \{\alpha e\}, \quad \alpha \in \mathbb{R},$$

рассмотрим уравнение (13) в подпространстве $\mathbf{H}_0(\operatorname{div}, \Omega) \times \{\alpha e\}$. Положим в (13) $q = \alpha e$. Поскольку $\mathbf{u}_{\mu} \in \mathbf{H}_0(\operatorname{div}, \Omega)$, $\hat{f} \in L_{2,\perp}(\Omega)$ и $e(\mathbf{x}) \equiv 1$ в Ω уравнение (13) принимает вид:

$$\int_{\Omega} p_{\mu} \, d\mathbf{x} = 0,$$

т. е. ортогональное дополнение к $L_{2,\perp}(\Omega)$ “отвечает” за автоматическое выполнение условия $(\mathbf{u}_{\mu}, p_{\mu}) \in \Sigma_{\perp}$. Это завершает доказательство того факта, что решение задачи (12), (13) является решением задачи (5), (6) с правой частью, заданной равенством (11). $\square$

2. Сеточная аппроксимация расширенной постановки

Сеточную аппроксимацию задачи (12), (13) осуществим смешанным методом конечных элементов с использованием элементов Равьяра–Тома наименьшей степени на симплициальной или параллелепипедальной сетке [6, 16, 17]. Следуя стандартной процедуре, рассмотрим разбиение $\mathcal{T} = \{\tau\}$ области Ω на открытые множества τ , удовлетворяющее условиям регулярности и квазиравномерности [18]:

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{\tau \in \mathcal{T}} \overline{\tau},$$

и пусть $h > 0$ — аппроксимирующий ноль параметр, характеризующий размер сеточных ячеек τ :

$$h = \max_{\tau \in \mathcal{T}} (\inf_{B \supset \tau} d_B),$$

где d_B — диаметр шара B .

Введем следующие конечномерные пространства:

$$\mathbf{V}_h = \operatorname{span}\{\mathbf{w}_i, i = 1, \dots, N_A\}, \quad Q_h = \operatorname{span}\{\chi_{\tau}, \tau \in \mathcal{T}\},$$

где через N_A обозначено количество не принадлежащих границе $\partial\Omega$ граней, $\mathbf{w}_i$ — базисные функции, построенные по элементам Равьяра–Тома наименьшей степени, χ_{τ} — характеристическая функция множества τ . Аппроксимация элементами Равьяра–Тома в трехмерном случае описана, например, в работах [6, 16]. Для наглядности приведем эту конструкцию для трехмерной эталонной ячейки $\tau_0 = [-1, 1]^3$. Полагая $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, сеточная вектор-функция $\mathbf{v}$ в ячейке τ_0 имеет вид

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 x_1 \\ a_2 + b_2 x_2 \\ a_3 + b_3 x_3 \end{pmatrix},$$

где параметры $a_k, b_k (k = 1, 2, 3)$ задаются значениями нормальных компонент вектора $\mathbf{v}$ на шести гранях ячейки τ_0 . Пусть через $\mathbf{n}_{k,1}$ и $\mathbf{n}_{k,-1}$ обозначены единичные векторы внешних нормалей на гранях $x_k = 1$ и $x_k = -1$ соответственно, и степенями свободы на этих гранях являются значения $v_{k,1} = \mathbf{v}|_{x_k=1} \cdot \mathbf{n}_{k,1} = a_k + b_k$ и $v_{k,-1} = \mathbf{v}|_{x_k=-1} \cdot \mathbf{n}_{k,-1} = a_k - b_k$. При этом для компонент $v_k(x_k)$ вектора $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ имеют место представления:

$$v_k(x_k) = v_{k,1}w_{k,1}(x_k) + v_{k,-1}w_{k,-1}(x_k),$$

где $w_{k,1}(x_k) = (1+x_k)/2$, $w_{k,-1}(x_k) = (1-x_k)/2$. В рассмотренном примере базис Равьяра–Тома представим следующими шестью вектор-функциями:

$$\mathbf{w}_{k,1} = w_{k,1}\mathbf{n}_{k,1}, \quad \mathbf{w}_{k,-1} = -w_{k,-1}\mathbf{n}_{k,-1}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Такое представление обеспечивает непрерывность сеточных потоков между смежными ячейками, и $\operatorname{div} \mathbf{w}_i \in L_2(\Omega)$. При этом полагаем, что

$$\mathbf{w}_i \cdot \mathbf{n} = 0, \quad i = 1, \dots, N_A,$$

где, как и в равенстве (2), $\mathbf{n}$ — заданный почти всюду на $\partial\Omega$ единичный вектор внешней нормали, т. е. из базиса Равьяра–Тома исключены функции, “привязанные” к граням из $\partial\Omega$. Также отметим, что функции из пространства Q_h не определены на гранях, ребрах и в вершинах ячеек, и их можно доопределить произвольным образом. Таким образом, введено конечномерное замкнутое подпространство пространства разрешимости задачи (12), (13):

$$\Sigma_h \equiv \mathbf{V}_h \times Q_h \subset \Sigma.$$

Рассматривается следующая задача: найти сеточные функции $(\mathbf{u}^h, p^h) \in \Sigma_h$ такие, что

$$\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}_h \quad \int_{\Omega} \frac{1}{k} \mathbf{u}^h \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} p^h \operatorname{div} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = 0, \quad (17)$$

$$\forall q \in Q_h \quad - \int_{\Omega} q \operatorname{div} \mathbf{u}^h \, d\mathbf{x} - \mu \int_{\Omega} p^h \, d\mathbf{x} \int_{\Omega} q \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} q \hat{f} \, d\mathbf{x}. \quad (18)$$

Полагая $\mathbf{v} = \mathbf{w}_i$, $q = \chi_{\tau}$ и учитывая, что

$$\mathbf{u}^h = \sum_{j=1}^{N_A} u_j \mathbf{w}_j, \quad p^h = \sum_{\tau' \in \mathcal{T}} p_{\tau'} \chi_{\tau'},$$

получим

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{N_A} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{k} \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_j \, d\mathbf{x} \right) u_j - \sum_{\tau' \in \mathcal{T}} \left(\int_{\partial\tau'} \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{n}_{\tau'} \, d\gamma \right) p_{\tau'} &= 0, \quad i = 1, \dots, N_A, \\ - \sum_{j=1}^{N_A} \left(\int_{\partial\tau} \mathbf{w}_j \cdot \mathbf{n}_{\tau} \, d\gamma \right) u_j - \mu |\tau| \sum_{\tau' \in \mathcal{T}} |\tau'| p_{\tau'} &= - \int_{\tau} \hat{f} \, d\mathbf{x}, \quad \tau \in \mathcal{T}, \end{aligned}$$

где $\mathbf{n}_{\tau}$ — заданный почти всюду на $\partial\tau$ единичный вектор внешней нормали.

Перепишем эти уравнения в векторно-матричной форме. Следуя работе [15], введем евклидово пространство $\mathcal{E}_N$ размерности $N = |\mathcal{T}|$ со скалярным произведением $[\cdot, \cdot]$ и нормой $\|\cdot\|$. Здесь $|\mathcal{T}|$ — объем конечного множества, равный количеству его элементов. В дальнейшем будем предполагать наличие нумерации на множестве $\mathcal{T}$:

$$\mathcal{T} = \{\tau_k, \quad k = 1, \dots, N\}.$$

Элементами пространства $\mathcal{E}_N$ являются векторы-столбцы $\bar{q}$ с компонентами $q^{(k)}$. Для заданной сеточной функции $q \in Q_h$ с коэффициентами разложения по базисным функциям q_τ изометричность пространств Q_h и $\mathcal{E}_N$ обеспечивает равенство $q^{(k)} = \sqrt{|\tau_k|} q_{\tau_k}$. Действительно,

$$\|\bar{q}\|^2 = \sum_{k=1}^N (q^{(k)})^2 = \sum_{k=1}^N |\tau_k| q_{\tau_k}^2 = \sum_{k=1}^N \int_{\Omega} (q_{\tau_k} \chi_{\tau_k})^2 d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \sum_{k,l=1}^N (q_{\tau_k} \chi_{\tau_k})(q_{\tau_l} \chi_{\tau_l}) d\mathbf{x} = \|q\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

Наряду с пространством $\mathcal{E}_N$ рассмотрим пространство $\mathcal{E}_{N_A}$, векторы-столбцы из которого будем выделять жирным шрифтом: $\bar{\mathbf{v}} \in \mathcal{E}_{N_A}$. Далее введем квадратную матрицу A размерности $N_A \times N_A$, прямоугольную матрицу B размерности $N \times N_A$ (N строк и N_A столбцов) и квадратную матрицу C_μ размерности $N \times N$ с элементами

$$a_{i,j} = \int_{\Omega} \frac{1}{k} \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{w}_j d\mathbf{x}, \quad b_{k,j} = -\frac{1}{\sqrt{|\tau_k|}} \int_{\partial\tau_k} \mathbf{w}_j \cdot \mathbf{n}_{\tau_k} d\gamma, \quad c_{k,l} = \mu \sqrt{|\tau_k|} \sqrt{|\tau_l|}$$

соответственно. Введенные матрицы являются сеточными аналогами операторов, рассмотренных при доказательстве теоремы 2. При этом

$$A : \mathcal{E}_{N_A} \rightarrow \mathcal{E}_{N_A}, \quad B : \mathcal{E}_{N_A} \rightarrow \mathcal{E}_N, \quad C_\mu : \mathcal{E}_N \rightarrow \mathcal{E}_N.$$

В дальнейшем будет использоваться ортогональное разложение эвклидова пространства $\mathcal{E}_N$:

$$\mathcal{E}_N = \mathcal{E}_{N,\perp} \oplus \{\alpha \bar{e}, \alpha \in \mathbb{R}\}, \quad (19)$$

где через $\bar{e} \in \mathcal{E}_N$ обозначен вектор-столбец с компонентами $e^{(k)} = \sqrt{|\tau_k|}$. Заметим, что этот вектор-столбец изометричен введенной ранее функции e . Нам понадобится следующая

Лемма 1. $\text{Ker } B^t = \{\alpha \bar{e}, \alpha \in \mathbb{R}\}$.

Доказательство. Рассмотрим произвольный вектор-столбец $\bar{q} \in \mathcal{E}_N$, который, согласно разложению (19), представим в виде $\bar{q} = \bar{q}_\perp + \alpha \bar{e}$, где $\bar{q}_\perp \in \mathcal{E}_{N,\perp}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Пусть $\bar{\mathbf{v}} = B^t \bar{e}$. Для j -й компоненты этого вектора имеет место

$$v^{(j)} = -\sum_{k=1}^N \int_{\partial\tau_k} \mathbf{w}_j \cdot \mathbf{n}_{\tau_k} d\gamma = -\sum_{(\partial\tau)_{mn}} \int_{(\partial\tau)_{mn}} \mathbf{w}_j \cdot (\mathbf{n}_{\tau_m} + \mathbf{n}_{\tau_n}) d\gamma,$$

где $(\partial\tau)_{mn} = \bar{\tau}_m \cap \bar{\tau}_n$ — внутренние грани смежных ячеек. При этом учитывается, что на гранях, лежащих на внешней границе, $\mathbf{w}_j \cdot \mathbf{n} = 0$. Из очевидного равенства $\mathbf{n}_{\tau_m} + \mathbf{n}_{\tau_n} = \mathbf{0}$ при $\mathbf{x} \in (\partial\tau)_{mn}$ следует, что $v^{(j)} = 0$, т.е. $\alpha \bar{e} \subset \text{Ker } B^t$. Пусть $\bar{\mathbf{v}} = B^t \bar{q}_\perp$. Покажем, что $\bar{\mathbf{v}} \in \text{Im } B^t$, и, следовательно, ядро матрицы B^t исчерпывается одномерным пространством $\alpha \bar{e}$. Имеем

$$\begin{aligned} v^{(j)} &= -\sum_{k=1}^N \frac{q_\perp^{(k)}}{e^{(k)}} \int_{\partial\tau_k} \mathbf{w}_j \cdot \mathbf{n}_{\tau_k} d\gamma = -\sum_{(\partial\tau)_{mn}} \int_{(\partial\tau)_{mn}} \mathbf{w}_j \cdot \left(\frac{q_\perp^{(m)}}{e^{(n)}} \mathbf{n}_{\tau_m} + \frac{q_\perp^{(n)}}{e^{(n)}} \mathbf{n}_{\tau_n} \right) d\gamma \\ &= \sum_{(\partial\tau)_{mn}} \int_{(\partial\tau)_{mn}} \mathbf{w}_j \cdot \mathbf{n}_{\tau_m} d\gamma \left(\frac{q_\perp^{(n)}}{e^{(n)}} - \frac{q_\perp^{(m)}}{e^{(m)}} \right), \quad j = 1, \dots, N_A. \end{aligned}$$

При этом каждая грань содержится только в двух смежных ячейках (за исключением граничных, которые мы уже исключили из рассмотрения). Для элементов Равьяра–Тома для каждой грани найдутся номера m и n такие, что $\text{supp } \mathbf{w}_i \cap (\partial\tau)_{mn} \neq \emptyset$, и, следовательно,

$$v^{(i)} = \int_{(\partial\tau)_{mn}} \mathbf{w}_i \cdot \mathbf{n}_{\tau_m} d\gamma \left(\frac{q_{\perp}^{(n)}}{e^{(n)}} - \frac{q_{\perp}^{(m)}}{e^{(m)}} \right).$$

Доказательство проведем от противного: полагая $v^{(i)} = 0$, $i = 1, \dots, N_A$, покажем, что $\bar{q}_{\perp} = \bar{0}$. Из последнего равенства при $v^{(i)} = 0$ следует, что

$$q_{\perp}^{(n)} e^{(m)} = q_{\perp}^{(m)} e^{(n)}.$$

Перебору всех граней соответствует нумерация $i = 1, \dots, N_A$ базисных функций, и, поскольку при этом используются все ячейки разбиения $\mathcal{T}$, то из последнего равенства следует, что либо $q_{\perp}^{(m)} = 0$, $m = 1, \dots, N$, либо все значения $q_{\perp}^{(m)}$ имеют один знак, поскольку при обходе всех граней, начиная с любой из граней ячейки τ_1 , знак величины $q_{\perp}^{(1)}$ последовательно воспроизводится всеми значениями $q_{\perp}^{(m)}$. Таким образом, если $q_{\perp}^{(1)} > 0$, то и $q_{\perp}^{(m)} > 0$ для $m = 2, \dots, N$. Тогда $[\bar{q}_{\perp}, \bar{e}] > 0$, что противоречит условию ортогональности $[\bar{q}_{\perp}, \bar{e}] = 0$. Полученное противоречие показывает, что единственным решением уравнения $B^t \bar{q} = \bar{0}$, удовлетворяющим условию ортогональности, является нулевой вектор-столбец. Это завершает доказательство того факта, что

$$\text{Ker } B^t = \{\alpha \bar{e}, \alpha \in \mathbb{R}\}. \quad \square$$

Далее имеет место

Лемма 2. Матрица C_{μ} положительно полуопределена и $\text{Ker } C_{\mu} = \mathcal{E}_{N,\perp}$.

Доказательство. Как нетрудно заметить, матрица C_{μ} может быть представлена в виде $C_{\mu} = \mu \bar{e} \cdot \bar{e}^t$ и, следовательно,

$$C_{\mu} \bar{q} = \mu [\bar{q}, \bar{e}] \bar{e}. \quad (20)$$

Тогда $[C_{\mu} \bar{q}, \bar{q}] = \mu [\bar{q}, \bar{e}]^2 \geq 0$, т. е. C_{μ} положительно полуопределена. Далее, в соответствии с разложением (19), рассмотрим вектор-столбец $\bar{q} \in \mathcal{E}_{N,\perp}$. При этом $[\bar{q}, \bar{e}] = 0$, и согласно представлению (20), $C_{\mu} \bar{q} = \bar{0}$. Здесь $\bar{0}$ — нулевой элемент пространства $\mathcal{E}_N$. В силу произвольности $\bar{q} \in \mathcal{E}_{N,\perp}$ имеет место равенство $\text{Ker } C_{\mu} = \mathcal{E}_{N,\perp}$. $\square$

Замечание 3. Представление (20) позволяет производить умножение плотной матрицы C_{μ} на вектор-столбец экономично.

Задача (17), (18) может быть записана в следующей векторно-матричной форме:

$$\begin{pmatrix} A & B^t \\ B & -C_{\mu} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{u}} \\ \bar{\mathbf{p}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\mathbf{0}} \\ \bar{\mathbf{f}} \end{pmatrix}, \quad (21)$$

где $\bar{\mathbf{f}} \in \mathcal{E}_N$ — вектор-столбец с компонентами

$$f^{(k)} = -\frac{1}{\sqrt{|\tau_k|}} \int_{\tau_k} \hat{f} d\mathbf{x}$$

и $\bar{\mathbf{0}}$ — нулевой элемент пространства $\mathcal{E}_{N_A}$.

Рассмотрим вопросы об однозначной разрешимости задачи (21) и о близости решения этой задачи к решению исходной задачи (12), (13). Вопрос об однозначной разрешимости рассмотрим на алгебраическом уровне без ссылки на теорему 2.

Теорема 4. Матрица системы (21) невырожденная.

Доказательство. Во-первых, отметим, что положительно определена матрица A . Действительно, как нетрудно заметить,

$$[A\bar{\mathbf{v}}, \bar{\mathbf{v}}] = \int_{\Omega} \frac{1}{k} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} \, d\mathbf{x}, \quad \bar{\mathbf{v}} = (v^{(1)}, \dots, v^{(N_A)})^t, \quad \mathbf{v} = \sum_{i=1}^{N_A} v^{(i)} \mathbf{w}_i,$$

и в силу линейной независимости функций $\mathbf{w}_i$, задающих базис Равьяра–Тома, из равенства $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ немедленно следует, что $v^{(i)} = 0$, $i = 1, \dots, N_A$, а значит, и $\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{0}}$. В отличие от оператора $\mathcal{A} : \mathbf{H}_0(\operatorname{div}, \Omega) \rightarrow (\mathbf{H}_0(\operatorname{div}, \Omega))'$, матрица A обратима во всем пространстве $\mathcal{E}_{N_A}$, а не только на ядре матрицы B . Тогда вопрос об обратимости матрицы системы (21) сводится к вопросу об однозначной разрешимости системы

$$S_{\mu} \bar{p} = -\bar{f}, \quad S_{\mu} = S_0 + C_{\mu}, \quad S_0 = BA^{-1}B^t, \quad (22)$$

полученной после исключения из (21) вектора $\mathbf{u}$. Отметим, что в соответствии с (11) нам достаточно установить однозначную разрешимость при $\bar{f} \in \mathcal{E}_{N, \perp}$. Матрица S_{μ} положительно полуопределена, поскольку, согласно лемме 2, является суммой положительно полуопределенных матриц. При этом $\operatorname{Ker} S_0 = \operatorname{Ker} B^t$ (см., например, [19, с. 45, утверждение 6.26]), и в соответствии с леммой 1 $\operatorname{Ker} S_0 = \{\alpha \bar{e}, \alpha \in \mathbb{R}\}$. Далее, согласно лемме 2, $\operatorname{Ker} C_{\mu} = \mathcal{E}_{N, \perp}$. Таким образом,

$$\mathcal{E}_N = \operatorname{Ker} C_{\mu} \bigcup \operatorname{Ker} S_0, \quad \operatorname{Ker} C_{\mu} \cap \operatorname{Ker} S_0 = \{\bar{0}\}.$$

Тогда для произвольного вектора-столбца $\bar{q} = \bar{q}_{\perp} + \alpha \bar{e}$ в соответствии с (20) имеет место

$$\forall \bar{q} \in \mathcal{E}_N, \quad \bar{q} \neq \bar{0} \quad [S_{\mu} \bar{q}, \bar{q}] = [S_0 \bar{q}_{\perp}, \bar{q}_{\perp}] + \mu \alpha^2 \|\bar{e}\|^4 > 0.$$

Тем самым установлена однозначная разрешимость системы (22) и, как следствие, обратимость матрицы системы (21) в $\mathcal{E}_{N_A} \times \mathcal{E}_N$. $\square$

Замечание 4. При доказательстве однозначной разрешимости задачи (21) существенно использовался тот факт, что $\mu > 0$. В случае $\mu = 0$ задача разрешима только в подпространстве $\mathcal{E}_{N_A} \times \mathcal{E}_{N, \perp}$, и для доказательства пришлось бы использовать сеточный аналог *inf-sup* условия.

Что касается близости решения задачи (17), (18) к решению задачи (12), (13), то здесь используется стандартная техника сведения оценки погрешности решения к оценке погрешности интерполяции (см., например, [6, с. 61, утверждение 2.11]). В результате интерполяционные оценки для элементов Равьяра–Тома наименьшей степени [6, с. 132, утверждение 3.9] приводят к оценке погрешности

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}^h\|_{\mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega)} + \|p - p^h\|_{L_2(\Omega)} = \mathcal{O}(h). \quad (23)$$

При этом предполагается, что $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, $p \in H^2(\Omega)$.

3. Вычислительный эксперимент

Для оценки погрешности рассмотрим задачу (1), (2) в двумерной области $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ при $k(x, y) \equiv 10$ с известным решением и правой частью

$$p(x, y) = \sum_{l=0}^5 27^{-l} \cos 3^l \pi x \cos 3^l \pi y, \quad f(x, y) = 20\pi^2 \sum_{l=0}^5 3^{-l} \cos 3^l \pi x \cos 3^l \pi y. \quad (24)$$

Как нетрудно заметить, для этой задачи выполнены условия (3), (4). В области Ω введем квадратную сетку с шагом $h = 1/M$ (в обозначениях предыдущего пункта $N = M^2$), и с каждой ячейкой $\bar{\tau} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, $i, j = 1, \dots, M$, свяжем ее центр $\mathbf{x}_\tau = (x_i - h/2, y_j - h/2)$. В дальнейшем будем использовать следующие обозначения:

$$\delta_p = \|p^h - \Pi_h p\|_{L_2(\Omega)} / \|\Pi_h p\|_{L_2(\Omega)}, \quad (25)$$

где $\Pi_h : C(\Omega) \rightarrow Q_h$ — проектирование на сетку по формуле $(\Pi_h q)(\mathbf{x}) = q(\mathbf{x}_\tau)$, $\mathbf{x} \in \tau$. Здесь речь идет о сеточных нормах, и (25) может быть переписана в виде

$$\delta_p = \left(\sum_{\tau \in \mathcal{T}} \left(p^h(\mathbf{x}_\tau) - p(\mathbf{x}_\tau) \right)^2 / \sum_{\tau \in \mathcal{T}} (p(\mathbf{x}_\tau))^2 \right)^{1/2}.$$

Приведем формулы для вычисления сеточных норм погрешностей $\delta_{\mathbf{u}}$ и $\delta_{\text{div } \mathbf{u}}$. Введем обозначения для относительных погрешностей компонент скорости в соответствии с формулами $\delta_{\mathbf{u}} = (\delta_{u_x}^2 + \delta_{u_y}^2)^{1/2}$ и

$$\begin{aligned} \delta_{u_x}^2 &= \sum_{i=0}^M \sum_{j=1}^M \left[u_x^h(x_i, y_j - h/2) - u_x(x_i, y_j - h/2) \right]^2 / \delta^2, \\ \delta_{u_y}^2 &= \sum_{i=1}^M \sum_{j=0}^M \left[u_y^h(x_i - h/2, y_j) - u_y(x_i - h/2, y_j) \right]^2 / \delta^2, \end{aligned}$$

где

$$\delta^2 = \sum_{i=0}^M \sum_{j=1}^M (u_x(x_i, y_j - h/2))^2 + \sum_{i=1}^M \sum_{j=0}^M (u_y(x_i - h/2, y_j))^2.$$

Далее обозначим:

$$\delta_{\text{div}, i, j}(\mathbf{v}) = v_x(x_i, y_j - h/2) - v_x(x_{i-1}, y_j - h/2) + v_y(x_i - h/2, y_j) - v_y(x_i - h/2, y_{j-1}),$$

$$i = 1, \dots, M, \quad j = 1, \dots, M.$$

Тогда

$$\delta_{\text{div } \mathbf{u}}^2 = \left(h^2 \delta^2 + \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M (\delta_{\text{div}, i, j}(\mathbf{u}))^2 \right)^{-1} \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \left(\delta_{\text{div}, i, j}(\mathbf{u}^h) - \delta_{\text{div}, i, j}(\mathbf{u}) \right)^2.$$

Результаты вычислений приведены в таблице 1.

Таблица 1. Относительные ошибки и порядки сходимости

h	3^{-1}	3^{-2}	3^{-3}	3^{-4}	3^{-5}	3^{-6}
δ_p	1.67e-01	2.10e-02	2.38e-03	2.66e-04	2.95e-05	3.28e-06
θ_p	–	1.89	1.98	1.99	2.00	2.00
$\delta_{\mathbf{u}}$	4.51e-02	7.08e-03	9.66e-04	1.24e-04	1.54e-05	1.88e-06
$\theta_{\mathbf{u}}$	–	1.69	1.81	1.87	1.90	1.92
$\delta_{\text{div } \mathbf{u}}$	4.39e-02	1.42e-02	4.71e-03	1.57e-03	5.23e-04	1.74e-04
$\theta_{\text{div } \mathbf{u}}$	–	1.03	1.00	1.00	1.00	1.00

Здесь и далее рассматривается последовательность шагов $h = 3^{-l}$. Для таких шагов имеем вложенную последовательность сеток в том смысле, что каждая следующая сетка содержит все узлы предыдущей, включающей середины ячеек и середины ребер. При этом задача решалась сведением системы (21) к системе линейных алгебраических уравнений (22) с симметрической положительно определенной матрицей, для решения которой применялся двучленный итерационный метод сопряженных градиентов (CG). Критерием остановки итерационного процесса являлось достижение отношения нормы невязки к норме правой части величины $\varepsilon = 10^{-15}$. Вычисления проводились для значения $\mu = 10^8$. Кроме того, в табл. 1 приведены значения величин

$$\theta_p(h) = \log_3 \frac{\delta_p(3h)}{\delta_p(h)}, \quad \theta_{\mathbf{u}}(h) = \log_3 \frac{\delta_{\mathbf{u}}(3h)}{\delta_{\mathbf{u}}(h)}, \quad \theta_{\text{div } \mathbf{u}}(h) = \log_3 \frac{\delta_{\text{div } \mathbf{u}}(3h)}{\delta_{\text{div } \mathbf{u}}(h)},$$

характеризующие порядок сходимости. Из табл. 1 видно, что для p имеет место сходимость порядка $\mathcal{O}(h^2)$, для вектора $\mathbf{u}$ погрешность асимптотическим стремится к величине $\mathcal{O}(h^2)$, и для $\text{div } \mathbf{u}$ имеем сходимость порядка $\mathcal{O}(h)$. Отметим, что если при оценке погрешности для $\text{div } \mathbf{u}$ в формуле для $\delta_{\text{div } \mathbf{u}}$ использовать не $\delta_{\text{div}, i, j}(\mathbf{u})$, а $f(x_i - h/2, y_j - h/2)$ (напомним, что $f = \text{div } \mathbf{u}$), характер сходимости не изменится, но ошибка будет примерно в два раза больше. Полученный результат соответствует теоретической оценке (23). При этом в примере (24) участвуют как низкие, так и высокие гармоники с коэффициентами, отражающими требуемую гладкость решения. Если понизить гладкость, сделав неубывающими коэффициенты при гармониках в правой части, неравенство (23) перестанет выполняться. Действительно, рассмотрим задачу (1), (2), где в качестве решения и правой части вместо (24) используются функции

$$p(x, y) = \sum_{l=0}^5 9^{-l} \cos 3^l \pi x \cos 3^l \pi y, \quad f(x, y) = 20\pi^2 \sum_{l=0}^5 \cos 3^l \pi x \cos 3^l \pi y.$$

Результаты вычислений содержатся в табл. 2.

Таблица 2. Относительные ошибки при наличии высоких гармоник

h	3^{-1}	3^{-2}	3^{-3}	3^{-4}	3^{-5}	3^{-6}
δ_p	1.67e-01	2.72e-02	3.76e-03	4.86e-04	6.07e-05	7.41e-06
$\delta_{\mathbf{u}}$	4.51e-02	1.50e-02	5.91e-03	1.67e-03	5.57e-04	1.86e-04
$\delta_{\text{div } \mathbf{u}}$	4.39e-02	3.10e-02	2.52e-02	2.18e-02	1.95e-02	1.78e-02

Из приведенной таблицы следует, что погрешность для p с измельчением сетки приближается к величине $\mathcal{O}(h^2)$. Для векторного потока $\mathbf{u}$ имеет место сходимость порядка $\mathcal{O}(h)$. И, наконец, для $\operatorname{div} \mathbf{u} = f$ сходимость отсутствует. Отметим, что во всех расчетах для p имеет место сходимость порядка $\mathcal{O}(h^2)$. Причина такой сверхсходимости состоит в вычислении погрешности в сеточной норме в соответствии с (25) в отличие от (23). В этом случае имеет место оценка $\mathcal{O}(h^2)$ (см. [6, с. 186, неравенство (3.2)]). И, наконец, для сеточного решения p^h с точностью до ошибок округления выполнено условие ортогональности $[\bar{p}, \bar{e}] = 0$.

Рассмотрим вопрос о количестве итераций двучленного метода сопряженных градиентов (CG), необходимых для достижения заданной точности, в зависимости от параметра μ . Как и раньше, критерием остановки итерационного процесса является достижение отношения нормы невязки к норме правой части заданной точности ε . Расчеты проводились для теста (24) на фиксированной сетке с шагом $h = 3^{-5}$. В качестве начального приближения полагали $\bar{p} = \bar{0}$. Результаты расчетов приведены в табл. 3. Далее, на рисунке приведена зависимость значения нормы относительной невязки от количества итераций метода сопряженных градиентов. Как видно из рисунка, до точности порядка $1.0e-11$ количество итераций практически не зависит от параметра μ .

Таблица 3. Количество итераций CG при варьировании параметра μ

$\varepsilon \backslash \lg \mu$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
10^{-8}	27	27	27	27	27	27	27	27	29	32	34
10^{-10}	42	42	42	42	42	42	42	42	48	49	53
10^{-15}	399	399	399	399	467	399	471	471	741	478	1009

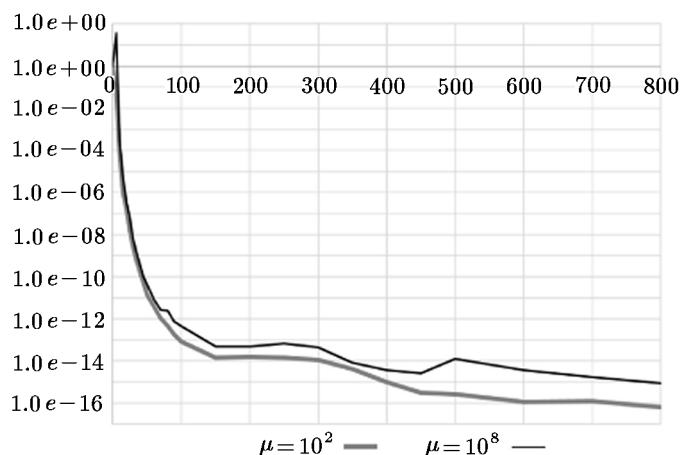


Рис. Зависимость относительной невязки от числа итераций

Таким образом, мы проиллюстрировали независимость решения задачи и его аппроксимации, а следовательно, и свойств сходимости при $h \rightarrow 0$, от параметра μ . Тем не менее, от выбора μ зависит количество итераций метода сопряженных градиентов, применяемого к системе линейных алгебраических уравнений (22) на достаточно густой сетке $N = 243$. И хотя в рассмотренном примере эта зависимость проявляется достаточно слабо, нельзя исключить более существенного влияния параметра μ на число обусловленности, заданной вторым из равенств (22), матрицы S_μ для других примеров и других итерационных процессов.

4. Заключение

В статье рассмотрена расширенная обобщенная смешанная формулировка вырожденной задачи Неймана для уравнения диффузии в виде системы интегральных тождеств в терминах “скалярная субстанция–векторный поток”. Отметим, что, по существу, балансными являются естественные условия, входящие в интегральную запись законов сохранения. В этом смысле “нарушителями” баланса в вырожденной задаче Неймана являются условия однозначной разрешимости (3), (4). Особенностью предложенного подхода является отсутствие в формулировке каких-либо ограничений на пространства решений и правых частей, связанных с вырожденностью исходной задачи Неймана. Полученное при этом решение в точности совпадает с решением задачи в подпространстве. Это позволило осуществить аппроксимацию задачи смешанным методом конечных элементов без учета условий (3), (4) и в результате получить систему линейных алгебраических уравнений с невырожденной матрицей. Полученные теоретические результаты проиллюстрированы расчетами для двумерной задачи.

В развитие предложенного подхода предполагается рассмотреть вырожденную задачу Неймана для двух уравнений диффузии в виде системы законов сохранения. В частности, такая задача является основой описания процессов нефтедобычи в трещиноватопористых средах для моделей двойной пористости [20, 21], когда на границе области имеют место условия непротекания, а на скважинах заданы расходы флюида. При этом важной информацией о потоках являются их скорости. В отличие от данной работы, потребуется ответить на вопрос о структуре одномерного ядра оператора задачи. На сеточном уровне такая задача рассматривалась в нашей статье [22].

Литература

1. **Peaceman D.W.** Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation. — Amsterdam: Elsevier, 1977.
2. **Aziz K. and Settari A.** Petroleum Reservoir Simulation. — London: Applied Science Publishers, 1979.
3. **Chavent G. and Jaffre J.** Mathematical Models and Finite Elements for Reservoir Simulation. — Amsterdam: Elsevier, 1986.
4. **Ladyzhenskaya O.A.** The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow. — New York: Gordon and Breach, 1969.
5. **Girault V. and Raviart P.-A.** Finite Element Methods for Navier–Stokes Equations. — Springer-Verlag, 1986.
6. **Brezzi F. and Fortin M.** Mixed and Hybrid Finite Element Methods. — New York: Springer-Verlag, 1991.
7. **Krjizhek M.** On approximation of the Neumann problem by the penalty method // Applications of Mathematics. — 1993. — Vol. 38, iss. 6. — P. 459–469.
8. **Bochev P. and Lehoucq R.B.** On the finite element solution of the pure Neumann problem // SIAM Review. — 2005. — Vol. 47, № 1. — P. 50–66.
9. **Dai X.** Finite element approximation of the pure Neumann problem using the iterative penalty method // Applied Mathematics and Computation. — 2007. — Vol. 186. — P. 1367–1373.
10. **Ivanov M.I., Kremer I.A., and Urev M.V.** Solving the pure Neumann problem by a finite element method // Numerical Analysis and Applications. — 2019. — Vol. 12, № 4. — P. 359–371.
11. **Steigemann M. and Fulland M.** On the computation of the pure Neumann problem in 2-dimensional elasticity // Intern. J. of Fracture. — 2007. — Vol. 146. — P. 265–277.

12. **Kremer I.A. and Urev M.V.** A regularization method for stationary Maxwell equations in an inhomogeneous conducting medium // Numerical Analysis and Applications. — 2009. — Vol. 2, № 2. — P. 131–139.
13. **Kremer I.A. and Urev M.V.** Solution of a regularized problem for a stationary magnetic field in a nonhomogeneous conducting medium by a finite element method // Numerical Analysis and Applications. — 2010. — Vol. 3, № 1. — P. 25–38.
14. **Savenkov E., Andrae H., and Iliev O.** An analysis of one regularization approach for solution of pure Neumann problem // Berichte des Fraunhofer ITWM. — 2008. — Vol. 137. — P. 1–27.
15. **Ivanov M.I., Kremer I.A., and Laevsky Yu.M.** On the streamline upwind scheme of solution to the filtration problem // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2019. — Vol. 16. — P. 757–776.
16. **Boffi D., Brezzi F., and Fortin M.** Mixed Finite Element Methods and Applications. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2013.
17. **Raviart P.A. and Thomas J.M.** A mixed finite element method for 2-nd order elliptic problems. Mathematical aspects of the finite element methods // Mathematical Aspects of the Finite Element Method. — New York: Springer-Verlag, 1977. — (Lecture Notes in Mathematics; 606).
18. **Ciarlet P.G.** The Finite Element Method for Elliptic Problems. — Amsterdam: North-Holland, 1978.
19. **Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А.** Матрицы и вычисления. — Москва: Наука, 1984.
20. **Barenblatt G.I., Zheltov I.P., and Kochina I.N.** Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks // J. of Applied Mathematics and Mechanics. — 1960. — Vol. 24, № 5. — P. 1286–1303.
21. **Warren J.E., Root P.J.** The behavior of naturally fractured reservoirs // Society of Petroleum Engineers J. — 1963. — Vol. 3, № 3. — P. 245–255.
22. **Ivanov M.I., Kremer I.A., and Laevsky Yu.M.** A computational model of fluid filtration in fractured porous media // Numerical Analysis and Applications. — 2021. — Vol. 14, № 2. — P. 126–144.

Поступила в редакцию 12 мая 2022 г.

После исправления 7 июля 2022 г.

Принята к печати 18 июля 2022 г.

Литература в транслитерации

1. **Peaceman D.W.** Fundamentals of Numerical Reservoir Simulation. — Amsterdam: Elsevier, 1977.
2. **Aziz K. and Settari A.** Petroleum Reservoir Simulation. — London: Applied Science Publishers, 1979.
3. **Chavent G. and Jaffre J.** Mathematical Models and Finite Elements for Reservoir Simulation. — Amsterdam: Elsevier, 1986.
4. **Ladyzhenskaya O.A.** The Mathematical Theory of Viscous Incompressible Flow. — New York: Gordon and Breach, 1969.
5. **Girault V. and Raviart P.-A.** Finite Element Methods for Navier–Stokes Equations. — Springer-Verlag, 1986.
6. **Brezzi F. and Fortin M.** Mixed and Hybrid Finite Element Methods. — New York: Springer-Verlag, 1991.
7. **Krjizhek M.** On approximation of the Neumann problem by the penalty method // Applications of Mathematics. — 1993. — Vol. 38, iss. 6. — P. 459–469.

8. **Bochev P. and Lehoucq R.B.** On the finite element solution of the pure Neumann problem // SIAM Review. — 2005. — Vol. 47, № 1. — P. 50–66.
9. **Dai X.** Finite element approximation of the pure Neumann problem using the iterative penalty method // Applied Mathematics and Computation. — 2007. — Vol. 186. — P. 1367–1373.
10. **Ivanov M.I., Kremer I.A., and Urev M.V.** Solving the pure Neumann problem by a finite element method // Numerical Analysis and Applications. — 2019. — Vol. 12, № 4. — P. 359–371.
11. **Steigemann M. and Fulland M.** On the computation of the pure Neumann problem in 2-dimensional elasticity // Intern. J. of Fracture. — 2007. — Vol. 146. — P. 265–277.
12. **Kremer I.A. and Urev M.V.** A regularization method for stationary Maxwell equations in an inhomogeneous conducting medium // Numerical Analysis and Applications. — 2009. — Vol. 2, № 2. — P. 131–139.
13. **Kremer I.A. and Urev M.V.** Solution of a regularized problem for a stationary magnetic field in a nonhomogeneous conducting medium by a finite element method // Numerical Analysis and Applications. — 2010. — Vol. 3, № 1. — P. 25–38.
14. **Savenkov E., Andrae H., and Iliev O.** An analysis of one regularization approach for solution of pure Neumann problem // Berichte des Fraunhofer ITWM. — 2008. — Vol. 137. — P. 1–27.
15. **Ivanov M.I., Kremer I.A., and Laevsky Yu.M.** On the streamline upwind scheme of solution to the filtration problem // Siberian Electronic Mathematical Reports. — 2019. — Vol. 16. — P. 757–776.
16. **Boffi D., Brezzi F., and Fortin M.** Mixed Finite Element Methods and Applications. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2013.
17. **Raviart P.A. and Thomas J.M.** A mixed finite element method for 2-nd order elliptic problems. Mathematical aspects of the finite element methods // Mathematical Aspects of the Finite Element Method. — New York: Springer-Verlag, 1977. — (Lecture Notes in Mathematics; 606).
18. **Ciarlet P.G.** The Finite Element Method for Elliptic Problems. — Amsterdam: North-Holland, 1978.
19. **Voevodin V.V., Kuznetsov Yu.A.** Matritsy i vychisleniya. — Moskva: Nauka, 1984.
20. **Barenblatt G.I., Zheltov I.P., and Kochina I.N.** Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocks // J. of Applied Mathematics and Mechanics. — 1960. — Vol. 24, № 5. — P. 1286–1303.
21. **Warren J.E., Root P.J.** The behavior of naturally fractured reservoirs // Society of Petroleum Engineers J. — 1963. — Vol. 3, № 3. — P. 245–255.
22. **Ivanov M.I., Kremer I.A., and Laevsky Yu.M.** A computational model of fluid filtration in fractured porous media // Numerical Analysis and Applications. — 2021. — Vol. 14, № 2. — P. 126–144.

