

### УСТОЙЧИВОСТЬ ВРАЩАЮЩЕЙСЯ НЕВЕСОМОЙ ЖИДКОЙ ФАЗЫ ПРИ ЗОННОЙ ПЛАВКЕ

На основе численного анализа определены параметры критических равновесных состояний невесомого равномерно вращающегося расплава при моделировании выращивания монокристаллов методом плавающей зоны. Основное внимание уделено значениям угла роста, отличным от нулевого.

Пусть жидкость плотности  $\rho$  занимает область, ограниченную торцами двух соосных цилиндрических стержней одинакового радиуса  $\xi_0$  и свободной поверхностью  $\Gamma$ . Внешнее силовое поле отсутствует, система вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг оси стержней  $\zeta$  и находится в состоянии равновесия под действием центробежных сил и сил поверхностного натяжения. Считаем, что  $\Gamma$  осесимметрична, а касательная к ее осевому сечению (профилю) в точке контакта с кромкой одного из стержней наклонена к горизонту (плоскости торца) под заданным углом  $\beta_0$  (см. рисунок). Требуется исследовать устойчивость такого состояния.

Эта задача моделирует задачу об устойчивости вращающегося невесомого расплава при выращивании монокристаллов методом зонной плавки. При этом на торце, являющемся фронтом затвердевания, задается угол  $\beta_0 = \pi/2 - \gamma$  ( $\gamma$  — угол роста [1]). Значение  $\gamma$  близко к нулю и для реальных полупроводниковых материалов (например, кремния и германия) равно  $10-15^\circ$ .

Введем цилиндрическую систему координат  $(\xi, \theta, \zeta)$  с началом в центре торца и осью  $\zeta$ , направленной к жидкости. Длину дуги  $\tau$  будем отсчитывать вдоль профиля от точки, для которой  $\zeta = 0$ . Выберем линейный масштаб  $p^{-1/3}$  ( $p = \rho\omega^2/2\sigma$ ,  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения) и перейдем к безразмерным величинам  $r = \xi p^{1/3}$ ,  $r_0 = \xi_0 p^{1/3}$ ,  $z = \zeta p^{1/3}$ ,  $s = \tau p^{1/3}$ . Тогда форма профиля определяется как решение  $r(s)$ ,  $z(s)$  задачи [2]:

$$(1) \quad \begin{aligned} r'' &= -z'(r^2 + c - z'/r), \quad z'' = r'(r^2 + c - z'/r), \\ r(0) &= r_0, \quad r'(0) = \cos \beta_0, \quad z(0) = 0, \quad z'(0) = \sin \beta_0. \end{aligned}$$

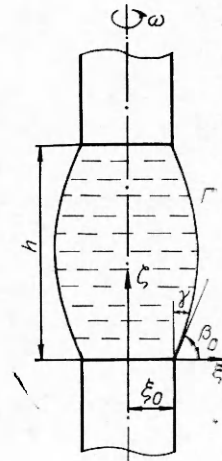
Согласно методике [2, 3], при выбранном значении параметра  $c$  критической точкой на решении задачи (1) будет первая точка  $s = s_*$ , в которой одна из функций  $d_0(s)$  или  $\varphi_1(s)$  изменяет знак. Здесь

$$d_0(s) = \varphi_{01}(s) \int_0^s r(\varphi_{02} - \varphi_{03}) ds + [\varphi_{03}(s) - \varphi_{02}(s)] \int_0^s r\varphi_{01} ds,$$

а функции  $\varphi_{01}(s)$ ,  $\varphi_{02}(s)$ ,  $\varphi_{03}(s)$  и  $\varphi_1(s)$  находятся как решения следующих задач:

$$\begin{aligned} L\varphi_{01} &= 0, \quad \varphi_{01}(0) = 0, \quad \varphi'_{01}(0) = 1, \quad L\varphi_{02} = 0, \quad \varphi_{02}(0) = 1, \quad \varphi'_{02}(0) = 0, \\ L\varphi_{03} &= 1, \quad \varphi_{03}(0) = 1, \quad \varphi'_{03}(0) = 0, \quad L\varphi_1 - \varphi_1/r^2 = 0, \quad \varphi_1(0) = 0, \quad \varphi'_1(0) = 1, \\ L\varphi &\equiv \varphi'' + r'\varphi'/r + [2rz' + (r^2 + c - z'/r)^2 + (z'/r)^2]\varphi. \end{aligned}$$

Поскольку в конечной точке  $s = s_1$  профиля  $r(s_1) = r_0$ , то для определения критического профиля при заданных  $r_0$  и  $\beta_0$  необходимо так



$r_0$	$\beta_0=75^\circ$			$\beta_0=80^\circ$		
	$c_*$	$\eta_*$	$V_*$	$c_*$	$\eta_*$	$V_*$
0,050	3,728	24,983	50,936	3,699	25,419	51,039
0,100	3,015	15,747	16,252	3,018	16,051	15,833
0,150	2,599	12,021	8,570	2,617	12,308	8,180
0,215	2,258	9,310	4,848	2,277	9,628	4,580
0,300	1,925	7,231	3,027	1,952	7,570	2,815
0,464	1,402	4,897	1,865	1,471	5,292	1,636
0,600	1,018	3,765	1,537	1,056	4,009	1,392
0,800	0,481	2,691	1,319	0,494	2,798	1,229
1,000	-0,069	1,991	1,228	-0,063	2,062	1,159
1,200	-0,644	1,548	1,174	-0,642	1,607	1,118
1,400	-1,264	1,247	1,138	-1,267	1,295	1,093
1,600	-1,941	1,031	1,113	-1,948	1,068	1,076
1,800	-2,683	0,871	1,095	-2,692	0,901	1,064
2,154	-4,167	0,672	1,073	-4,179	0,692	1,050
2,300	-4,842	0,611	1,067	-4,855	0,628	1,045
2,600	-6,359	0,511	1,056	-6,373	0,524	1,038
2,900	-8,046	0,435	1,048	-8,061	0,446	1,032
3,500	-11,942	0,329	1,037	-11,958	0,337	1,025
4,642	-21,302	0,216	1,025	-21,322	0,221	1,017
7,000	-48,827	0,118	1,015	-48,847	0,119	1,010

подобрать значение  $c$ , чтобы  $r(s_*) = r_0$ . Перемена знака  $d_0(s)$  или  $\varphi_1(s)$  означает потерю устойчивости соответственно относительно осесимметричных или неосесимметричных возмущений.

Математическая формулировка и предварительный анализ этой задачи даны в [3]. В частности, рассмотрен случай нулевого угла роста. Показано, что здесь устойчивыми могут быть лишь поверхности в виде кругового цилиндра  $r(s) \equiv r_0$ . Из [4] вытекает, что цилиндрическая поверхность устойчива, если

$$\eta < 2\pi / (1 + 2r_0^3)^{1/2} \text{ при } r_0^3 \leq 1/6,$$

$$\eta < \pi / (2r_0^3)^{1/2} \text{ при } r_0^3 \geq 1/6$$

( $\eta = h/\xi_0$ ,  $h$  — размерная высота зоны). При нарушении указанных неравенств происходит потеря устойчивости в первом случае относительно осесимметричных, а во втором относительно неосесимметричных возмущений.

Перейдем к изучению ненулевых значений угла роста. Граница области устойчивости всех осесимметричных равновесных состояний в невесомости при отсутствии вращения ( $r_0 = 0$ ) построена и проанализирована в [5]. Там показано, что все выпуклые (бочкообразные) состояния с  $0 < \beta_0 < \pi/2$  устойчивы, т. е. линия, отвечающая всем таким состояниям с заданным  $\beta_0$ , никогда не пересекается с границей области устойчивости. Вдоль таких линий при  $\eta \rightarrow \infty$  относительный объем  $V \equiv v / (\pi \xi_0^2 h)$  ( $v$  — размерный объем жидкости) также стремится к бесконечности. Поэтому область устойчивости, построенная в переменных ( $\eta$ ,  $V$ ), является неограниченной. В [6] исследован характер деформации границы области устойчивости при наличии вращения ( $r_0 > 0$ ). Расчет этой границы для  $r_0 = \sqrt[3]{0,1}$  и  $r_0 = \sqrt[3]{0,5}$  показывает, что здесь область устойчивости становится ограниченной и сжимается тем больше, чем больше  $r_0$ . Однако результаты [6] не позволяют определить параметры критических состояний зоны с заданной величиной  $\beta_0 \neq \pi/2$  ни для одного значения  $r_0 > 0$ .

Такая задача решена численно по методике, описанной выше, для  $\beta_0 = 75^\circ$  и  $80^\circ$  и серии значений  $r_0$ . (Часто используемое в литературе безразмерное число Вебера  $We \equiv \rho \omega^2 \xi_0^3 / 2\sigma$  равно  $r_0^3$ .) Оказалось, что при  $r_0 \geq 0,05$  критические состояния зоны всегда бочкообразны (и симметричны относительно экваториальной плоскости  $\xi = h/2$ ), а устойчивость теряется относительно неосесимметричных возмущений, нормальная со-

ставляющая которых относительно равновесной поверхности пропорциональна  $\varphi_1(s) \cos \theta$ .

В таблице для  $\beta_0 = 75, 80^\circ$  и ряда значений  $r_0$  приведены параметры  $c = c_*$ ,  $\eta = \eta_*$ ,  $V = V_*$ , отвечающие критическому состоянию зоны. При  $r_0 \rightarrow 0$  имеем  $\eta_* \rightarrow \infty$  и  $V_* \rightarrow \infty$ , что полностью согласуется с результатами [5]. Устойчивые состояния являются бочкообразными, и для них  $c > c_*$ ,  $\eta < \eta_*$ ,  $V < V_*$ .

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Вильке К. Т. Выращивание кристаллов. — Л.: Недра, 1977.
2. Бабский В. Г., Копачевский Н. Д., Мышкис А. Д. и др. Гидромеханика невесомости. — М.: Наука, 1976.
3. Слобожанин Л. А. Исследование задач гидростатики, моделирующих процесс зонной плавки // Изв. АН СССР. Сер. физ. — 1985. — Т. 49, № 4.
4. Слобожанин Л. А. Об устойчивости цилиндрического равновесного состояния вращающейся жидкости // Мат. физика и функциональный анализ: Сб. науч. тр./АН УССР, ФТИИТ. — Харьков, 1971. — Вып. 2.
5. Слобожанин Л. А. Задачи устойчивости равновесия жидкости, возникающие в вопросах космической технологии // Гидромеханика и тепломассообмен в невесомости. — М.: Наука, 1982.
6. Бармин П. В., Вершинин Б. Е., Левитина И. Г., Сенченков А. С. Устойчивость жидкой вращающейся зоны // Изв. АН СССР. Сер. физ. — 1985. — Т. 49, № 4.

г. Харьков

Поступила 27/VI 1991 г.

в окончательном варианте — 30/IX 1991 г.

УДК 532.59 : 517.19

В. А. Вахненко, В. В. Кулич

#### ДЛИННОВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

Развитие техники эксперимента показало, что внутренняя структура среды влияет на волновые движения и процессы переноса. С ростом амплитуды волны возрастающую роль начинают играть нелинейные эффекты. К тому же высокоградиентные быстропротекающие процессы неравновесны. Все эти особенности необходимо учитывать при математическом моделировании волн в реальных средах.

Существует класс явлений, в которых характерный рассматриваемый размер  $L$  во много раз больше размеров неоднородностей среды  $\epsilon$  ( $L \gg \epsilon$ ). Недостаток знаний о микросвойствах неоднородной среды создает принципиальные трудности для прямого решения таких задач. Численные расчеты затруднены огромными затратами машинного времени. Один из путей изучения неоднородной среды — метод осреднения по пространству.

Осредненное описание имеет асимптотическую природу. Существуют различные математические методы асимптотического осреднения длинноволновых процессов с детальным учетом структуры. В настоящей работе для моделирования волн в баротропной периодической среде применяется асимптотический метод осреднения, развитый для композитов регулярной структуры [1, 2]. Процессы в неоднородной среде могут быть описаны уравнениями с быстроосциллирующими коэффициентами. Для сред регулярной структуры быстроосциллирующие коэффициенты есть периодические функции. Суть асимптотического осреднения заключается в применении метода многих масштабов [3] в сочетании с пространственным осреднением [4]. Метод дает асимптотически правильное приближение к решению. В общем случае получается система интегродифференциальных уравнений. Иногда задачу можно свести к осредненным характеристикам волновых полей. В то же время, решая интегродифференциальную систему, можно найти численный метод, в котором удастся шаг по про-