

УДК 532.546

## ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ РАСЧЕТЫ СЛОИСТЫХ ПЛАСТОВ НА ОСНОВЕ МОДИФИЦИРОВАННЫХ ОТНОСИТЕЛЬНЫХ ПРОНИЦАЕМОСТЕЙ

С. П. Плохотников, В. В. Елисеенков

Казанский государственный технологический университет, 420015 Казань

Исследуется возможность понижения размерности задачи о двухфазной фильтрации в слоистых пластах путем введения модифицированных фазовых проницаемостей вместо исходных относительных проницаемостей, являющихся коэффициентами исходной системы уравнений в рамках модели Баклея — Леверетта. Предложены модифицированные проницаемости для случая, когда относительные проницаемости каждой фазы представлены различными аналитическими зависимостями для отдельных пропластков. Численные одномерные расчеты с этими проницаемостями хорошо согласуются с решением двумерной задачи.

Рассмотрим двумерную  $(x, z)$  задачу двухфазного вытеснения нефти водой в слоисто-неоднородном пласте между двумя галереями при заданном перепаде давлений. Полагаем, что жидкости несжимаемы, капиллярные и гравитационные силы отсутствуют и течение описывается моделью Баклея — Леверетта. Математическая постановка этой задачи [1] при изотермической фильтрации имеет вид

$$\operatorname{div}(K_{\Sigma} \operatorname{grad} P) = 0, \quad \operatorname{div}(FK_{\Sigma} \operatorname{grad} P) = m \frac{\partial S}{\partial t},$$

$$K_{\Sigma} = K(z)(K_{\text{в}}(S)/\mu_{\text{в}} + K_{\text{н}}(S)/\mu_{\text{н}}), \quad F = K(z)K_{\text{в}}(S)/(\mu_{\text{в}}K_{\Sigma}).$$

Начальные и граничные условия для давления  $P$  и водонасыщенности  $S$ :  $P|_{x=0} = P_1$ ,  $P|_{x=L} = P_2$ ,  $S|_{x=0} = S_{\max} = S^*$ ,  $S|_{t=0} = S_{\min} = S_*$ , условия сопряжения для давления и вертикальных потоков фаз на границах пропластков, из которых состоит слоистый пласт:  $P^+ = P^-$ ,  $v_{\text{в},z}^+ = v_{\text{в},z}^-$ ,  $v_{\text{н},z}^+ = v_{\text{н},z}^-$ , условия непроницаемости подошвы и кровли пласта:  $\partial P / \partial z|_{z=0, H} = 0$ . Здесь  $K(z)$  — абсолютная проницаемость пласта, состоящего из гидродинамически связанных однородных по горизонтали пропластков с различными абсолютными проницаемостями (зависимость  $K(z)$  подчиняется вероятностному закону распределения с плотностью  $f(k)$ );  $K_{\text{в}}(S)$ ,  $K_{\text{н}}(S)$  — относительные проницаемости воды и нефти соответственно, определяемые по кернам;  $\mu_{\text{в}}$ ,  $\mu_{\text{н}}$  — вязкости соответствующих фаз;  $H$  — мощность (толщина) пласта;  $L$  — расстояние между нагнетательной и эксплуатационной галереями;  $m$  — пористость;  $S^*$  — водонасыщенность на нагнетательной галерее.

Численное решение задачи получено с использованием конечно-разностной схемы (попеременно-треугольный метод [2]). Расчеты проведены для пласта, состоящего из пяти однородных пропластков одинаковой толщины. При этом функция  $K(z)$  задавалась следующим образом: однородное по толщине пласта распределение, экспоненциальное распределение и распределение Максвелла.

Рассмотрим зависимость коэффициента нефтеотдачи  $\eta$  от времени разработки пласта  $t$  или от прокачанных поровых объемов  $\tau$  (рис. 1). Поскольку пропластки в исходном пласте могут быть расположены по вертикали в различном порядке, зависимость  $\eta(\tau)$  образует множество кривых, существенно различающихся между собой. На рис. 1 приведены

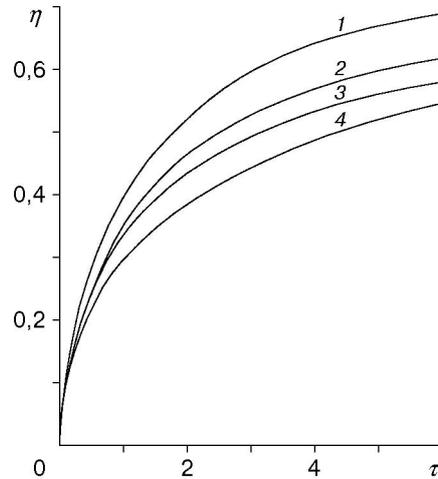


Рис. 1. Зависимость коэффициента нефтеотдачи  $\eta$  от  $\tau$  (однородное распределение  $K(z)$  по пропласткам;  $K_B(S)$ ,  $K_H(S)$  — линейные функции):  
1 — решение  $C$ ; 2, 3 — верхняя и нижняя границы эталонных решений  $A_i$ ; 4 — решение  $B$

предельные значения этого множества. Кривая 2 соответствует пласту, в котором граничат пропластки с наибольшим и наименьшим значениями абсолютной проницаемости. При этом между ними возникают мощные вертикальные перетоки, что обеспечивает наибольшее вытеснение нефти водой. Кривая 3 соответствует пласту с изолированными пропластками (границы пропластков непроницаемы). В этом случае перетоки отсутствуют, поэтому наблюдается наименьшее вытеснение нефти. Расчеты проводились для следующих значений абсолютной проницаемости пропластков:  $K_1 = 0,1$  Д,  $K_2 = 0,3$  Д,  $K_3 = 0,5$  Д,  $K_4 = 0,7$  Д,  $K_5 = 0,9$  Д. Здесь  $K(z)$  — кусочно-непрерывная функция; коэффициент вариации слоистой неоднородности по толщине пласта  $V = 0,55$  близок к максимальному значению при заданном однородном распределении.

Относительные проницаемости записывались в виде

$$K_B(S) = K_{B_0}(S_{\Pi}(S)), \quad K_H(S) = K_{H_0}(1 - S_{\Pi}(S)), \quad S_{\Pi}(S) = (S - S_*)/(S^* - S_*), \quad (1)$$

где  $S_{\Pi}$  — “подвижная” вода. Численное решение двумерной  $(x, z)$  задачи, полученное с использованием фазовых проницаемостей (1) и указанных выше абсолютных проницаемостей  $K_j$  ( $j = \overline{1, 5}$ ) пропластков, будем считать эталонным и обозначать  $A_i$ . Приведенные на рис. 1 кривые 2 и 3 ограничивают сверху и снизу множество эталонов  $A_i$ .

Из результатов расчетов следует, что аналогичное расположение кривых наблюдается и для других законов распределения  $K(z)$ , т. е. для каждого закона распределения имеется соответствующее множество эталонов  $A_i$ .

Уменьшим размерность исходной двумерной двухфазной задачи. Вместо нее будем решать одномерную задачу в рамках модели Баклея — Леверетта. В качестве абсолютной проницаемости примем среднее по толщине пласта значение  $K^* = \frac{1}{H} \int_0^H K(z) dz$ , а для определения относительных проницаемостей используем те же зависимости (1), что и в двумерной задаче. Полученное численное решение назовем решением  $C$ . Результаты расчетов показаны на рис. 1 (кривая 1).

Далее относительные проницаемости в одномерной задаче будем использовать в виде

$$K'_B(S) = K_B(S)A(S), \quad K'_H(S) = K_H(S)B(S), \quad (2)$$

где  $A(S)$ ,  $B(S)$  — поправочные коэффициенты, которые будем находить способом, изложенным ниже. Численное решение этой одномерной задачи назовем решением  $B$  (кривая 4 на рис. 1).

Рассмотрим двумерное двухфазное течение в слоистом пласте. Исходные относительные проницаемости заданы в виде (1). В силу того, что только в случае линейной зависимости  $K_B(S)$ ,  $K_H(S)$  при численном решении задачи двухфазной фильтрации происходит продвижение максимальной водонасыщенности  $S^*$  от нагнетательной галереи к эксплуатационной [6], можно говорить о полном вытеснении подвижной нефти в наиболее проницаемых пропластках, где функция  $S(x, z)$  достигла значения  $S^*$ , т. е. о сильном “языкообразовании” [3]. На основании этого принято допущение о струйном характере течения [4, 5] и вместо двумерной двухфазной фильтрации рассматривается струйное течение в слоистом пласте. При этом допускается, что пласт состоит из множества изолированных пропластков, свойства которых постоянны по горизонтали и переменны по вертикали. Вода вытесняет нефть по пропласткам и движется в струях различной протяженности. При этом в пропластках с большей проницаемостью движение происходит быстрее. Поэтому в каждом вертикальном сечении пропластки можно объединить в две зоны: зону воды толщиной  $H_B$ , где  $S(x, z) = S^*$ , и зону нефти толщиной  $H_H$ , где  $S(x, z) = S_*$ . Из этих допущений следует, что в каждом вертикальном сечении пласта можно найти абсолютную проницаемость  $\bar{K}$  такую, что выполняется соотношение  $H = H_B + H_H$ , где  $H_B = \sum_{i=1}^{n_1} H_i$

при  $K_i > \bar{K}$ ;  $H_H = \sum_{j=1}^{n_2} H_j$  при  $K_j \leq \bar{K}$  ( $K_i$ ,  $K_j$ ,  $H_i$ ,  $H_j$  — абсолютные проницаемости и толщины пропластков;  $n_1$ ,  $n_2$  — количество пропластков в пласте).

Рассмотрим часть объема пор пласта  $\Delta V_B$ , толщиной  $H_B$  и длиной  $\Delta x$ , где в момент времени  $t$  находится вода ( $S(x, z) = S^*$ ). Рассмотрим также весь объем пор  $\Delta V$ , имеющий толщину  $H$  и длину  $\Delta x$ . При этом, очевидно,  $\Delta V = H \Delta x m$ ,  $\Delta V_B = H_B \Delta x m S^* + (H - H_B) \Delta x m S_*$ . В каждой точке  $x$  определим водонасыщенность:  $\tilde{S}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (\Delta V_B / \Delta V)$  [6].

Эта величина, очевидно, равна средней водонасыщенности по толщине пласта при струйном течении:  $\tilde{S}(x) = \frac{1}{H} \int_0^H S(x, z) dz$ .

С учетом сказанного выше струйное течение в слоистом пласте будем рассматривать как одномерное двухфазное течение со средним значением  $K^*$  и водонасыщенностью  $S(x)$ , близкой к  $\tilde{S}(x)$ . Для того чтобы записать уравнения неразрывности для одномерной двухфазной фильтрации, в данном случае необходимо предположить, что имеется достаточно большое количество различных пропластков в слоистом пласте, так что  $H_B$  и  $\tilde{S}(x)$  — непрерывные функции, что и предполагается, так как рассматривается непрерывное распределение  $K(z)$ . В этих одномерных уравнениях неразрывности используются осредненные значения гидро- и нефтепроводности при допущении о струйном характере течения по пропласткам [4, 5] и выполнении соотношения  $H = H_B + H_H$ . С учетом этого в уравнениях неразрывности используются абсолютная проницаемость  $K^*$  и модифицированные фазовые проницаемости (2), которые имеют вид

$$K'_B(S) = K_{B_0}(S_{\Pi}(S))\bar{K}_B(S)/K^*, \quad K'_H(S) = K_{H_0}(1 - S_{\Pi}(S))\bar{K}_H(S)/K^*. \quad (3)$$

Средние проницаемости  $\bar{K}_B(S)$ ,  $\bar{K}_H(S)$  получаем, используя функцию  $f(k)$  — плотность

вероятности распределения  $K(z)$  ( $a \leq K(z) \leq b$ ):

$$\bar{K}_B(S) = \int_{\bar{K}}^b kf(k) dk / \int_{\bar{K}}^b f(k) dk, \quad \bar{K}_H(S) = \int_a^{\bar{K}} kf(k) dk / \int_a^{\bar{K}} f(k) dk. \quad (4)$$

При этом величину  $\bar{K}$  находим по заданной водонасыщенности  $S(x)$  путем численного решения уравнения

$$1 - S_{\Pi}(S) = \int_a^{\bar{K}} f(k) dk. \quad (5)$$

Для исходных линейных проницаемостей  $K_B(S)$ ,  $K_H(S)$  (1) коэффициенты  $A(S)$ ,  $B(S)$  запишем в виде

$$A(S) = \bar{K}_B(S)/K^*, \quad B(S) = \bar{K}_H(S)/K^*. \quad (6)$$

Для произвольного распределения функции  $K(z)$  модифицированные проницаемости  $K'_B(S)$ ,  $K'_H(S)$  находим численно по формулам (3)–(6). В случае однородного по толщине распределения функции  $K(z)$  легко получаются аналитические зависимости

$$K'_B(S) = K_{B0} S_{\Pi}(S) [1 + V\sqrt{3}(1 - S_{\Pi}(S))], \quad K'_H(S) = K_{H0} (1 - S_{\Pi}(S)) [1 + V\sqrt{3}(1 - S_{\Pi}(S))], \quad (7)$$

где  $V$  — коэффициент вариации слоистой неоднородности.

Расчеты одномерной задачи двухфазной фильтрации по формулам (7) приведены на рис. 1. Кривая 4 является нижней границей этих решений, кривая 1 — верхней. Таким образом, эталоны  $A_i$  лежат в диапазоне одномерных решений  $B$  и  $C$ .

Из формул (3)–(7) следует, что модифицированные проницаемости получаются из линейных относительных проницаемостей (1) путем умножения на коэффициенты  $A(S)$ ,  $B(S)$ . При этом при рассмотрении слоистого пласта, в котором значения  $K(z)$  практически не изменяются (т. е. пласт предельно однородный), имеем  $A(S) = B(S) = 1$ . Последнее равенство очевидно, так как в таком пласте проницаемость зоны воды равна проницаемости зоны нефти и средней проницаемости самого пласта. В этом случае имеем  $K'_B(S) = K_B(S)$ ,  $K'_H(S) = K_H(S)$ , что соответствует предельному случаю (однородному пласту).

Однако лабораторные исследования показывают, что  $K_B(S)$ ,  $K_H(S)$  — чаще всего нелинейные функции. Иногда их принимают в виде квадратичных или кубических парабол:

$$K_B(S) = K_{B0} (S_{\Pi}(S))^{\alpha}, \quad K_H(S) = K_{H0} (1 - S_{\Pi}(S))^{\beta}, \quad (8)$$

где  $\alpha = 2, 3$ ,  $\beta = 2, 3$ . При этом предположение о струйном характере течения в слоистом пласте невозможно, так как в случае нелинейных зависимостей  $K_B(S)$ ,  $K_H(S)$  отсутствуют продвижение сечения максимальной водонасыщенности  $S^*$  [6] и полное вытеснение в каждом из пропластков пласта. Поэтому модифицированные проницаемости (3) невозможно получить осреднением.

Будем решать одномерную задачу с модифицированными проницаемостями вида (2), которые получаются коррекцией исходных нелинейных зависимостей  $K_B(S)$ ,  $K_H(S)$  (8) с помощью коэффициентов  $A(S)$ ,  $B(S)$ . В случае  $A(S) = B(S) = 1$  имеем одномерное решение  $C$  (см. рис. 1). Если эти коэффициенты принять в том же виде, что и для линейного случая (см. (4)–(6)), то получим одномерное решение  $B$  (см. рис. 1). На рис. 2 приведены зависимости  $K_B(S)$ ,  $K_H(S)$ ,  $K'_B(S)$ ,  $K'_H(S)$  (3) в случае  $\alpha = \beta = 3$  при однородном распределении  $K(z)$  по пропласткам. Расположение кривых на рис. 2 такое же, как и в случае линейных зависимостей  $K_B(S)$ ,  $K_H(S)$  [4].

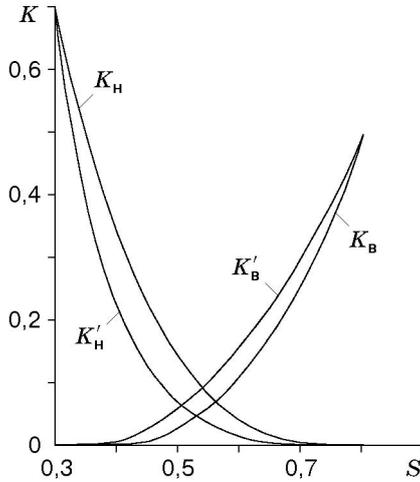


Рис. 2

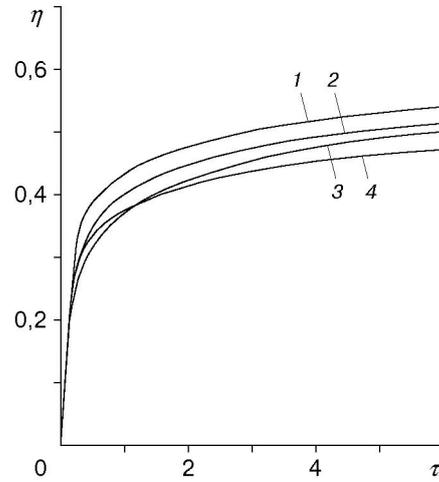


Рис. 3

Рис. 2. Зависимости  $K_H(S)$ ,  $K'_H(S)$ ,  $K_B(S)$ ,  $K'_B(S)$  (однородное распределение  $K(z)$  по пропласткам;  $K_B(S)$ ,  $K_H(S)$  — кубические функции)

Рис. 3. Зависимость  $\eta(\tau)$  (однородное распределение  $K(z)$  по пропласткам;  $K_B(S)$ ,  $K_H(S)$  — кубические функции) (обозначения те же, что на рис. 1)

На рис. 3 приведены зависимости  $\eta(\tau)$  при  $\alpha = \beta = 3$ . Как и в линейном случае (см. рис. 1), эталоны  $A_i$  лежат в диапазоне одномерных решений  $B$  и  $C$ . Кроме того, в рассмотренном случае нелинейных зависимостей  $K_B(S)$ ,  $K_H(S)$  при переходе к предельно однородному пласту модифицированные проницаемости (2) совпадают с исходными проницаемостями, так как  $A(S) = B(S) = 1$ . Для рассматриваемой задачи поправочные коэффициенты впервые предложены в работе [7]. Таким образом, поправочные коэффициенты для струйного течения применимы и для нелинейного случая.

Рассмотрим более общий случай задания в слоистом пласте зависимостей  $K_B(S)$ ,  $K_H(S)$ . Известно, что для различных пропластков относительные проницаемости  $K_B(S)$ ,  $K_H(S)$  часто описываются различными аналитическими зависимостями. При этом построить общие для всего пласта зависимости  $K'_B(S)$ ,  $K'_H(S)$  достаточно сложно. Рассмотрим случай, когда проницаемости заданы в виде  $K_B(S) = K_{B0}(S_{\Pi}(S))^{\alpha_i}$ ,  $K_H(S) = K_{H0}(1 - S_{\Pi}(S))^{\beta_i}$ , где  $\alpha_i, \beta_i$  — константы, зависящие от номера  $i$  пропластка ( $\alpha_i, \beta_i \geq 1$ ). По аналогии с предыдущими одномерными решениями  $C$  будем использовать средние по толщине пласта значения проницаемостей

$$\langle K_B(S) \rangle = \frac{1}{H} \sum_{i=1}^n H_i K_B(S), \quad \langle K_H(S) \rangle = \frac{1}{H} \sum_{i=1}^n H_i K_H(S). \tag{9}$$

Кроме того, используется другой, более сложный подход:

$$\bar{K}'_B(S) = \langle K_B(S) \rangle A(S), \quad \bar{K}'_H(S) = \langle K_H(S) \rangle B(S). \tag{10}$$

Зависимости  $\bar{K}'_B(S)$ ,  $\bar{K}'_H(S)$  получаются коррекцией средних по толщине проницаемостей с помощью коэффициентов  $A(S)$ ,  $B(S)$  (4)–(6). Эти коэффициенты получены для исходного слоистого пласта при допущении о струйном характере вытеснения в нем для частного случая линейных зависимостей  $K_B(S)$ ,  $K_H(S)$ , одинаковых для всего слоистого пласта.

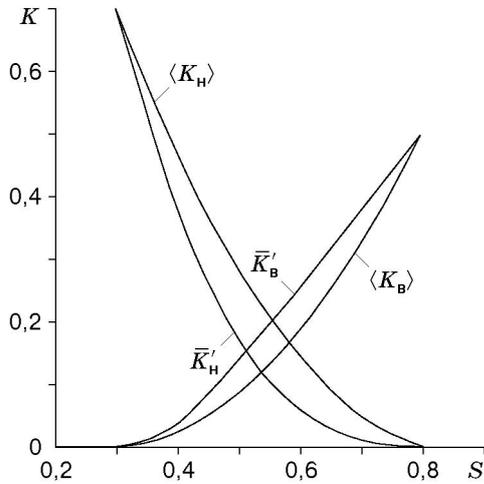


Рис. 4

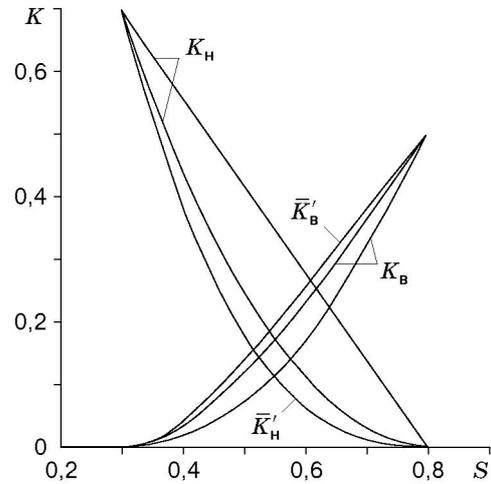


Рис. 5

Рис. 4. Значения средних проницаемостей  $\langle K_B \rangle$ ,  $\langle K_H \rangle$ , рассчитанные по (9), и модифицированных проницаемостей  $\bar{K}'_B$ ,  $\bar{K}'_H$ , рассчитанные по (10)

Рис. 5. Значения проницаемостей  $K_B$ ,  $K_H$ , полученные по ядрам, и модифицированных проницаемостей  $\bar{K}'_B$ ,  $\bar{K}'_H$ , рассчитанные по (10)

В качестве примера, как и выше, рассмотрим пласт, состоящий из пяти пропластков одинаковой толщины, но с разными значениями проницаемостей:  $K_B(S) = K_{B0}(S_{\Pi}(S))^2$  при  $i = 1, 2, 4, 5$ ,  $K_B(S) = K_{B0}(S_{\Pi}(S))^{1,5}$  при  $i = 3$ ,  $K_H(S) = K_{H0}(1 - S_{\Pi}(S))^2$  при  $i = 1, 2, 4, 5$ ,  $K_H(S) = K_{H0}(1 - S_{\Pi}(S))$  при  $i = 3$ .

На рис. 4 приведены значения средних проницаемостей (9), построенных для данного пласта, на рис. 5 — значения модифицированных средних (10) и экспериментальных проницаемостей. На рис. 6 представлена зависимость коэффициента нефтеотдачи от времени разработки пласта в случае одномерного вытеснения (по формулам (9), (10)), а также в случае двумерного профильного течения (эталонные  $A_i$ ). Полученные результаты аналогичны данным, представленным на рис. 1, 3. Эталонные решения  $A_i$  расположены между двумя одномерными решениями  $B$  и  $C$ .

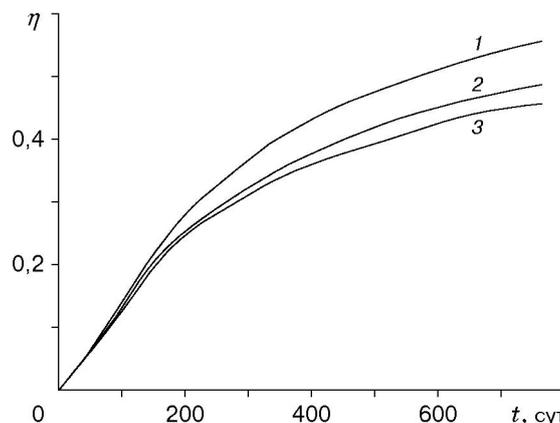


Рис. 6. Зависимость коэффициента нефтеотдачи от времени разработки пласта (однородное распределение  $K(z)$  по пропласткам;  $K_B(S)$ ,  $K_H(S)$  — нелинейные функции;  $V = 0,55$ ): 1 — решение  $C$ ; 2 — эталонное решение  $A$ ; 3 — решение  $B$

Численные расчеты при различных сочетаниях функций  $K_v(S)$ ,  $K_n(S)$  для пропластков исходного слоистого пласта при однородном по толщине распределении, а также при различных распределениях показали возможность использования для расчетов выражений для модифицированных проницаемостей (2), основанных на результатах, полученных для струйного течения. Это позволяет применять результаты расчетов наиболее простого (струйного) вытеснения для анализа более сложных случаев вытеснения нефти водой в слоистых пластах.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Чекалин И. А. Численные решения задач фильтрации в водонефтяных пластах. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1982.
2. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
3. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. М.: Недра, 1984.
4. Булыгин В. Я. Движение двухжидкостных систем в неоднородных пластах // Теоретические и экспериментальные вопросы рациональной разработки нефтяных месторождений. Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1969. С. 76–85.
5. Hearn C. L. Simulation of stratified water-flooding by pseudo relative curves // J. Petrol. Technol. 1971. N 7. P. 805–813.
6. Чарный И. А. Подземная гидрогазодинамика. М.: Гостоптехиздат, 1963.
7. Plohotnikov S. P., Skvortsov V. V., Plohotnikova L. A. Method of modified permeability to phase construction // Flow through porous media: fundamentals and reservoir engineering applications: Proc. of the Intern. conf., Moscow, 21–26 Sept. 1992. М.: Inst. of Problems of Mech., 1992. P. 107, 108.

*Поступила в редакцию 22/II 1999 г.,  
в окончательном варианте — 24/I 2001 г.*

---