

УДК 531.36

Об одном подходе к качественному исследованию нелинейных динамических систем

В.Д. Иртегов, Т.Н. Титоренко

Институт динамики систем и теории управления им. В.М. Матросова Сибирского отделения Российской академии наук, ул. Лермонтова, 134, Иркутск, 664033

E-mails: irteg@icc.ru (Иртегов В.Д.), titor@icc.ru (Титоренко Т.Н.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 1, Vol. 15, 2022.

Иртегов В.Д., Титоренко Т.Н. Об одном подходе к качественному исследованию нелинейных динамических систем // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2022. — Т. 25, № 1. — С. 59–75.

На примере анализа уравнений Эйлера на алгебрах Ли обсуждается подход к качественному исследованию дифференциальных уравнений, возникающих в ряде задач математической физики, в том числе динамике твердого тела. Подход основан на сочетании методов компьютерной алгебры и качественного анализа дифференциальных уравнений. Рассматриваются вопросы применения компьютерной алгебры в задачах выделения стационарных инвариантных множеств и исследования их устойчивости. Для указанных уравнений найдены стационарные инвариантные множества различной размерности и исследована их устойчивость по Ляпунову.

DOI: 10.15372/SJNM20220105

Ключевые слова: нелинейные динамические системы, качественный анализ, компьютерная алгебра, инвариантные множества, устойчивость.

Irtegov V.D., Titorenko T.N. On one approach to the qualitative analysis of nonlinear dynamical systems // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2022. — Vol. 25, № 1. — P. 59–75.

By an example of the investigation of the Euler equations on Lie algebras, we discuss an approach to the qualitative analysis of differential equations arising in a number of problems of mathematical physics, including rigid body dynamics. The approach proposed is based on a combination of methods of computer algebra and qualitative analysis of differential equations. We consider the applications of computer algebra in the problems of finding stationary invariant sets and studying their stability. For the equations under study, stationary invariant sets of various dimension have been found and their stability in the Lyapunov sense has been investigated.

Keywords: nonlinear dynamical systems, qualitative analysis, computer algebra, invariant sets, stability.

1. Введение

Как показано в [1], многие задачи математической физики приводят к уравнениям Эйлера на конечномерных алгебрах Ли различной размерности. Такая связь физических задач с алгебрами Ли обусловила работы по отысканию интегрируемых случаев уравнений Эйлера на алгебрах Ли и их исследованию [2–6]. Один из таких случаев [3] рассматривается в настоящей работе. Проводится качественный анализ семейства дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned}
\dot{s}_1 &= \alpha(r_1 s_2 - \alpha r_2 r_3) - (\beta r_3 - s_2)(\beta r_2 + s_3), \\
\dot{s}_2 &= (\alpha^2 + \beta^2)r_1 r_3 - (\alpha r_1 + \beta r_2)s_1 + (\alpha r_3 - s_1)s_3, \\
\dot{s}_3 &= (\beta r_1 - \alpha r_2)s_3, \\
\dot{r}_1 &= r_2(\alpha r_1 + \beta r_2 + 2s_3) - r_3 s_2 - x((\alpha^2 + \beta^2)r_3 s_2 + \beta s_3^2), \\
\dot{r}_2 &= r_3 s_1 - r_1(\alpha r_1 + \beta r_2 + 2s_3) + x((\alpha^2 + \beta^2)r_3 s_1 + \alpha s_3^2), \\
\dot{r}_3 &= r_1 s_2 - r_2 s_1 + x(\beta s_1 - \alpha s_2)s_3,
\end{aligned} \tag{1}$$

допускающих следующие первые интегралы:

$$\begin{aligned}
2H &= s_1^2 + s_2^2 + 2s_3^2 + 2(\alpha r_1 + \beta r_2)s_3 - (\alpha^2 + \beta^2)r_3^2 = 2h, \\
V_1 &= r_1 s_1 + r_2 s_2 + r_3 s_3 = c_1, \\
V_2 &= r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + x(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) = c_2, \\
V_3 &= k_1 k_2 = c_3,
\end{aligned} \tag{2}$$

где

$$\begin{aligned}
k_1 &= s_3, \quad k_2 = s_3(s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 + x(\beta s_1 - \alpha s_2)^2) + 2(\alpha s_1 + \beta s_2)(s_1 r_1 + s_2 r_2) + \\
&\quad 2s_3^2(\alpha r_1 + \beta r_2) + s_3(\alpha r_1 + \beta r_2)^2 - (\alpha^2 + \beta^2)(2(s_1 r_1 + s_2 r_2) + s_3 r_3) r_3.
\end{aligned}$$

Здесь α, β — некоторые постоянные, x — произвольный параметр.

При $x > 0$, $x = 0$ и $x < 0$ уравнения (1) соответствуют уравнениям Эйлера на алгебрах Ли $so(4)$, $e(3)$ и $so(3, 1)$. При $x = 0$ эти уравнения описывают движение твердого тела в идеальной жидкости, а при $x = 1$ — твердого тела с полостями, заполненными вихревой несжимаемой жидкостью, или четырехмерного волчка. Выражения $k_1 = 0$ и $k_2 = 0$ определяют два инвариантных соотношения уравнений (1), соответственно, линейное и кубическое.

Топологический анализ системы (1) выполнен в [6, 7] на основе методов и подходов, изложенных в [8]. В настоящей работе качественный анализ уравнений (1) проводится на основе метода Рауса–Ляпунова [9] и некоторых его модификаций [10, 11]. Этот метод позволяет находить и исследовать инвариантные множества рассматриваемой системы, обладающие экстремальным свойством: на этих множествах удовлетворяются необходимые условия экстремума элементов алгебры первых интегралов задачи. Такие множества нулевой размерности традиционно называют стационарными решениями. Множества ненулевой размерности будем называть стационарными инвариантными многообразиями (ИМ). Интегралы (семейства интегралов), которые принимают стационарное значение на найденных множествах, используются для получения достаточных условий их устойчивости.

При алгебраических первых интегралах качественный анализ дифференциальных уравнений методом Рауса–Ляпунова сводится к алгебраической задаче, что дает возможность применять для решения вычислительных задач системы компьютерной алгебры (СКА). Современные средства компьютерной алгебры (КА) позволяют существенно расширить алгоритмическую базу качественного исследования дифференциальных уравнений, сделать многие классические алгоритмы более эффективными. В настоящей работе используются СКА “Mathematica” и написанные на языке этой системы комплексы программ [12]. СКА “Mathematica” относится к универсальным системам и достаточно широко применяется в научных расчетах. Созданные авторами совместно с коллегами комплексы программ позволили адаптировать эту систему к задачам качественного анализа дифференциальных уравнений, возникающих при моделировании консервативных динамических систем.

Статья развивает и дополняет результаты, полученные в [13], и имеет следующую структуру. Пункт 2 посвящен нахождению стационарных множеств. Приведено несколько алгоритмов получения ИМ и стационарных решений с применением средств компьютерной алгебры. В п. 3 найденные решения исследуются на устойчивость. В п. 4 дано некоторое заключение.

2. Выделение стационарных множеств

2.1. Нахождение стационарных решений и ИМ из необходимых условий экстремума

В соответствии с методом Рауса–Ляпунова образуем из первых интегралов задачи (2) следующую их комбинацию:

$$2K = 2\lambda_0 H - 2\lambda_1 V_1 - \lambda_2 V_2 - \lambda_3 (V_3 + (\alpha^2 + \beta^2) V_1^2), \quad \lambda_i = \text{const}, \quad (3)$$

и запишем необходимые условия экстремума интеграла K по фазовым переменным r_i, s_i :

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial s_1} &= \lambda_0 s_1 - \lambda_1 r_1 - \lambda_3 \left[(\alpha^2 + \beta^2) r_1 (r_1 s_1 + r_2 s_2) + s_1 s_3 (\alpha r_2 + \beta r_1) + s_2 s_3 (2\alpha r_1 + s_3) \right] = 0, \\ \frac{\partial K}{\partial s_2} &= \lambda_0 s_2 - \lambda_1 r_2 - \lambda_3 \left[(\alpha^2 + \beta^2) r_2 (r_1 s_1 + r_2 s_2) + s_1 s_3 (\alpha r_2 + \beta r_1) + s_2 s_3 (2\beta r_2 + s_3) \right] = 0, \\ \frac{\partial K}{\partial s_3} &= \lambda_0 (\alpha r_1 + \beta r_2 + 2s_3) - \lambda_1 r_3 - \lambda_3 \left[(\alpha s_1 + \beta s_2) (s_1 r_1 + s_2 r_2) + s_3 (\alpha r_1 + \beta r_2)^2 + \right. \\ &\quad \left. s_3 (s_1^2 + s_2^2 + 2s_3^2) + 3s_3^2 (\alpha r_1 + \beta r_2) \right] = 0, \\ \frac{\partial K}{\partial r_1} &= \lambda_0 \alpha s_3 - \lambda_1 s_1 - \lambda_2 r_1 - \lambda_3 \left[(\alpha^2 + \beta^2) s_1 (r_1 s_1 + r_2 s_2) + \alpha s_3^2 (\beta r_2 + \alpha r_1) + \right. \\ &\quad \left. \alpha s_3 (s_1^2 + s_2^2) + \beta \lambda_3 s_1 s_2 s_3 \right] = 0, \\ \frac{\partial K}{\partial r_2} &= -\lambda_0 \beta s_3 + \lambda_1 s_2 + \lambda_2 r_2 + \lambda_3 \left[(\alpha^2 + \beta^2) s_2 (s_1 r_1 + r_2 s_2) + s_2 s_3 (\alpha s_1 + \beta s_2) + \right. \\ &\quad \left. \beta s_3^2 (\alpha r_1 + \beta r_2) + \beta s_3^3 \right] = 0, \\ \frac{\partial K}{\partial r_3} &= -((\alpha^2 + \beta^2) \lambda_0 + \lambda_2) r_3 + \lambda_1 s_3 = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнения (4) (условия стационарности интеграла K) — система кубических уравнений с параметрами $\lambda_i, x, \alpha, \beta$. Решения этой системы позволяют определить стационарные решения и ИМ дифференциальных уравнений (1).

Ядро СКА “Mathematica” содержит достаточный набор функций для решения задач полиномиальной алгебры, возникающих в приложениях. Решения уравнений (4) будем искать методом базисов Гребнера [14], применяя для этого встроенную функцию *GroebnerBasis*. Как известно, этот метод позволяет преобразовать систему алгебраических уравнений к виду более удобному для нахождения ее решений.

Для полиномов системы (4) построен базис при “исключающем” мономиальном упорядочении переменных r_i, s_i . Функция *GroebnerBasis* для вычисления базиса в этом случае записывается так:

$$\begin{aligned} &\text{GroebnerBasis} \left[\text{polys}, \{s_2, s_1, s_3\}, \{r_3, r_1, r_2\}, \text{Coefficient Domain} \rightarrow \right. \\ &\quad \left. \text{Rational Functions, Monomial Order} \rightarrow \text{Elimination Order} \right]. \end{aligned}$$

Здесь *polys* — полиномы системы (4).

В результате применения этой функции получена следующая система уравнений, эквивалентная исходной:

$$\begin{aligned} & \left[\left((\alpha^2 + \beta^2) \lambda_0 + \lambda_2 \right) (\alpha s_1 + \beta s_2) + (\alpha^2 + \beta^2) \lambda_1 s_3 \right] \times \\ & \left[\left((\alpha^2 + \beta^2) \lambda_0 + \lambda_2 \right)^2 \lambda_3 (s_1^2 + s_2^2) + 2 \lambda_1 \left((\alpha^2 + \beta^2) \lambda_0 + \lambda_2 \right) \lambda_3 s_3 (\alpha s_1 + \beta s_2) + \right. \\ & \quad \left. (\alpha^2 + \beta^2) \lambda_1^2 \lambda_3 s_3^2 + \lambda_2 \left(\lambda_1^2 - ((\alpha^2 + \beta^2) \lambda_0 + \lambda_2)^2 x \right) \right] = 0, \\ & s_3 \left[\left((\alpha^2 + \beta^2) \lambda_0 + \lambda_2 \right) s_1 + \alpha \lambda_1 s_3 \right] \times \\ & \left[\left((\alpha^2 + \beta^2) \lambda_0 + \lambda_2 \right)^2 \lambda_3 (s_1^2 + s_2^2) + 2 \lambda_1 \left((\alpha^2 + \beta^2) \lambda_0 + \lambda_2 \right) \lambda_3 s_3 (\alpha s_1 + \beta s_2) + \right. \\ & \quad \left. (\alpha^2 + \beta^2) \lambda_1^2 \lambda_3 s_3^2 + \lambda_2 \left(\lambda_1^2 - ((\alpha^2 + \beta^2) \lambda_0 + \lambda_2)^2 x \right) \right] = 0, \\ & \dots \end{aligned} \quad (5)$$

Уравнения достаточно громоздки и здесь приведены только первые два. Всего уравнений 11.

Как видно из (5), полученную систему можно разделить на несколько подсистем и искать по отдельности решения для каждой подсистемы. Всего выделено 24 подсистемы. Для каждой из них построен лексикографический базис, который является наиболее удобным для анализа и нахождения корней алгебраической системы уравнений.

Рассмотрим два из вычисленных базисов:

$$\begin{aligned} & p_{11} s_1^4 s_3^4 + p_{12} (a_1 s_3^2 + a_2) s_1^3 s_3^3 + p_{13} (a_3 s_3^4 + a_4 s_3^2 + a_5) s_1^2 s_3^2 + \\ & \quad p_{14} (a_6 s_3^6 + a_7 s_3^4 + a_8 s_3^2 + a_9) s_1 s_3 + p_{15} (a_{10} s_3^8 + a_{12} s_3^6 + a_{13} s_3^4 + a_{14} s_3^2 + a_{15}) = 0, \\ & p_{21} s_2 s_3 (b_1 s_3^2 + b_2) + p_{22} s_1^3 s_3^3 + p_{23} s_1^2 s_3^2 (b_3 s_3^2 + b_4) + \\ & \quad p_{24} s_1 s_3 (b_5 s_3^4 + b_6 s_3^2 + b_7) + (b_8 s_3^4 + b_9) (b_{10} s_3^2 + b_{11}) = 0, \\ & p_{31} r_2 s_3 + p_{32} s_1^2 s_3^2 + p_{33} s_1 s_3 (d_1 s_3^2 + d_2) + d_3 s_3^4 + d_5 s_3^2 + d_6 = 0, \\ & p_{41} r_1 s_3 (f_1 s_3^2 + f_2) + p_{42} s_1^3 s_3^3 + p_{43} s_1^2 s_3^2 (f_3 s_3^2 + f_4) + p_{44} s_1 s_3 (f_5 s_3^4 + f_6 s_3^2 + f_7) + \\ & \quad (f_8 s_3^4 + f_9) (f_{10} s_3^2 + f_{11}) = 0, \\ & -\chi r_3 - \lambda_1 s_3 = 0 \end{aligned} \quad (6)$$

и

$$\begin{aligned} & \bar{p}_{11} s_3^4 + \bar{p}_{12} s_3^2 + \bar{p}_{13} = 0, \quad \chi s_1 + \alpha \lambda_1 s_3 = 0, \quad \bar{p}_{21} s_2 + \bar{p}_{22} s_3^3 + \bar{p}_{23} s_3 = 0, \\ & \bar{p}_{31} r_2 + \bar{p}_{32} s_3^3 + \bar{p}_{33} s_3 = 0, \quad r_1 - x \alpha s_3 = 0, \quad -\chi r_3 - \lambda_1 s_3 = 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где

$$\begin{aligned} & \bar{p}_{11} = - \left[(x \alpha^2 + 1) \chi^2 + \beta^2 \lambda_1^2 \right]^2 \lambda_3^2, \\ & \bar{p}_{12} = 2 \chi^2 \lambda_3 \left[\chi^2 (\lambda_0 - x^2 \alpha^2 \lambda_2) + x \sigma (\alpha^2 \chi \lambda_0^2 + \lambda_1^2 \lambda_2) + (\beta^2 \lambda_0 + \lambda_2) (\lambda_1^2 - x \chi \lambda_2) \right] - \beta^2 \lambda_1^4 \lambda_2 \lambda_3, \\ & \bar{p}_{13} = - \left[(\lambda_0 - x \lambda_2) \chi^2 + \lambda_1^2 \lambda_2 \right]^2, \\ & \bar{p}_{21} = 2 \beta \lambda_1 \chi \left[(\lambda_0 - x \lambda_2) \chi^2 + \lambda_1^2 \lambda_2 \right], \quad \bar{p}_{22} = \bar{p}_{11} \lambda_3^{-1}, \\ & \bar{p}_{23} = \chi^2 \left[\chi^2 (\lambda_0 - x^2 \alpha^2 \lambda_2) + x \sigma (\alpha^2 \chi \lambda_0^2 + \lambda_1^2 \lambda_2) + (\beta^2 \lambda_0 + \lambda_2) (\lambda_1^2 - x \chi \lambda_2) \right] + \\ & \quad \beta^2 \lambda_1^2 (2 \chi^2 \lambda_0 - \lambda_1^2 \lambda_2), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{p}_{31} &= -\chi\lambda_1^{-1}\bar{p}_{21}, & \bar{p}_{32} &= \bar{p}_{22}, & \bar{p}_{33} &= \bar{p}_{23}, \\ \sigma &= \alpha^2 + \beta^2, & \chi &= \sigma\lambda_0 + \lambda_2,\end{aligned}$$

здесь p_{kl} , a_{k1} , d_{k2} , b_{l1} , f_{l1} — полиномы от α , β , x , λ_i . Полиномы достаточно громоздкие и поэтому здесь не приведены.

Уравнения (6) определяют семейство одномерных ИМ с параметрами λ_i , что проверяется непосредственно вычислением по определению ИМ. Интеграл K в (3) принимает стационарное значение на элементах этого семейства.

Уравнения (7) позволяют получить семейство стационарных решений дифференциальных уравнений (1) с параметрами λ_i . Так как решения достаточно громоздкие, то ограничимся рассмотрением следующего подсемейства, которое выделяется из указанного семейства при $\lambda_1 = \pm\sqrt{x}(\alpha^2 + \beta^2)\lambda_0$, $\lambda_2 = 0$:

$$\begin{aligned}r_1 &= \pm\alpha x\kappa, & r_2 &= \pm\beta x\kappa, & r_3 &= \pm\sqrt{x}\kappa, & s_1 &= \pm\alpha\sqrt{x}\kappa, & s_2 &= \pm\beta\sqrt{x}\kappa, & s_3 &= \pm\kappa; \\ r_1 &= \pm\alpha x\kappa, & r_2 &= \pm\beta x\kappa, & r_3 &= \mp\sqrt{x}\kappa, & s_1 &= \mp\alpha\sqrt{x}\kappa, & s_2 &= \mp\beta\sqrt{x}\kappa, & s_3 &= \pm\kappa,\end{aligned}\quad (8)$$

здесь $\kappa = \lambda_0^{1/2}[(\alpha^2 + \beta^2)x + 1]\lambda_3^{-1/2}$.

Прямой подстановкой выражений (8) в дифференциальные уравнения (1) проверяется, что они действительно удовлетворяют этим уравнениям. Как следует из (8), эти решения определены $\forall x \neq -1/(\alpha^2 + \beta^2)$, $\lambda_3 \neq 0$, т.е. являются решениями некоторого подсемейства семейства уравнений (1).

Подстановка приведенных выше значений λ_1 и λ_2 в (3) дает два семейства интегралов

$$2K_{1,2} = 2\lambda_0[H \pm \sqrt{x}(\alpha^2 + \beta^2)V_1] - \lambda_3(V_3 + (\alpha^2 + \beta^2)V_1^2), \quad (9)$$

которые принимают стационарные значения на элементах семейств решений (8).

В приложениях интерес представляют действительные решения. Условия вещественности решений (8):

$$\left[\lambda_0 \geq 0, \alpha \neq 0, \beta \neq 0 \text{ и } ((\lambda_3 < 0 \text{ и } x < -\sigma) \text{ или } (\lambda_3 > 0 \text{ и } x > -\sigma))\right]$$

или

$$\left[\lambda_0 \leq 0, \alpha \neq 0, \beta \neq 0 \text{ и } ((\lambda_3 < 0 \text{ и } x > -\sigma) \text{ или } (\lambda_3 > 0 \text{ и } x < -\sigma))\right],$$

где $\sigma = 1/(\alpha^2 + \beta^2)$.

С механической точки зрения в указанной области значений параметров при $x = 0$ элементы рассматриваемых семейств решений соответствуют винтовым движениям твердого тела в жидкости, а при $x = 1$ — перманентным вращениям тела.

Подобным образом были исследованы остальные построенные базисы. Все они определяют семейства стационарных решений дифференциальных уравнений (1).

2.2. Получение ИМ более высокой размерности из семейств ИМ

В данном пункте показано, что последовательным исключением параметров λ_i из уравнений семейства одномерных ИМ (6) можно получить ИМ более высокой размерности и в итоге ИМ максимальной размерности, которое содержит все эти ИМ. Исключим, например, с помощью последнего уравнения параметр $\lambda_1 = -[(\alpha^2 + \beta^2)\lambda_0 + \lambda_2]r_3/s_3$ из остальных уравнений семейства ИМ (6). Для полученных уравнений построим лексикографический базис относительно части переменных r_i и s_i , например r_1 , r_2 , r_3 , s_2 . Результатом будут 4 уравнения:

$$\begin{aligned}
& \lambda_2 \lambda_3 (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) + \lambda_3^2 s_3^2 (\beta s_1 - \alpha s_2)^2 - \lambda_0 \lambda_2 = 0, \\
& \lambda_3^2 s_3^2 \left[s_1^2 + (\beta r_2 + s_3)^2 + \beta^2 x s_1^2 + \alpha^2 x (r_2^2 + (s_1^2 + s_3^2)) \right] + \lambda_2 \lambda_3 (r_2^2 + x (s_1^2 + s_3^2)) - \\
& \quad \lambda_0 \lambda_3 \left[s_1^2 + s_3 (2(\beta r_2 + s_3) + \alpha^2 x s_3) \right] + \lambda_0 (\lambda_0 - \lambda_2 x) = 0, \\
& \lambda_3^2 s_3^2 \left[(\alpha^2 + \beta^2) s_1 (r_1 s_1 + r_2 s_2) + s_1 s_3 (\alpha s_1 + \beta s_2) + \alpha s_3^2 ((\alpha r_1 + \beta r_2) + s_3) \right] + \\
& \quad \lambda_2 \lambda_3 (r_1 (s_1^2 + s_3^2) + r_2 s_1 s_2) - \lambda_0 \lambda_3 s_3 \left[\alpha s_3 (\alpha r_1 + \beta r_2 + 2 s_3) + s_1 (\alpha s_1 + \beta s_2) \right] + \\
& \quad \lambda_0 (\alpha \lambda_0 s_3 - \lambda_2 r_1) = 0, \\
& \lambda_3^2 s_3^2 \left[s_1^2 (\beta (\beta r_3 - s_2) - \alpha s_1) - \alpha s_1 s_3 (\beta r_2 + s_3) + \alpha^2 (r_2 s_2 s_3 + r_3 (s_1^2 + s_3^2)) \right] + \\
& \quad \lambda_2 \lambda_3 (r_3 (s_1^2 + s_3^2) + r_2 s_2 s_3) + \lambda_0 (\alpha \lambda_3 (s_1 - \alpha r_3) s_3^2 - \lambda_2 r_3) = 0,
\end{aligned} \tag{10}$$

которые определяют семейство ИМ коразмерности 4 дифференциальных уравнений (1). Здесь $\lambda_0, \lambda_2, \lambda_3$ — параметры семейства.

Продолжая этот процесс, исключим с помощью первого уравнения (10) параметр $\lambda_0 = \lambda_3 \left[\lambda_2 (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) + \lambda_3 s_3^2 (\beta s_1 - \alpha s_2)^2 \right] / \lambda_2$ из остальных уравнений и построим для полученных уравнений лексикографический базис относительно r_1, r_2, r_3 . Результатом будут 3 уравнения:

$$\begin{aligned}
& \lambda_3^3 (\beta s_1 - \alpha s_2)^4 s_3^4 + \lambda_2^3 (r_2^2 - s_2^2 x) + \lambda_2^2 \lambda_3 \left((\alpha^2 + \beta^2) r_2^2 s_3^2 + (s_1^2 + s_2^2) (s_2^2 - 2\beta r_2 s_3) + \right. \\
& \quad \left. 2\alpha s_2 (\beta s_1 - \alpha s_2) s_3^2 x \right) + \lambda_2 \lambda_3^2 (\beta s_1 - \alpha s_2)^2 s_3^2 \left(s_1^2 + 2(s_2^2 - \beta r_2 s_3) - \alpha^2 s_3^2 x \right) = 0, \\
& \lambda_2^2 (r_1 s_2 - r_2 s_1) + \lambda_3^2 (\beta s_1 - \alpha s_2)^3 s_3^3 + \lambda_2 \lambda_3 (\beta s_1 - \alpha s_2) s_3 (s_1^2 + s_2^2 - (\alpha r_1 + \beta r_2) s_3) = 0, \\
& \lambda_3 (\alpha r_3 - s_1) (\alpha s_2 - \beta s_1) s_3^2 + \lambda_2 (r_3 s_2 - r_2 s_3) = 0,
\end{aligned} \tag{11}$$

которые определяют семейство ИМ коразмерности 3 (λ_2, λ_3 — параметры семейства).

После исключения с помощью последнего уравнения (11) параметра $\lambda_2 = \lambda_3 (\alpha r_3 - s_1) (\alpha s_2 - \beta s_1) s_3^2 / (r_2 s_3 - r_3 s_2)$ из остальных получим два уравнения:

$$\begin{aligned}
& r_3 (\beta r_3 - s_2) \left[s_1 (s_1 - \alpha r_3) + s_2 (s_2 - \beta r_3) \right] + r_2 s_3 \left[(s_1 - \alpha r_3)^2 + (s_2 - \beta r_3)^2 \right] + \\
& \quad x (\alpha r_3 - s_1) (\beta s_1 - \alpha s_2) s_3^2 = 0, \\
& r_3 (\alpha r_3 - s_1) \left[s_1 (s_1 - \alpha r_3) + s_2 (s_2 - \beta r_3) \right] + r_1 s_3 \left[(s_1 - \alpha r_3)^2 + (s_2 - \beta r_3)^2 \right] - \\
& \quad x (\beta r_3 - s_2) (\beta s_1 - \alpha s_2) s_3^2 = 0,
\end{aligned} \tag{12}$$

которые определяют ИМ коразмерности 2 дифференциальных уравнений (1).

Покажем на примере уравнений (12) (как менее громоздких по сравнению с остальными), что найденные таким способом соотношения действительно являются инвариантами. Для этого вычислим производные от выражений (12) в силу уравнений (1). Производные представляют собой некоторые полиномы $P_i = P_i(r_j, s_j)$ ($i = 1, 2$; $j = 1, 2, 3$), которые, используя встроенную функцию СКА “Mathematica” *PolynomialReduce* [$P_i, \{F_1, F_2\}, \{r_1, r_2\}$], можно представить в виде

$$P_{11} F_1 + P_{12} F_2 = 0, \quad P_{21} F_1 + P_{22} F_2 = 0, \tag{13}$$

здесь F_1, F_2 — левые части уравнений (12) соответственно,

$$\begin{aligned}
P_{11} &= \left[\alpha s_3 (r_2 - x \beta s_3) \rho_1^4 + \left(\alpha^2 r_3^2 + s_1^2 - 2(\alpha r_1 - \beta r_2) s_3 - 2x \beta^2 s_3^2 \right) \rho_1^3 \rho_2 - \right. \\
&\quad 2r_3 (\beta s_1^2 - \alpha^2 r_3 s_2) \rho_1 \rho_2^2 - 2\beta s_3 (r_1 + \alpha x s_3) \rho_1^2 \rho_2^2 + \\
&\quad \left(\beta^2 r_3^2 + 2s_1^2 + s_2^2 - 2(\alpha r_1 - \beta r_2) s_3 + 2(\alpha^2 - 2\beta^2) x s_3^2 \right) \rho_1 \rho_2^3 + \\
&\quad \left. 2\alpha r_3 \rho_1^2 \rho_2^3 - s_3 \left(2\beta (r_1 - \alpha x s_3) + \alpha (r_2 - \beta x s_3) \right) \rho_2^4 \right] \left[s_3 (\rho_1^2 + \rho_2^2)^2 \right]^{-1}, \\
P_{12} &= - \left[\left(\beta^2 r_3^2 + s_2^2 + s_3 (\alpha r_1 + 2s_3) \right) \rho_2^4 + 2\alpha r_3 \rho_1 \rho_2^4 + 2(\alpha r_3 + s_1) s_2 \rho_1 \rho_2^3 + \right. \\
&\quad \left(\alpha^2 r_3^2 + s_1^2 + 2s_3 (\alpha r_1 + 2s_3) \right) \rho_1^2 \rho_2^2 + \left(\alpha (\beta r_3 + s_2) - 2\beta s_1 \right)^2 s_3^2 x \rho_2^2 + \\
&\quad \left. (\alpha^2 + 2\beta^2) s_3^2 x \rho_1^4 + s_3 (\alpha r_1 + 2s_3) \rho_1^4 \right] \left[s_3 (\rho_1^2 + \rho_2^2)^2 \right]^{-1}, \\
P_{21} &= \left[2r_1 s_3 [\alpha \rho_1 + \beta \rho_2] \rho_1 + [\rho_1^2 + \rho_2^2] [\rho_1^2 + s_3 (\beta r_2 + 2s_3)] + \right. \\
&\quad \left. x \left[(\alpha^2 + \beta^2) \rho_2^2 + (\beta s_1 - \alpha s_2)^2 \right] s_3^2 \right] \left[s_3 (\rho_1^2 + \rho_2^2)^2 \right]^{-1}, \\
P_{22} &= \left[\left[\alpha^2 r_3 (\rho_2 - s_2) + \beta (\rho_2 - s_1) (\rho_2 + s_1) + 2\alpha s_1 s_2 \right] s_3 (\alpha x s_3 - r_1) - \right. \\
&\quad \left. \rho_1 \rho_2 [\rho_1^2 + \rho_2^2] \right] \left[s_3 (\rho_1^2 + \rho_2^2) \right]^{-1}, \\
\rho_1 &= \alpha r_3 - s_1, \quad \rho_2 = \beta r_3 - s_2.
\end{aligned}$$

Так как соотношения (13) обращаются в тождество при $F_1 = F_2 = 0$, то последнее доказывает инвариантность решения (12). Аналогично доказывается инвариантность остальных соотношений.

Дифференциальные уравнения на ИМ (12) записываются так:

$$\begin{aligned}
\dot{s}_1 &= \alpha (\bar{r}_1 s_2 - \alpha \bar{r}_2 r_3) - (\beta r_3 - s_2) (\beta \bar{r}_2 + s_3), \\
\dot{s}_2 &= (\alpha^2 + \beta^2) \bar{r}_1 r_3 - (\alpha \bar{r}_1 + \beta \bar{r}_2) s_1 + \rho_1 s_3, \\
\dot{s}_3 &= (\beta \bar{r}_1 - \alpha \bar{r}_2) s_3, \\
\dot{r}_3 &= \bar{r}_1 s_2 - \bar{r}_2 s_1 + x (\beta s_1 - \alpha s_2) s_3.
\end{aligned} \tag{14}$$

Они получены из уравнений (1) после исключения из них переменных r_1, r_2 с помощью (12). Здесь

$$\begin{aligned}
\bar{r}_1 &= \frac{r_3 (\alpha r_3 - s_1) ((\alpha r_3) - s_1 s_1 + (\beta r_3 - s_2) s_2) + (\beta r_3 - s_2) (\beta s_1 - \alpha s_2) s_3^2 x}{d}, \\
\bar{r}_2 &= \frac{r_3 (\beta r_3 - s_2) ((\alpha r_3 - s_1) s_1 + (\beta r_3 - s_2) s_2) - (\alpha r_3 - s_1) (\beta s_1 - \alpha s_2) s_3^2 x}{d}, \\
d &= ((s_1 - \alpha r_3)^2 + (s_2 - \beta r_3)^2) s_3.
\end{aligned}$$

Производная от правой части выражения $\lambda_2 = \lambda_3 (\alpha r_3 - s_1) (\alpha s_2 - \beta s_1) s_3^2 / (\bar{r}_2 s_3 - r_3 s_2)$, вычисленная в силу уравнений (14), тождественно равна нулю. Последнее означает, что это выражение — первый интеграл уравнений (14).

Подобным образом можно показать, что соотношения $\lambda_1 = -[(\alpha^2 + \beta^2) \lambda_0 + \lambda_2] r_3 / s_3$, $\lambda_0 = \lambda_3 [\lambda_2 (s_1^2 + s_2^2 + s_3^2) + \lambda_3 s_3^2 (\beta s_1 - \alpha s_2)^2] / \lambda_2$ — первые интегралы дифференциальных уравнений на ИМ (10) и ИМ (11) соответственно.

Покажем, что элементы семейства ИМ (6) являются подмногообразиями элементов семейства ИМ (10). Найдем пересечение элементов этих семейств. Для этого построим лексикографический базис относительно r_1, r_2, r_3, s_2, s_1 для полиномов системы,

образованной уравнениями (6), (10). Результатом будет система уравнений (6), что и доказывает исходное утверждение. Аналогично находим, что элементы семейства ИМ (10) есть подмногообразия семейства ИМ (11), элементы которого, в свою очередь, являются подмногообразиями ИМ (12). Таким образом, изложенный способ позволяет находить объемлющие ИМ в рамках используемого метода выделения многообразий. Простой подстановкой в уравнения (6) можно показать, что элементы семейств стационарных решений (8) принадлежат подсемействам ИМ, которые выделяются из семейства ИМ (6) при $\lambda_1 = \pm\sqrt{x}(\alpha^2 + \beta^2)\lambda_0$, $\lambda_2 = 0$.

Отметим, что приведенные выше ИМ (и их семейства) можно получить как решения уравнений стационарности (4) относительно части фазовых переменных r_i , s_i и параметров λ_j [11]. Так лексикографический базис, построенный относительно λ_0 , λ_1 , λ_2 , r_3 , s_3 , позволил получить как ИМ (12), так и новое ИМ коразмерности 2:

$$s_3 = 0, \quad -(\alpha^2 + \beta^2)r_3 + \alpha s_1 + \beta s_2 = 0. \quad (15)$$

2.3. Использование дифференциальных уравнений для нахождения стационарных решений

В пункте 2.1 стационарные решения были получены из невырожденных условий стационарности семейства первых интегралов задачи. Здесь представлен еще один способ.

Вначале из дифференциальных уравнений (1) будут найдены решения, соответствующие неподвижным точкам фазового пространства этой системы, а затем получены семейства интегралов, которые принимают стационарное значение на этих решениях. Такой подход, в ряде случаев, позволяет находить как ИМ, так и семейства стационарных решений, которые принадлежат этим ИМ.

Приравняем к нулю правые части дифференциальных уравнений (1). Как нетрудно видеть, полученная система уравнений разделяется на две подсистемы:

$$\begin{aligned} \alpha(r_1 s_2 - \alpha r_2 r_3) - (\beta r_3 - s_2)(\beta r_2 + s_3) &= 0, \\ (\alpha^2 + \beta^2)r_1 r_3 - (\alpha r_1 + \beta r_2)s_1 + (\alpha r_3 - s_1)s_3 &= 0, \\ \beta r_1 - \alpha r_2 &= 0, \\ r_2(\alpha r_1 + \beta r_2 + 2s_3) - r_3 s_2 - x((\alpha^2 + \beta^2)r_3 s_2 + \beta s_3^2) &= 0, \\ r_3 s_1 - r_1(\alpha r_1 + \beta r_2 + 2s_3) + x((\alpha^2 + \beta^2)r_3 s_1 + \alpha s_3^2) &= 0, \\ r_1 s_2 - r_2 s_1 + x(\beta s_1 - \alpha s_2)s_3 &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

и

$$\begin{aligned} \alpha(r_1 s_2 - \alpha r_2 r_3) - (\beta r_3 - s_2)(\beta r_2 + s_3) &= 0, \\ (\alpha^2 + \beta^2)r_1 r_3 - (\alpha r_1 + \beta r_2)s_1 + (\alpha r_3 - s_1)s_3 &= 0, \\ s_3 &= 0, \\ r_2(\alpha r_1 + \beta r_2 + 2s_3) - r_3 s_2 - x((\alpha^2 + \beta^2)r_3 s_2 + \beta s_3^2) &= 0, \\ r_3 s_1 - r_1(\alpha r_1 + \beta r_2 + 2s_3) + x((\alpha^2 + \beta^2)r_3 s_1 + \alpha s_3^2) &= 0, \\ r_1 s_2 - r_2 s_1 + x(\beta s_1 - \alpha s_2)s_3 &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Рассмотрим (16). Построим для полиномов этой системы лексикографический базис относительно некоторой части фазовых переменных, например r_1 , r_2 , r_3 , s_1 , s_2 . Результатом будет система уравнений, распадающаяся на 4 подсистемы. Ниже представлены 2 из них, имеющие вещественные решения:

$$\begin{aligned}
\beta s_1 - \alpha s_2 &= 0, \\
\beta r_3 - s_2 &= 0, \\
(\alpha^2 + \beta^2)r_2^2 + \beta s_3(2r_2 - \beta x s_3) - ((\alpha^2 + \beta^2)x + 1)s_2^2 &= 0, \\
\beta r_1 - \alpha r_2 &= 0
\end{aligned} \tag{18}$$

и

$$\begin{aligned}
\beta s_1 - \alpha s_2 &= 0, & (\alpha^2 + \beta^2)r_3 s_2 + \beta s_3^2 &= 0, \\
(\alpha^2 + \beta^2)r_2 + \beta s_3 &= 0, & (\alpha^2 + \beta^2)r_1 + \alpha s_3 &= 0.
\end{aligned} \tag{19}$$

Легко проверить по определению ИМ, что соотношения (18) и (19) определяют два ИМ коразмерности 4 дифференциальных уравнений (1).

Дифференциальные уравнения на ИМ (18) (ИМ (19)) записываются как

$$\dot{s}_2 = 0, \quad \dot{s}_3 = 0$$

и имеют следующее семейство решений:

$$s_2 = s_2^0 = \text{const}, \quad s_3 = s_3^0 = \text{const}. \tag{20}$$

Совместно с (20) уравнения (18) и (19) определяют 3 семейства решений, соответствующих неподвижным точкам фазового пространства системы (1):

$$\begin{aligned}
r_1 &= -\frac{\alpha(\beta s_3^0 \pm z_1)}{\beta(\alpha^2 + \beta^2)}, & r_2 &= -\frac{\beta s_3^0 \pm z_1}{\alpha^2 + \beta^2}, & r_3 &= \frac{s_2^0}{\beta}, \\
s_1 &= \frac{\alpha s_2^0}{\beta}, & s_2 &= s_2^0, & s_3 &= s_3^0,
\end{aligned} \tag{21}$$

и

$$\begin{aligned}
r_1 &= -\frac{\alpha s_3^0}{\alpha^2 + \beta^2}, & r_2 &= -\frac{\beta s_3^0}{\alpha^2 + \beta^2}, & r_3 &= -\frac{\beta s_3^{0^2}}{(\alpha^2 + \beta^2)s_2^0}, \\
s_1 &= \frac{\alpha s_2^0}{\beta}, & s_2 &= s_2^0, & s_3 &= s_3^0,
\end{aligned} \tag{22}$$

где s_2^0, s_3^0 — параметры семейств, $z_1 = [((\alpha^2 + \beta^2)s_2^{0^2} + \beta^2 s_3^{0^2})((\alpha^2 + \beta^2)x + 1)]^{-1/2}$.

Действуя подобным образом в случае системы (19), получим еще два ИМ коразмерности 4 и семейства решений, которые принадлежат этим ИМ. Уравнения ИМ:

$$s_3 = 0, \quad \alpha s_1 + \beta s_2 = 0, \quad r_3 = 0, \quad \alpha r_1 + \beta r_2 = 0; \tag{23}$$

$$\begin{aligned}
s_3 &= 0, & (\alpha^2 + \beta^2)r_3 - \alpha s_1 - \beta s_2 &= 0, \\
(\alpha^2 + \beta^2)r_2^2 - ((\alpha^2 + \beta^2)x + 1)s_2^2 &= 0, \\
r_2((\alpha^2 + \beta^2)r_3 - \beta s_2) - \alpha r_1 s_2 &= 0.
\end{aligned} \tag{24}$$

Семейства решений:

$$r_1 = -\frac{\beta r_2^0}{\alpha}, \quad r_2 = r_2^0, \quad r_3 = 0, \quad s_1 = -\frac{\beta s_2^0}{\alpha}, \quad s_2 = s_2^0, \quad s_3 = 0; \tag{25}$$

$$\begin{aligned} r_1 &= \pm \frac{((\alpha^2 + \beta^2)r_3^0 - \beta s_2^0)z_2}{\alpha}, & r_2 &= \pm s_2^0 z_2, & r_3 &= r_3^0, \\ s_1 &= \frac{(\alpha^2 + \beta^2)r_3^0 - \beta s_2^0}{\alpha}, & s_2 &= s_2^0, & s_3 &= 0. \end{aligned} \quad (26)$$

Здесь $z_2 = ((\alpha^2 + \beta^2)x + 1)^{1/2}(\alpha^2 + \beta^2)^{-1/2}$, r_2^0, r_3^0, s_2^0 — параметры семейств.

Как следует из (21), (22), решения определены $\forall \beta \neq 0, x \neq -1/(\alpha^2 + \beta^2)$ и $\forall \beta \neq 0, s_2^0 \neq 0$ соответственно. Решения (25), (26) существуют $\forall \alpha \neq 0$. Таким образом, семейство решений (21) и ИМ, которому оно принадлежит, соответствуют некоторому подсемейству семейства дифференциальных уравнений (1). Остальные решения являются решениями системы (1) $\forall x$.

С механической точки зрения при $x = 0$ элементы рассматриваемых семейств решений соответствуют винтовым движениям твердого тела в жидкости, а при $x = 1$ — перманентным вращениям тела.

Нетрудно показать, что ИМ (18), (19), (23) — подмногообразия ИМ (12), а ИМ (24) — подмногообразие ИМ (15).

Рассмотрим еще одно решение дифференциальных уравнений (1), механическая интерпретация которого отличается от ранее приведенных. Непосредственно из уравнений (1) следуют соотношения

$$r_3 = 0, \quad s_1 = 0, \quad s_2 = 0, \quad (27)$$

которые определяют ИМ коразмерности 3. Дифференциальные уравнения на этом ИМ

$$\begin{aligned} \dot{s}_3 &= (\beta r_1 - \alpha r_2)s_3, \\ \dot{r}_1 &= r_2(\alpha r_1 + \beta r_2 + 2s_3) - \beta x s_3^2, \\ \dot{r}_2 &= -r_1(\alpha r_1 + \beta r_2 + 2s_3) + \alpha x s_3^2 \end{aligned}$$

описывают маятнико-подобные колебания тела.

ИМ (27) принадлежит ИМ (12), т. е. является его подмногообразием.

2.3.1. О семействах интегралов, принимающих стационарные значения на заданном решении

Получим семейства интегралов, которые принимают стационарное значение на решениях (21)–(26). Вначале решим эту задачу для семейства решений (22).

Возьмем следующую комбинацию интегралов:

$$2\bar{K} = 2\mu_0 H - 2\mu_1 V_1 - \mu_2 V_2 - \mu_3 V_3 \quad (\mu_i = \text{const}), \quad (28)$$

и из уравнений

$$\frac{\partial \bar{K}}{\partial r_i} = 0, \quad \frac{\partial \bar{K}}{\partial s_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

найдем ограничения на μ_1, μ_2 , при которых решение (22) удовлетворяет этим уравнениям:

$$\begin{aligned} \mu_2 &= \frac{z(s_2^{02} + \beta^2 s_3^{02})\mu_0}{z^2 s_2^{02} x - \beta^2 s_3^{02}}, & \mu_3 &= \beta \left(\frac{\beta s_3^0 \mu_0 - s_2^0 \mu_1}{s_3^0 (z s_2^{02} + \beta^2 s_3^0)} + \frac{\beta \mu_0}{z^2 s_2^{02} x - \beta^2 s_3^{02}} \right), \\ z &= \alpha^2 + \beta^2. \end{aligned}$$

Подставив последние выражения в (28), будем иметь:

$$2\bar{K}_1 = \left(2H - \frac{\beta^2 V_3}{zs_2^{02} + \beta^2 s_3^{02}} - \frac{\beta^2 V_3 + (zs_2^{02} + \beta^2 s_3^{02})zV_2}{s_2^{02}xz^2 - \beta^2 s_3^{02}} \right) \mu_0 +$$

$$2 \left(\frac{\beta s_2^0 V_3}{2s_3^0(\beta^2 s_3^{02} + s_2^{02}z)} - V_1 \right) \mu_1. \quad (29)$$

Как можно проверить непосредственно вычислением, семейство интегралов $\bar{K}_1$, а также его подсемейства (коэффициенты при μ_0, μ_1), принимают стационарные значения на элементах семейства решений (22). Аналогично можно получить семейства интегралов, которые принимают стационарные значения на элементах остальных семейств решений.

Подобную задачу можно ставить и для ИМ. Так для ИМ (19) найдена нелинейная комбинация интегралов $\Phi = (\alpha^2 + \beta^2)V_1^2 + V_3$, а для ИМ (27) — $\bar{\Phi} = H^2 - V_3$, необходимые условия экстремума которых удовлетворяются на данных ИМ.

3. Устойчивость стационарных решений

Рассмотрим задачу устойчивости для найденных стационарных решений.

Исследуем семейство решений (22). Интеграл (29) при $\mu_1 = \beta s_3^0 \mu_0 / s_2^0$ будем использовать для получения достаточных условий устойчивости элементов этого семейства. При указанном условии интеграл принимает вид

$$\tilde{K}_1 = \mu_0 \tilde{K}_1 \quad (\mu_0 \neq 0), \quad (30)$$

где

$$\tilde{K}_1 = H - \frac{\beta s_3^0}{s_2^0} V_1 - \frac{s_2^{02} z^2 V_2 + \beta^2 (V_3 + s_3^{02} z V_2)}{2(xz^2 s_2^{02} - \beta^2 s_3^{02})}.$$

Задача сводится к проверке условий знакоопределенности 2-й вариации интеграла $\tilde{K}_1$, полученной в окрестности исследуемого решения на линейном многообразии, определяемом первыми вариациями условных интегралов.

Вторая вариация $\tilde{K}_1$ в окрестности решения (22) на линейном многообразии

$$\delta H = s_2^0 \left(\frac{\alpha}{\beta} y_4 + y_5 \right) + s_3^0 \left(\alpha y_1 + \beta y_2 + \frac{\beta s_3^0}{s_2^0} y_3 + y_6 \right) = 0,$$

$$\delta V_2 = \frac{2s_2^0 x}{\beta} (\alpha y_4 + \beta y_5) + s_3^0 \left(2xy_6 - \frac{2[s_2^0(\alpha y_1 + \beta y_2) + \beta s_3^0 y_3]}{s_2^0 z} \right) = 0$$

записывается так:

$$\delta^2 \tilde{K}_1 = a_{11} y_1^2 + a_{12} y_1 y_2 + a_{14} y_1 y_4 + a_{15} y_1 y_5 + a_{22} y_2^2 +$$

$$a_{24} y_2 y_4 + a_{44} y_4^2 + a_{25} y_2 y_5 + a_{45} y_4 y_5 + a_{55} y_5^2.$$

Здесь $y_1 = r_1 + \alpha s_3^0 z^{-1}$, $y_2 = r_2 + \beta s_3^0 z^{-1}$, $y_4 = s_1 - \alpha s_2^0 \beta^{-1}$, $y_5 = s_2 - s_2^0$ — отклонения от невозмущенного решения,

$$a_{11} = -\frac{1}{2\beta^2 s_3^{02} \bar{z}} \left[\alpha^2 s_2^{04} z^2 (xz + 1) + \beta^2 s_3^{02} (\alpha^2 + z) (\beta^2 s_3^{02} + s_2^{02} z) \right],$$

$$a_{12} = -\frac{1}{\beta s_3^{02} \bar{z}} \left[\alpha \left(\beta^2 s_3^{02} (\beta^2 s_3^{02} + s_2^{02} z) + s_2^{04} z^2 (xz + 1) \right) \right],$$

$$\begin{aligned}
a_{14} &= \frac{1}{\beta s_3^0 \bar{z}} \left[\beta^2 (\alpha^2 - \beta^2) s_2^0 s_3^0 - s_2^0 (2\alpha^2 s_2^0 + \beta^2 s_3^0) x z^2 \right], & a_{15} &= -\frac{2\alpha s_2^0}{s_3^0}, \\
a_{22} &= -\frac{1}{2s_3^0 \bar{z}} \left[(z + \beta^2) s_3^0 (\beta^2 s_3^0 + s_2^0 z) + s_2^0 z^2 (xz + 1) \right], & a_{24} &= -\frac{2\alpha s_2^0}{s_3^0}, \\
a_{44} &= -\frac{1}{2\beta^2 s_3^0 z \bar{z}} \left[\beta^4 (z + \beta^2) s_3^0 (xz + 1) + \alpha^2 s_2^0 z (s_2^0 z (1 - xz) + \beta^2 s_3^0 (xz + 3)) \right], \\
a_{25} &= -\frac{1}{s_3^0 \bar{z}} \left[\beta s_2^0 ((\alpha^2 - \beta^2) s_3^0 + (2s_2^0 + s_3^0) x z^2) \right], \\
a_{45} &= \frac{1}{\beta s_3^0 z \bar{z}} \left[\alpha (s_2^0 z^2 (xz - 1) + \beta^2 s_3^0 (\beta^2 s_3^0 (xz + 1) - s_2^0 z (xz + 3))) \right], \\
a_{55} &= -\frac{1}{2s_3^0 z \bar{z}} \left[s_2^0 z^2 (1 - xz) + \beta^2 s_3^0 (s_3^0 (\alpha^2 + z) (xz + 1) + s_2^0 z (xz + 3)) \right], \\
\bar{z} &= s_2^0 x z^2 - \beta^2 s_3^0.
\end{aligned}$$

Условия положительной определенности квадратичной формы $\delta^2 \tilde{K}_1$ являются достаточными для устойчивости элементов исследуемого семейства решений. В форме неравенств Сильвестра они имеют вид:

$$\begin{aligned}
\Delta_1 &= a_{22} > 0, \\
\Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_{22} & \frac{a_{12}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{11} \end{vmatrix} = \frac{z^2 (\beta^2 s_3^0 + s_2^0 z)}{\beta s_3^0 \bar{z}^2} \left[(2\beta^2 s_3^0 (\beta^2 s_3^0 + s_2^0 z) + s_2^0 z^2 (xz + 1)) \right] > 0, \\
\Delta_3 &= \begin{vmatrix} a_{22} & \frac{a_{12}}{2} & \frac{a_{25}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{11} & \frac{a_{15}}{2} \\ \frac{a_{25}}{2} & \frac{a_{15}}{2} & a_{55} \end{vmatrix} = \frac{z(xz + 1) (s_2^0 z (xz - 1) - 2\beta^2 s_3^0)}{\beta^2 s_3^0 \bar{z}^3} \times \\
&\quad \left[\beta^6 (\alpha^2 + z) s_3^0 + 2\beta^4 (z + \beta^2) s_2^0 s_3^0 z + s_2^0 z^4 + \right. \\
&\quad \left. 2\beta^2 s_2^0 s_3^0 z^2 (3\beta^2 s_3^0 + 2s_2^0 z) + \alpha^2 \beta^2 s_2^0 s_3^0 z^2 (xz + 1) \right] > 0, \\
\Delta_4 &= \begin{vmatrix} a_{22} & \frac{a_{12}}{2} & \frac{a_{25}}{2} & \frac{a_{24}}{2} \\ \frac{a_{12}}{2} & a_{11} & \frac{a_{15}}{2} & \frac{a_{14}}{2} \\ \frac{a_{25}}{2} & \frac{a_{15}}{2} & a_{55} & \frac{a_{45}}{2} \\ \frac{a_{24}}{2} & \frac{a_{14}}{2} & \frac{a_{45}}{2} & a_{44} \end{vmatrix} = \frac{z^2 (xz + 1)^2 (\beta^2 s_3^0 + s_2^0 z)^3}{\beta^2 s_3^0 \bar{z}^4} \times \\
&\quad \left[2\beta^2 s_3^0 - s_2^0 z (xz - 1) \right]^2 > 0.
\end{aligned} \tag{31}$$

Для проверки неравенств (31) на совместность использовалась встроенная функция *Reduce* СКА “Mathematica”, которая выдала следующий результат:

$$\alpha \neq 0, \quad \beta \neq 0, \quad s_2^0 \neq 0, \quad s_3^0 \neq 0 \quad \text{и} \quad -\frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} < x < \frac{\beta^2 s_3^0}{(\alpha^2 + \beta^2)^2 s_2^0}. \tag{32}$$

Таким образом, с учетом (30) элементы семейства решений (22) устойчивы при выполнении условий (32) и $\mu_0 \neq 0$.

Сопоставим приведенные выше достаточные условия устойчивости с необходимыми, которые получим, исходя из теоремы Ляпунова [15] об устойчивости по первому приближению.

Уравнения первого приближения в рассматриваемом случае записываются так:

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= \frac{\alpha s_3^0}{z} (\alpha y_2 - \beta y_1) + (xz + 1) \left[\frac{\beta s_3^0}{z} \left(\frac{s_3^0}{s_2^0} y_5 - 2y_6 \right) - s_2^0 y_3 \right], \\ \dot{y}_2 &= \frac{\beta s_3^0}{z} (\alpha y_2 - \beta y_1) + (xz + 1) \left[\frac{\alpha s_2^0}{\beta} y_3 + \frac{s_3^0}{z} \left(2\alpha y_6 - \frac{\beta s_3^0}{s_2^0} y_4 \right) \right], \\ \dot{y}_3 &= s_2^0 y_1 - \frac{\alpha s_2^0}{\beta} y_2 + s_3^0 \left(x + \frac{1}{z} \right) (\beta y_4 - \alpha y_5), \\ \dot{y}_4 &= \alpha s_2^0 y_1 + \beta \left(s_2^0 + \frac{s_3^{0^2}}{s_2^0} \right) y_2 + \left(s_2^0 + \frac{\beta^2 s_3^{0^2}}{s_2^0 z} \right) y_6, \\ \dot{y}_5 &= - \left(\frac{\alpha^2 s_2^0}{\beta} + \frac{\beta s_3^{0^2}}{s_2^0} \right) y_1 - \alpha \left[s_2^0 y_2 + \left(\frac{s_2^0}{\beta} + \frac{\beta s_3^{0^2}}{s_2^0 z} \right) y_6 \right], \\ \dot{y}_6 &= s_3^0 (\beta y_1 - \alpha y_2). \end{aligned} \quad (33)$$

Характеристическое уравнение системы (33)

$$\frac{\lambda^2}{\beta^2 s_2^{0^4} z} \left[\lambda^2 s_2^{0^2} z + s_3^{0^2} (xz + 1) (\beta^2 s_3^{0^2} + s_2^{0^2} z) \right] \left[\beta^2 \lambda^2 s_2^{0^2} z + (xz + 1) (\beta^2 s_2^{0^2} + s_2^{0^2} z)^2 \right] = 0$$

имеет нулевые и чисто мнимые корни с простыми элементарными делителями

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= 0, \quad \lambda_{3,4} = \pm \frac{is_3^0}{s_2^0} \sqrt{((\alpha^2 + \beta^2)s_2^{0^2} + \beta^2 s_3^{0^2}) \left(x + \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \right)}, \\ \lambda_{5,6} &= \pm \frac{i((\alpha^2 + \beta^2)s_2^{0^2} + \beta^2 s_3^{0^2})}{\beta s_2^0} \sqrt{x + \frac{1}{\alpha^2 + \beta^2}} \end{aligned}$$

при следующих ограничениях на параметры α, β, x, s_2^0 :

$$\alpha \neq 0, \quad \beta \neq 0, \quad s_2^0 \neq 0 \quad \text{и} \quad x > -\frac{1}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Таким образом, достаточные условия устойчивости близки к необходимым.

Исследуем границу области устойчивости. Очевидно, при $x = -1/(\alpha^2 + \beta^2)$ все корни характеристического уравнения нулевые. Используя встроенную функцию СКА “Mathematica” *JordanDecomposition*, получим жорданову форму матрицы системы (33) при указанном значении x :

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Как видно из структуры матрицы J , два жордановых блока вида

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

соответствуют двум парам нулевых корней. Откуда следует неустойчивость по первому приближению элементов семейства решений (22) на границе области устойчивости.

Рассмотрим вопрос об устойчивости элементов одного из семейств решений (8), например

$$r_1 = \alpha x \kappa, \quad r_2 = \beta x \kappa, \quad r_3 = \sqrt{x} \kappa, \quad s_1 = \alpha \sqrt{x} \kappa, \quad s_2 = \beta \sqrt{x} \kappa, \quad s_3 = \kappa, \quad (34)$$

$$\kappa = \lambda_0^{1/2} \left[\left((\alpha^2 + \beta^2) x + 1 \right) \lambda_3 \right]^{-1/2}.$$

С помощью интеграла K_1 (9), принимающего стационарное значение на элементах семейства решений (34), получить условия устойчивости не удалось. Для этой цели было использовано подсемейство

$$2\bar{F} = \frac{V_2}{\sqrt{x}} - 2V_1$$

семейства интегралов

$$2F = \mu_0 \left[2H + (\alpha^2 + \beta^2) V_2 - \frac{\lambda_3}{\lambda_0} \left(V_3 + (\alpha^2 + \beta^2) V_1^2 \right) \right] + \mu_1 \left(\frac{V_2}{\sqrt{x}} - 2V_1 \right). \quad (35)$$

Это семейство найдено способом, изложенным в пункте 2.3.1. Как интеграл F , так и его подсемейства (коэффициенты при μ_0, μ_1) принимают стационарные значения на элементах семейства решений (34).

Вариация интеграла $\bar{F}$ в отклонениях

$$\begin{aligned} y_1 &= r_1 - \alpha x \kappa, & y_2 &= r_2 - \beta x \kappa, & y_3 &= r_3 - \sqrt{x} \kappa, \\ y_4 &= s_1 - \alpha \sqrt{x} \kappa, & y_5 &= s_2 - \beta \sqrt{x} \kappa, & y_6 &= s_3 - \kappa \end{aligned}$$

от невозмущенного движения записывается так:

$$2\Delta\bar{F} = \frac{1}{\sqrt{x}} \left((y_1 - \sqrt{x}y_4)^2 + (y_2 - \sqrt{x}y_5)^2 + (y_3 - \sqrt{x}y_6)^2 \right).$$

Введем переменные $\zeta_1 = y_1 - \sqrt{x}y_4$, $\zeta_2 = y_2 - \sqrt{x}y_5$, $\zeta_3 = y_3 - \sqrt{x}y_6$ и запишем $\Delta\bar{F}$ в переменных $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3$:

$$2\Delta\bar{F} = \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\zeta_1^2 + \zeta_2^2 + \zeta_3^2 \right).$$

Поскольку последняя квадратичная форма знакоопределена по входящим в нее переменным при $x > 0$, то исследуемое семейство решений устойчиво при этом условии по переменным $r_1 - \sqrt{x}s_1, r_2 - \sqrt{x}s_2, r_3 - \sqrt{x}s_3$.

Для остальных решений (8) получен аналогичный результат.

Построение уравнений первого приближения и соответствующего им характеристического уравнения, вычисление второй вариации интеграла и условий знакоопределенности квадратичной формы — это стандартные вычислительные процедуры, которые приходится часто выполнять при исследовании устойчивости стационарных решений и ИМ

на основе теорем Ляпунова об устойчивости по первому приближению и метода Рауса–Ляпунова. Программная реализация этих процедур включена в пакет программ [12], написанный на языке СКА “Mathematica”. Пакет предназначен для качественного анализа консервативных динамических систем на основе описываемого в статье подхода. Он применяется как вспомогательный инструмент на различных этапах качественного анализа дифференциальных уравнений. В частности, в приведенных выше вычислениях пакет по заданному решению (22) и комбинации первых интегралов $\tilde{K}_1$ сформировал систему неравенств (31). Дальнейший анализ этих неравенств проводился средствами СКА. Аналогичным образом пакет применяется и при анализе устойчивости по первому приближению.

4. Заключение

С использованием средств компьютерной алгебры проведено в символьном виде исследование семейства дифференциальных уравнений, описывающего при соответствующем значении параметра семейства движение твердого тела в идеальной жидкости, твердого тела с полостями, заполненными вихревой несжимаемой жидкостью. Использовался подход, основанный на сочетании метода Рауса–Ляпунова и его обобщений с методами КА. Выделены ИМ, семейства ИМ различной размерности, семейства стационарных решений. Показано, что все найденные решения принадлежат двум ИМ коразмерности 2. Для некоторых решений получены достаточные условия устойчивости, в том числе по части переменных. В отдельных случаях достаточные условия сопоставлены с необходимыми, проведено исследование границы области устойчивости.

Полученные результаты показывают эффективность используемого подхода. Дальнейшие исследования могут развиваться в направлении применения данного подхода для анализа подобных систем большей размерности.

Литература

1. **Богоявленский О.И.** Интегрируемые уравнения Эйлера на алгебрах Ли, возникающие в задачах математической физики // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1984. — Т. 48, № 5. — С. 883–938. Перевод: Bogoyavlenskii O.I. Integrable Euler equations on Lie algebras arising in problems of mathematical physics // Mathematics of the USSR-Izvestiya. — 1985. — Vol. 25, № 2. — P. 207–257.
2. **Соколов В.В.** Новый интегрируемый случай для уравнений Кирхгофа // Теорет. матем. физика. — 2001. — Т. 129, № 1. — С. 31–37. Перевод: Sokolov V.V. A new integrable case for the Kirchhoff equation // Theoret. math. phys. — 2001. — Vol. 129, № 1. — P. 1335–1340.
3. **Борисов А.В., Мамаев И.С., Соколов В.В.** Новый интегрируемый случай на $so(4)$ // Доклады РАН. — 2001. — Т. 381, № 5. — С. 614–615. Перевод: Borisov A.V., Mamaev I.S., Sokolov V.V. A new integrable case on $so(4)$ // Doklady Physics. — 2001. — Vol. 46, № 12. — P. 888–889.
4. **Sokolov V.V., Wolf T.** Integrable quadratic classical Hamiltonians on $so(4)$ and $so(3, 1)$ // J. Phys. A: Mat. Gen. — 2006. — Vol. 39, № 8. — P. 1915–1926.
5. **Морозов В.П.** Топология слоений Лиувилля случаев интегрируемости Стеклова и Соколова // Матем. сборник. — 2004. — Т. 195, № 3. — С. 69–114. Перевод: Morozov P.V. Topology of Liouville foliations in the Steklov and the Sokolov integrable cases of Kirchhoff’s equations // Sbornik: Mathematics. — 2004. — Vol. 195, № 3. — P. 369–412.

6. **Akbarzadeh R.** Topological analysis corresponding to the Borisov–Mamaev–Sokolov integrable system on the Lie algebra $so(4)$ // Regular and Chaotic Dynamics. — 2016. — Vol. 21, № 1. — P. 1–17.
7. **Акбарзаде Р.** Топология изоэнергетических поверхностей интегрируемого случая Борисова–Мамаева–Соколова на алгебре Ли $so(3,1)$ // Теорет. матем. физика. — 2018. — Т. 197, № 3. — С. 385–396. Перевод: Akbarzadeh R. The topology of isoenergetic surfaces for the Borisov–Mamaev–Sokolov integrable case on the Lie algebra $so(3,1)$ // Theoret. Math. Phys. — 2018. — Vol. 197, № 3. — P. 1727–1736.
8. **Болсинов А.В., Фоменко А.Т.** Интегрируемые гамильтоновы системы. Геометрия. Топология. Классификация. Т. 1, 2. — Ижевск: Изд-кий дом “Удмуртский университет”, 1999. Перевод: Bolsinov A.V., Fomenko A.T. Integrable Hamiltonian Systems. Geometry. Topology. Classification. — Chapman & Hall/CRC, 2004.
9. **Ляпунов А.М.** О постоянных винтовых движениях тела в жидкости. — М.–Л.: АН СССР, 1954. — (Собр. соч. — Т. 1).
10. **Иртегов В.Д.** Инвариантные многообразия стационарных движений и их устойчивость. — Новосибирск: Наука, 1985.
11. **Иртегов В.Д., Титоренко Т.Н.** Об инвариантных многообразиях систем с первыми интегралами // Прикл. матем. и механика. — 2009. — Т. 73, № 4. — С. 531–537. Перевод: Irtegov V.D., Titorenko T.N. The invariant manifolds of systems with first integrals // J. Appl. Math. Mech. — 2009. — Vol. 73, № 4. — P. 379–394.
12. **Банщиков А.В., Бурлакова Л.А., Иртегов В.Д., Титоренко Т.Н.** Символьные вычисления в моделировании и качественном анализе динамических систем // Вычислительные технологии. — 2014. — Т. 19, № 6. — С. 3–18.
13. **Иртегов В.Д., Титоренко Т.Н.** Методы компьютерной алгебры в исследовании нелинейных дифференциальных систем // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2013. — Т. 53, № 6. — С. 1027–1040. Перевод: Irtegov V.D., Titorenko T.N. Computer algebra methods in the study of nonlinear differential systems // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2013. — Vol. 53, № 6. — P. 845–857.
14. **Кокс Д., Литтл Дж., О’Ши Д.** Идеалы, многообразия и алгоритмы. — М.: Мир, 2000. Перевод: Cox D., Little J., and O’Shea D. Ideals, Varieties, and Algorithms. — Springer, 1997.
15. **Ляпунов А.М.** Общая задача об устойчивости движения. — М.–Л.: АН СССР, 1956. — (Собр. соч. — Т. 2). Перевод: Lyapunov A.M. The General Problem of the Stability of Motion. Collected Works. — London: Taylor & Francis, 1992.

Поступила в редакцию 31 августа 2020 г.

После исправления 28 февраля 2021 г.

Принята к печати 5 октября 2021 г.

Литература в транслитерации

1. **Bogoyavlenskii O.I.** Integriruemye uravneniya Eilera na algebrakh Li, vznikayushchie v zadachakh matematicheskoi fiziki // Izv. AN SSSR. Ser. matem. — 1984. — Т. 48, № 5. — С. 883–938. Перевод: Bogoyavlenskii O.I. Integrable Euler equations on Lie algebras arising in problems of mathematical physics // Mathematics of the USSR-Izvestiya. — 1985. — Vol. 25, № 2. — P. 207–257.
2. **Sokolov V.V.** Novyi integriruemyi sluchai dlya uravnenii Kirkhgofa // Teoret. matem. fizika. — 2001. — Т. 129, № 1. — С. 31–37. Перевод: Sokolov V.V. A new integrable case for the Kirchhoff equation // Theoret. math. phys. — 2001. — Vol. 129, № 1. — P. 1335–1340.

3. **Borisov A.V., Mamaev I.S., Sokolov V.V.** Novyi integriruemyi sluchai na $so(4)$ // Doklady RAN. — 2001. — T. 381, № 5. — S. 614–615. Perevod: Borisov A.V., Mamaev I.S., Sokolov V.V. A new integrable case on $so(4)$ // Doklady Physics. — 2001. — Vol. 46, № 12. — P. 888–889.
4. **Sokolov V.V., Wolf T.** Integrable quadratic classical Hamiltonians on $so(4)$ and $so(3, 1)$ // J. Phys. A: Mat. Gen. — 2006. — Vol. 39, № 8. — P. 1915–1926.
5. **Morozov V.P.** Topologiya sloenii Liuvillya sluchaev integriruемости Steklova i Sokolova // Matem. sbornik. — 2004. — T. 195, № 3. — S. 69–114. Perevod: Morozov P.V. Topology of Liouville foliations in the Steklov and the Sokolov integrable cases of Kirchhoff's equations // Sbornik: Mathematics. — 2004. — Vol. 195, № 3. — P. 369–412.
6. **Akbarzadeh R.** Topological analysis corresponding to the Borisov–Mamaev–Sokolov integrable system on the Lie algebra $so(4)$ // Regular and Chaotic Dynamics. — 2016. — Vol. 21, № 1. — P. 1–17.
7. **Akbarzadeh R.** Topologiya izoenergeticheskikh poverkhnostei integriruемого sluchaya Borisova–Mamaeva–Sokolova na algebre Lie $so(3, 1)$ // Teoret. matem. fizika. — 2018. — T. 197, № 3. — S. 385–396. Perevod: Akbarzadeh R. The topology of isoenergetic surfaces for the Borisov–Mamaev–Sokolov integrable case on the Lie algebra $so(3, 1)$ // Theoret. Math. Phys. — 2018. — Vol. 197, № 3. — P. 1727–1736.
8. **Bolsinov A.V., Fomenko A.T.** Integriruemye gamiltonovy sistemy. Geometriya. Topologiya. Klassifikatsiya. T. 1, 2. — Izhevsk: Izd-kii dom “Udmurtskii universitet”, 1999. Perevod: Bolsinov A.V., Fomenko A.T. Integrable Hamiltonian Systems. Geometry. Topology. Classification. — Chapman & Hall/CRC, 2004.
9. **Lyapunov A.M.** O postoyannykh vintovykh dvizheniyakh tela v zhidkosti. — M.–L.: AN SSSR, 1954. — (Sobr. soch. — T. 1).
10. **Irtegov V.D.** Invariantnye mnogoobraziya statsionarnykh dvizhenii i ikh ustoychivost'. — Novosibirsk: Nauka, 1985.
11. **Irtegov V.D., Titorenko T.N.** Ob invariantnykh mnogoobraziyakh sistem s pervymi integralami // Prikl. matem. i mekhanika. — 2009. — T. 73, № 4. — S. 531–537. Perevod: Irtegov V.D., Titorenko T.N. The invariant manifolds of systems with first integrals // J. Appl. Math. Mech. — 2009. — Vol. 73, № 4. — P. 379–394.
12. **Banshikov A.V., Burlakova L.A., Irtegov V.D., Titorenko T.N.** Simvol'nye vychisleniya v modelirovanii i kachestvennom analize dinamicheskikh sistem // Vychislitel'nye tekhnologii. — 2014. — T. 19, № 6. — S. 3–18.
13. **Irtegov V.D., Titorenko T.N.** Metody komp'yuternoi algebry v issledovanii nelineynykh differentsial'nykh sistem // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2013. — T. 53, № 6. — S. 1027–1040. Perevod: Irtegov V.D., Titorenko T.N. Computer algebra methods in the study of nonlinear differential systems // Computational Mathematics and Mathematical Physics. — 2013. — Vol. 53, № 6. — P. 845–857.
14. **Koks D., Little J., O'Shea D.** Idealy, mnogoobraziya i algoritmy. — M.: Mir, 2000. Perevod: Cox D., Little J., and O'Shea D. Ideals, Varieties, and Algorithms. — Springer, 1997.
15. **Lyapunov A.M.** Obschaya zadacha ob ustoychivosti dvizheniya. — M.–L.: AN SSSR, 1956. — (Sobr. soch. — T. 2). Perevod: Lyapunov A.M. The General Problem of the Stability of Motion. Collected Works. — London: Taylor & Francis, 1992.

