

УДК 532.546

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ВЫТЕСНЕНИИ ОДНОГО ГАЗА ДРУГИМ В ОСЕСИММЕТРИЧНОМ СЛУЧАЕ ПРИ КВАДРАТИЧНОМ ЗАКОНЕ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Ю. Н. Гордеев, А. Е. Сандаков, Ю. Л. Чижов*

Московский инженерно-физический институт (государственный университет),
115409 Москва

* Институт проблем механики РАН, 119526 Москва
E-mail: sandakovanton@mail.ru

Исследуется задача о поршневом вытеснении одного газа другим в трещинах (пористых средах) в осесимметричном случае при квадратичном законе сопротивления. В квадратурах построены автомодельные решения для определения динамических характеристик (скорости и давления) вытесняющего и вытесняемого газов. Для ряда начальных условий и параметров построены зависимости автомодельной скорости и давления от автомодельной переменной.

Ключевые слова: автомодельность, вытеснение, газ, сопротивление, трещина, пористая среда.

В работах [1, 2] получено точное решение задачи о течении газа в пористой среде в плоском случае. Задача о вытеснении одной жидкости другой в этом случае рассматривалась в работах [3, 4].

В настоящее время исследование течения газа является актуальной проблемой в теории гидроразрыва пласта (см., например, [5, 6]).

В данной работе рассматривается задача об изотермическом вытеснении одного газа другим в хорошо проницаемых трещинах при осесимметричном течении в случае квадратичного закона сопротивления. В квадратурах построены автомодельные решения для определения скорости и давления вытесняющего и вытесняемого газов. Для ряда начальных условий и параметров построены зависимости автомодельной скорости и давления от автомодельной переменной.

1. Постановка задачи о вытеснении одного газа другим при квадратичном законе сопротивления. При высоких скоростях течения уравнения изотермического движения газа в канале (или в пористой среде) имеют вид [7–12]

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{x^m} \frac{\partial}{\partial x} (x^m u \rho) = 0,$$
$$\frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{b}{w^2} u^2 \rho \quad (p = c^2 \rho),$$

где ρ — плотность; u — скорость; p — давление газа; x — координата; t — время; m — показатель симметрии задачи; c — изотермическая скорость звука в газе; w — раскрытие трещины; b — экспериментальная константа, определяемая шероховатостью трещины и числом Рейнольдса.

В случае осесимметричного течения ($m = 1$) в предположении, что в каждой точке присутствует только одна компонента, уравнения вытеснения газа имеют вид [12]

$$\frac{\partial}{\partial t} \rho_i + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} (x u_i \rho_i) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} p_i = -\frac{b}{w^2} u_i^2 \rho_i, \quad p_i = c_i^2 \rho_i. \quad (1.1)$$

Здесь $i = 1$ соответствует вытесняющему газу ($0 \leq x \leq L(t)$), $i = 2$ — вытесняемому газу ($L(t) \leq x < +\infty$); $L(t)$ — граница раздела газов.

Положение границы раздела $L(t)$ при заданных граничных и начальных условиях определяется из решения системы (1.1).

В предположении поршневого вытеснения начальные и граничные условия задачи примем в виде

$$p(0, t) = p^*, \quad p(x, 0) = p_0. \quad (1.2)$$

На границе раздела газов $x = L(t)$ из условий Гюгонио (непрерывности потоков массы и импульса) следует

$$p_1(L(t), t) = p_2(L(t), t), \quad p_1(u_1 - D)|_{x=L(t)} = p_2(u_2 - D)|_{x=L(t)} \quad (1.3)$$

($D = dL/dt$ — скорость границы).

Поток массы газа через границу раздела двух несмешивающихся газов равен нулю, поэтому условия (1.3) принимают вид $u_1(L(t), t) = u_2(L(t), t) = D$.

Исключив из (1.1) плотность ρ_i , получим

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{x} \frac{\partial}{\partial x} (x u p) = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = -\frac{u^2 p}{l}, \quad (1.4)$$

где $l = l_1 = w^2/(bc_1^2)$, $p = p_1$, $u = u_1$ при $0 \leq x \leq L(t)$ и $l = l_2 = w^2/(bc_2^2)$, $p = p_2$, $u = u_2$ при $L(t) \leq x < +\infty$. Начальные и граничные условия (1.2), (1.3) записываются в виде

$$p(x, 0) = p_0, \quad p(0, t) = p^*, \quad (1.5)$$

$$p(L(t) - 0, t) = p(L(t) + 0, t), \quad u(L(t) - 0, t) = u(L(t) + 0, t) = D.$$

Задача (1.4), (1.5) является автомодельной с переменной

$$\theta = x(4/(9t^2 l_1))^{1/3} = (4/(9l_1))^{1/3} x t^{-2/3}.$$

Давление p и скорость u течения газа в канале выражаются через безразмерные аналогии $f(\theta)$ и $\varphi(\theta)$:

$$p = p^* f(\theta), \quad u = (2l_1/(3t))^{1/3} \varphi(\theta).$$

Автомодельная переменная θ_0 , соответствующая координате границы раздела газов, равна $\theta_0 = L(t)[4/(9t^2 l_1)]^{1/3}$.

В автомодельных переменных задача (1.4) принимает вид

$$\varphi' - \kappa \varphi^3 + \theta \kappa \varphi^2 + \varphi/\theta = 0, \quad f' + \kappa \varphi^2 f = 0, \quad (1.6)$$

где

$$\kappa = \begin{cases} 1, & 0 \leq \theta \leq \theta_0, \\ \kappa_0 = c_1^2/c_2^2, & \theta_0 < \theta < +\infty, \end{cases}$$

штрих означает производную по переменной θ .

Учитывая, что в данной постановке $\lim_{x \rightarrow \infty} (x u p) = A$, где $A = \text{const}$, начальные и граничные условия (1.2) в автомодельных переменных можно записать в виде

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} (f \theta \varphi) = 1, \quad \lim_{\theta \rightarrow \infty} f = N = p_0/p^*, \quad (1.7)$$

а условия на границе раздела газов — в виде

$$f(\theta_0 - 0) = f(\theta_0 + 0), \quad \varphi(\theta_0 - 0) = \varphi(\theta_0 + 0) = \theta_0. \quad (1.8)$$

2. Автономные решения задачи вытеснения. Перенормировав первое уравнение в (1.6) следующим образом:

$$\varphi = (2/3)^{-1/3} \varkappa^{-1/3} \eta, \quad \theta = (2/3)^{2/3} \varkappa^{-1/3} \xi, \quad (2.1)$$

его можно свести к уравнению вида

$$\frac{d\eta}{d\xi} - \eta^3 + \frac{2}{3} \xi \eta^2 + \frac{\eta}{\xi} = 0. \quad (2.2)$$

Произведя замены $1/\eta = (2/3)\chi\xi^2$ и $\chi = 1 - 3^{2/3}\psi/\xi$, получим уравнение относительно функции $\xi(\psi)$:

$$\frac{d\xi}{d\psi} = 4 \cdot 3^{-4/3} \xi^2 (\xi - 3^{2/3} \psi). \quad (2.3)$$

Из (2.3) следует, что $\xi(\psi)$ — строго монотонная функция, поэтому существует обратная функция $\psi(\xi)$.

Переходя к новой переменной z по формуле $\xi = 3^{2/3} \cdot 2^{-1}(\psi^2 - z)^{-1}$ и используя выражение $\eta = (3/2)\xi^{-2}(1 - 3^{2/3}\psi/\xi)^{-1}$, получим уравнение $d\psi/dz = \psi^2 - z$, которое после замены $\psi = -y'/y$ сводится к уравнению Эйри

$$y'' = zy. \quad (2.4)$$

Уравнение Эйри (2.4) имеет общее решение вида $y = D_1 A_i(z) + D_2 B_i(z)$, где $A_i(z)$, $B_i(z)$ — функции Эйри [13, 14]; D_1 , D_2 — константы.

В данном случае уравнение Эйри (2.4) имеет следующие решения:

$$y(z) = \begin{cases} D_1 A_i(z) + D_2 B_i(z), & 0 \leq \theta < \theta_0, \\ D_3 A_i(z) + D_4 B_i(z), & \theta_0 < \theta. \end{cases}$$

Первое решение описывает вытесняющий газ с параметром $\varkappa = 1$, второе — вытесняемый газ с параметром $\varkappa = \varkappa_0 = c_1^2/c_2^2$. Константы D_i ($i = 1, \dots, 4$) определяются с помощью граничных условий задачи.

Из второго уравнения в (1.6) и из (2.1) получим

$$\frac{df}{d\xi} + \eta^2 f = 0. \quad (2.5)$$

Интегрируя (2.5) и используя цепочку равенств, полученную в работе [12], можно записать $f = (2/3)y^2 + (4/3)y'^3 y^{-1} - (4/3)y'yz$. Таким образом, давление газа f выражено через функцию $y(z)$.

Переменные ξ и z связаны через функцию $\psi(z)$:

$$y'^2 y^{-2} = 3^{2/3} \cdot 2^{-1} \xi^{-1} + z. \quad (2.6)$$

Рассмотрим асимптотические решения (2.2). При $\xi \rightarrow \infty$ скорость газа $\eta(\xi) \rightarrow 0$. В данном случае асимптотическое решение (2.2) имеет вид $\eta \approx (3/2)\xi^{-2} + E\xi^{-3} + \dots$, где E — постоянная. Из определения функции ψ следует, что при $\xi \rightarrow \infty$ ψ стремится к постоянной величине, при этом $\psi^2(z_1) = z_1$.

При $\xi \rightarrow 0$ асимптотические решения (2.2) можно представить в виде $\eta \approx 1/\sqrt{2\xi}$ и $\psi \approx -3^{-1/3}(2\xi)^{-1/2}$, т. е. при $\xi \rightarrow 0$ получаем $\psi \rightarrow -\infty$.

Поскольку $\psi = -y'y^{-1}$, точке $\xi = 0$ соответствует точка $z = z_0$ ($z_0 < z_1$ — ближайшая к z_1 точка, в которой $y(z_0) = 0$).

При изменении ξ от нуля до ∞ переменная z изменяется от z_0 до z_1 с единственным разрывом в точке на границе раздела газов.

При $\xi \rightarrow 0$ или $z = z_0$ имеем

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} (f\theta\varphi) = 1, \quad y(z_0) = 0.$$

Используя также тождество $A'_i(z_0)B_i(z_0) - A_i(z_0)B'_i(z_0) = 1/\pi$ [14], получим

$$D_1 = 3^{1/2} \cdot 2^{-2/3} \pi B_i(z_0), \quad D_2 = -3^{1/2} \cdot 2^{-2/3} \pi A_i(z_0).$$

При $\xi \rightarrow \infty$ или $z = z_1$ имеем

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} f = N, \quad \psi^2(z_1) = z_1,$$

$$D_3 = -\sqrt{1,5N} \pi (B'_i(z_1) - \sqrt{|z_1|} B_i(z_1)), \quad D_4 = \sqrt{1,5N} \pi (A'_i(z_1) - \sqrt{|z_1|} A_i(z_1)).$$

Используя (2.1), (2.6) и определение функции η , можно записать зависимость $z(\theta)$:

$$z = \left(\frac{\varkappa}{4}\right)^{2/3} \left(\theta - \frac{1}{\varkappa\varphi\theta}\right)^2 - \frac{1}{\theta} (2\varkappa)^{-1/3}, \quad \varkappa = \begin{cases} 1, & 0 \leq \theta \leq \theta_0, \\ \varkappa_0, & \theta_0 < \theta < +\infty. \end{cases}$$

В точке θ_0 скорость движения газа $\varphi(\theta)$ непрерывна, а параметр \varkappa изменяется скачкообразно от $\varkappa = 1$ до $\varkappa = \varkappa_0$, поэтому в точке θ_0 функция $z(\theta)$ также изменяется скачкообразно от $z(\theta_0 - 0) = z^-$ до $z(\theta_0 + 0) = z^+$, где

$$z^- = 2^{-1/3} (\theta_0^2 / (2(1 - \theta_0^{-3})^2) - \theta_0^{-1}), \quad z^+ = (\varkappa_0/4)^{2/3} (\theta_0 - (\varkappa_0\theta_0^2)^{-1})^2 - \theta_0^{-1} (2\varkappa_0)^{-1/3}.$$

В интервалах $\theta \in [0, \theta_0]$ и $\theta \in (\theta_0, +\infty)$ функция $z(\theta)$ меняется монотонно.

С учетом условий (1.8), (2.1), используя определение функции η , получим

$$y(z^-) = \varkappa_0^{-1/2} y(z^+), \quad \frac{y'(z^+)}{y'(z^-)} = \varkappa_0^{-1/6} \left(\frac{1 - \theta_0^3 \varkappa_0}{1 - \theta_0^3} \right). \quad (2.7)$$

Таким образом, для всех фиксированных N и \varkappa_0 из (1.8) и условия $\theta(z^-) = \theta(z^+)$ определяются значения z_0 и z_1 .

Рассмотрим алгоритм построения аналитического решения задачи (1.6)–(1.8). Отметим, что N и \varkappa_0 — фиксированные параметры задачи, а z_0 — вспомогательный параметр, который подбирается. Сначала выбирается некоторое значение z_0 , после чего определяются константы D_1, D_2 и функция $y(z)$ для вытесняющего газа. Таким образом, на отрезке $z \in [z_0, z^-]$ функции $f(z)$, $\varphi(z)$ и $\theta(z)$ для вытесняющего газа являются определенными. Далее по z_0 определяется значение z^- , а затем с помощью z^- , заданного \varkappa_0 и условий (1.8) находится z^+ . С помощью условий на границе (2.7) вычисляются константы D_3, D_4 . Таким образом, определяются функция $y(z)$ и функции $f(z)$, $\varphi(z)$ и $\theta(z)$ для вытесняемого газа на отрезке $z \in [z^+, z_1]$. Далее находится значение z_1 и определяется некоторое значение \tilde{N} , соответствующее выбранному z_0 . Значение параметра z_0 , отвечающее заданному значению параметра N , может быть определено путем подбора с соответствующей точностью.

Построены зависимости динамических характеристик газов $f(\theta)$ и $\varphi(\theta)$ как функций автомодельной переменной θ при различных начальных условиях.

На рис. 1, 2 представлены зависимости давления газа f и скорости газа φ от θ .

Из рис. 1 следует, что границе раздела газов $\theta = \theta_0$ соответствует скачок производной давления $f(\theta)$. Если плотность вытесняемого газа больше плотности вытесняющего газа

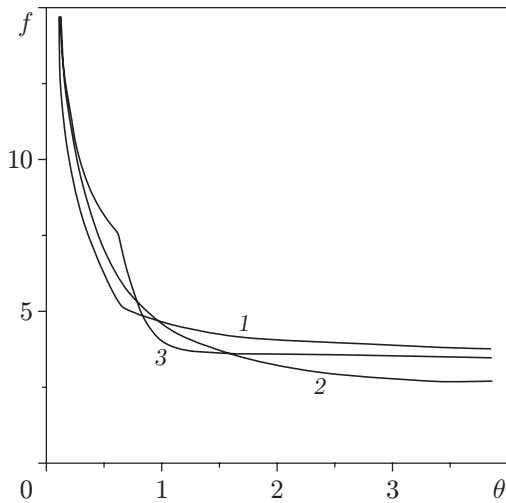


Рис. 1

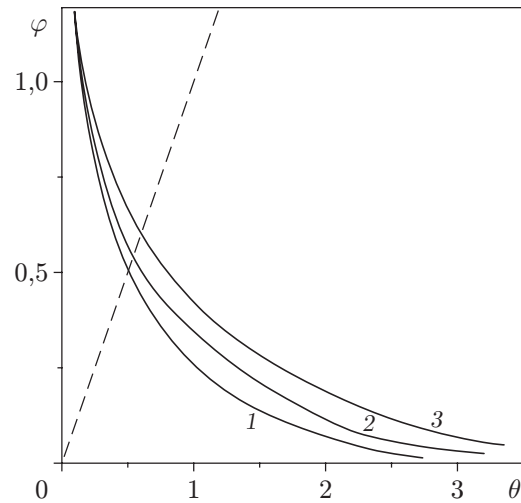


Рис. 2

Рис. 1. Зависимость давления газа f от автомодельной переменной θ :
 1 — $\kappa_0 = 0,5$, $N = 3,1$; 2 — $\kappa_0 = 1$, $N = 2,85$; 3 — $\kappa_0 = 4$, $N = 3,5$

Рис. 2. Зависимость скорости газа φ от автомодельной переменной θ :
 штриховая линия — $\varphi = \theta$; остальные обозначения те же, что на рис. 1

($\kappa_0 > 1$), то скачок производной отрицателен ($df/d\theta|_{\theta=\theta_0+0} - df/d\theta|_{\theta=\theta_0-0} < 0$), в случае меньшей плотности вытесняемого газа ($\kappa_0 < 1$) скачок производной положителен.

Результаты данной работы могут быть использованы для исследования течения газа по осесимметричной трещине при больших скоростях движения [11], а также для тестирования различных численных алгоритмов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бондаренко А. Г., Колабашкин В. М., Кудряшов Н. А. Автомодельное решение задачи о течении газа через пористую среду в режиме турбулентной фильтрации // Прикл. математика и механика. 1980. Т. 44, № 3. С. 573–577.
2. Гордеев Ю. Н., Кудряшов Н. А., Мурзенко В. В. Автомодельные решения одномерных задач движения газа в пористой среде при двучленном законе сопротивления // Инж.-физ. журн. 1984. Т. 47, № 3. С. 36–42.
3. Гаджиев Л. М., Мурадов И. Р., Агаева С. У. Автомодельные решения вытеснения одной жидкости другой в пласте при нелинейном (квадратичном) законе фильтрации // Изв. вузов. Нефть и газ. 1983. № 4. С. 34–38.
4. Гордеев Ю. Н., Кудряшов Н. А., Мурзенко В. В. Изотермическое вытеснение одного газа другим // Изв. вузов. Нефть и газ. 1987. № 3. С. 103–107.
5. Reservoir stimulation / Ed. by M. J. Economides, K. G. Nolte. Houston: Shlumberger Educ. Services, 1997.
6. Garagash D., Detournay E. An analysis of the influence of the pressurization rate on the borehole breakdown pressure // J. Solids Struct. 1997. V. 34, N 24. P. 3099–3118.
7. Лейбензон Л. С. Движение природных жидкостей и газов в пористой среде. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1947.
8. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977.

9. **Баренблатт Г. И.** Об автомодельных движениях сжимаемой жидкости в пористой среде // Прикл. математика и механика. 1952. Т. 16, вып. 6. С. 679–698.
10. **Morrison F. A. (Jr.)** Transient non-Darcy gas flow in a finite porous bed // Trans. ASME. Ser. I. J. Fluids Engng. 1977. V. 99, N 4. P. 224–230.
11. **Pifts J. H., Brandt H.** Gas flow in a permeable earth formation containing a crack // Trans. ASME. Ser. E. J. Appl. Mech. 1977. V. 44, N 4. P. 553–558.
12. **Кудряшов Н. А., Мурзенко В. В.** Автомодельное решение задачи осесимметричного движения газа через пористую среду при квадратичном законе сопротивления // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1982. № 4. С. 168–171.
13. **Камке Э.** Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. М.: Наука, 1976.
14. **Абрамовиц М.** Справочник по специальным функциям / М. Абрамовиц, И. Стиган. М.: Наука, 1979.

*Поступила в редакцию 22/V 2007 г.,
в окончательном варианте — 13/IX 2007 г.*
