

3. Непомнящий А. А. Устойчивость волновых режимов в пленке, стекающей по наклонной плоскости.— Изв. АН СССР. МЖГ, 1974, № 3.
4. Маурин Л. Н., Одишария Г. Э., Точигин А. А. Уединенная волна на стекающей жидкой пленке.— В кн.: Нелинейные волновые процессы в двухфазных средах. Под ред. С. С. Кутателадзе. Новосибирск, изд. Ин-та теплофизики СО АН СССР, 1977.
5. Kuramoto Y., Tsuzuki T. Persistent propagation of concentration waves in dissipative media far from thermal equilibrium.— Progress of Theoretical Physics, 1976, vol. 55, N 2.
6. Yamada T., Kuramoto Y. A reduced model showing chemical turbulence.— Progress of Theoretical Physics, 1976, vol. 56, N 2.
7. Уизэм Дж. Линейные и нелинейные волны. М., Мир, 1977.
8. Шумягский Б. М. Таблицы для решения кубических уравнений. М., Гостехиздат, 1950.
9. Цвелодуб О. Ю. Стационарные плоские волны на стекающей пленке жидкости.— В кн.: Теплофизические исследования. Новосибирск, изд. Ин-та теплофизики СО АН СССР, 1977.
10. Покусаев Б. Г., Алексеенко С. В. Двумерные волны на вертикальной пленке жидкости.— В кн.: Нелинейные волновые процессы в двухфазных средах. Новосибирск, изд. Ин-та теплофизики СО АН СССР, 1977.
11. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. М., Наука, 1973.

УДК 532.517+532.574.7

О ЗАРОЖДЕНИИ ВИХРЕЙ ТЕЙЛОРА В ТЕЧЕНИИ КУЭТТА

*Ю. Г. Василенко, Е. А. Кузнецов, В. С. Львов,
Ю. Е. Нестерихин, В. С. Соболев, М. Д. Спектор,
С. А. Тимохин, Е. Н. Уткин, Н. Ф. Шмойлов*

(Новосибирск)

В последнее время изучение механизмов зарождения гидродинамической турбулентности является предметом многочисленных исследований (см. [1] и обзоры [2, 3]). Однако до сих пор не найдены ответы на ряд вопросов, касающихся процессов перехода от ламинарного состояния к турбулентному. Следует отметить, что неустойчивость ламинарного течения не приводит сразу к турбулентности — могут возникнуть другие формы равновесного движения, представляющего собой суперпозицию первичного течения и возмущений конечной амплитуды. Таким примером может служить течение между соосными цилиндрами — течение Куэтта, которое изучалось на протяжении многих лет как теоретически, так и экспериментально [4—6]. Известно, что при увеличении скорости вращения внутреннего цилиндра течение Куэтта теряет устойчивость, что приводит к появлению вихрей Тейлора. Подробному исследованию этого перехода посвящена данная работа. В ней изложены как теоретические, так и экспериментальные результаты.

В ходе экспериментов было установлено, что переход к вихрям Тейлора осуществляется мягким образом — амплитуда вихрей с ростом надкритичности изменяется по закону Ландау [1]. При малой надкритичности исследованы также переходы между состояниями с различным числом вихрей, определена граница их устойчивости. В теоретической части работы в рамках уравнения для огибающих, описывающего слабую пространственную модуляцию вихрей Тейлора, исследована устойчивость стационарных решений.

1. Как известно [6], потеря устойчивости ламинарного течения Куэтта, скорость которого при вращении внутреннего цилиндра $V_\Phi = \frac{\Omega R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \times \left(\frac{R_2}{r} - r \right)$ (Ω — частота вращения, R_1, R_2 — радиусы внутреннего и внешнего цилиндров), наступает при некотором числе Рейнольдса Re_* ($Re =$

$= \Omega R_1^2 / \nu$). Эта неустойчивость является аperiodической и для возмущений, периодических вдоль оси цилиндра, характеризуется инкрементом γ_k , имеющим максимум при некотором значении волнового числа $k = k_0$. При малых надкритичностях $\varepsilon = (\text{Re} - \text{Re}_*) / \text{Re}_*$ возмущения неустойчивы в узком интервале вблизи k_0 . Их инкремент может быть представлен в виде

$$(1.1) \quad \gamma_k = \gamma_0 - \alpha(k - k_0)^2,$$

где $\gamma_0 \sim \varepsilon$; $\alpha > 0$, а интервал Δk неустойчивых волновых чисел, как следует отсюда, $\sim \varepsilon^{1/2}$. Поэтому при малых превышениях над порогом неустойчивости возбуждается узкий пакет волн. Таким образом, на линейной стадии неустойчивости возмущение скорости v может быть представлено в виде

$$v = \varphi(r) A(z, t) e^{ik_0 z} + \text{к. с.},$$

где $\varphi(r) e^{ik_0 z}$ — собственная функция линейной задачи при $k = k_0$; $A(z, t)$ — медленно меняющаяся от z амплитуда возмущений. Как следует из вида инкремента (1.1), на линейной стадии амплитуда A подчиняется уравнению

$$\partial A / \partial t = \gamma_0 A + \alpha \partial^2 A / \partial z^2.$$

Стабилизация неустойчивости обеспечивается нелинейными членами. Их структура определяется из усреднения по «быстрым» пространственным осцилляциям. Первый член разложения по нелинейности есть $-T|A|^2 A$. Поэтому в этом приближении уравнение для амплитуд

$$(1.2) \quad \partial A / \partial t = \gamma_0 A + \alpha \partial^2 A / \partial z^2 - T|A|^2 A$$

имеет почти ту же структуру, что и аналогичное уравнение работы [1], отличаясь от него только диффузионным слагаемым. Следует отметить, что это уравнение встречается при описании одномерной слабонадкритической конвекции [7].

Не учтенные в (1.2) члены разложения будут малы только при условии положительности матричного элемента T . Матричный элемент T может быть получен из уравнения Навье — Стокса по стандартной схеме: он возникает по теории возмущений в третьем порядке по $\sqrt{\varepsilon}$. Явный вид T нам, однако, не понадобится. Необходима только информация о знаке T .

Рассмотрим простейшее решение уравнения (1.2)

$$A_0 = (\gamma_0 / T)^{1/2},$$

описывающее при $T > 0$ мягкий режим возбуждения. Существование решения такого типа доказано в [8]. Именно поэтому $T > 0$.

2. Уравнение (1.2) имеет также и другие стационарные решения

$$(2.1) \quad A = \text{const} e^{iqz}, \quad |A|^2 = \frac{\gamma_0 - \alpha q^2}{T} \equiv \frac{\gamma_{k_0+q}}{T},$$

описывающие вихри Тейлора с периодом $2\pi / (k_0 + q)$, отличным от оптимального $2\pi / k_0$. Видно, что такие решения существуют лишь в том интервале волновых чисел, где неустойчиво первичное течение ($\gamma_k > 0$).

В рамках уравнения для огибающих можно рассмотреть устойчивость вихрей Тейлора с заданным k . Линеаризуя уравнение (1.2) на фоне стационара (2.1), для возмущений вида $\delta A = A e^{\sigma t} u$ можно получить

уравнение

$$\sigma u = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2i\alpha q \frac{\partial u}{\partial z} - \gamma_{k_0+q} (u + u^*).$$

Его решение

$$u = u_1 e^{ikz} + u_2 e^{-ikz}$$

описывает две ветви колебаний с декрементами

$$\sigma = -\kappa^2 \alpha - \gamma_{k_0+q} \pm (\gamma_{k_0+q}^2 + 4\alpha^2 q^2 \kappa^2)^{1/2}.$$

Отсюда следует, что вихри Тейлора с заданным q устойчивы [9] при

$$q^2 < \frac{1}{3} \frac{\gamma_0}{\alpha} \equiv \frac{1}{3} (\Delta k)^2.$$

Отметим, что на границе устойчивости амплитуда вихрей с заданным q остается конечной и составляет $\sqrt{2/3}$ от амплитуды A (при той же надкритичности) вихрей с оптимальным периодом $2\pi/k_0$. Поэтому при уменьшении надкритичности ε система вихрей должна перестраиваться, образуя вихри с периодом, близким к оптимальному. Причем перестройка должна происходить плавно в бесконечной системе и скачком — в конечной из-за дискретности k .

Рассмотрим теперь общее стационарное решение уравнения (1.2). Вначале перейдем к безразмерным переменным

$$\tau = \gamma_0 t, \quad \xi = z/\sqrt{\alpha}, \quad u = A\sqrt{T} = x + iy,$$

в которых уравнение приобретает вид

$$(2.2) \quad \partial u / \partial \tau = \partial^2 u / \partial \xi^2 + (1 - |u|^2)u.$$

Его стационарные решения определяются из уравнения

$$\partial^2 r / \partial \xi^2 = (r^2 - 1)r,$$

которое описывает «движение» частицы в центрально-симметричном поле с потенциалом

$$V = -(1 - r^2)^2/4.$$

Это уравнение сохраняет момент $M = r^2 \partial \theta / \partial \xi$ и энергию

$$E = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial r}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{M^2}{2r^2} - \frac{1}{4} (1 - r^2)^2.$$

Физический смысл имеют финитные движения, которые существуют только при $M^2 < 4/27$. В этой области параметров корни e_1, e_2, e_3 кубического уравнения $E = \frac{M^2}{2e} - \frac{1}{4} (1 - e)^2$ положительны ($e_3 > e_2 > e_1 > 0$).

Тогда решение уравнения записывается в виде

$$(2.3) \quad r^2 = e_1 + (e_2 - e_1) \operatorname{sn}^2 v \xi,$$

где $v = ((e_3 - e_1)/2)^{1/2}$; $\operatorname{sn} v \xi$ — эллиптический синус с модулем $k = ((e_2 - e_1)/(e_3 - e_1))^{1/2}$. При этом фаза θ определяется интегрированием выражения M/r^2 . Таким образом, найденное общее стационарное решение описывает плавные модуляции в системе вихрей. Отметим, что собственно вихрям Тейлора соответствуют решения с $r^2 = \text{const}$, величина константы определяется из экстремумов эффективной потенциальной энергии $V + M^2/2r^2$. Причем минимуму отвечают неустойчивые ($q^2 > \Delta k^2/3$), а максимуму — устойчивые ($q^2 < \Delta k^2/3$) вихри Тейлора (2.1).

Для исследования устойчивости общего решения (2.3) необходимо определить спектр σ линеаризованного уравнения (2.2)

$$\sigma \rho = \partial^2 \rho / \partial \xi^2 + \rho(1 - r^2) - 2r(\rho r),$$

где ρ — возмущение.

Представим вектор ρ в виде $\rho = \varphi r + \psi \partial r / \partial \xi$. При этом функции φ и ψ определяются из системы

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \sigma \varphi &= \partial^2 \varphi / \partial \xi^2 - 2(1 - r^2) \partial \psi / \partial \xi - 2\varphi r^2, \\ \sigma \psi &= \partial^2 \psi / \partial \xi^2 + 2\partial \varphi / \partial \xi, \end{aligned}$$

коэффициенты которой являются периодическими функциями от ξ с периодом $2K/\nu$ ($K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода). Поэтому решение (2.4) можно представить в виде произведения $e^{i\nu\xi}$ на периодическую функцию от ξ , а спектр σ в зависимости от квазиимпульса r имеет зонную структуру. Границы зон, которым соответствуют чисто периодические решения, могут быть явно найдены.

Так, значению $\sigma = 0$ соответствуют две собственные функции $\rho_1 = \partial r / \partial \xi$ ($\psi = 1, \varphi = 0$) и $\rho_2 = (y, -x)$ ($\varphi = -r \frac{\partial r}{\partial \xi} / M, \psi = r^2 / M$) с квазиимпульсом $r = 0$. Для нахождения других границ положим $\psi = \partial \varphi / \partial \xi$, при этом система (2.4) сводится к одному уравнению четвертого порядка

$$f^{IV} + 2f''(\sigma - 2 + 3r^2) + f\sigma(\sigma + 2r^2) = 0.$$

Приведем периодические решения этого уравнения и соответствующие им значения σ , которые представляют границы зон:

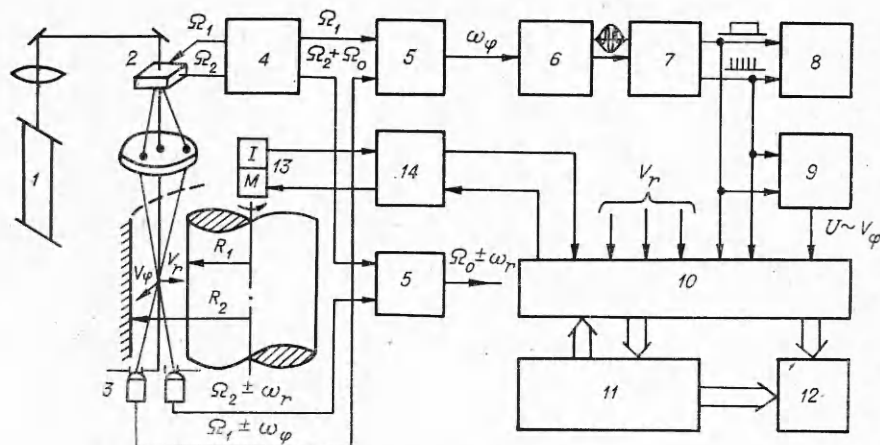
$$\begin{aligned} f &= \operatorname{sn} \nu \xi, \quad \sigma = (1/2) \{ -(e_2 + e_3) \pm [(e_2 + e_3)^2 + 3(e_3 - e_2)^2]^{1/2} \}, \\ f &= \operatorname{cn} \nu \xi, \quad \sigma = (1/2) \{ -(e_1 + e_3) \pm [(e_1 + e_3)^2 + 3(e_3 - e_1)^2]^{1/2} \}, \\ f &= \operatorname{dn} \nu \xi, \quad \sigma = (1/2) \{ -(e_1 + e_2) \pm [(e_1 + e_2)^2 + 3(e_2 - e_1)^2]^{1/2} \}. \end{aligned}$$

Для каждого из решений значение собственного числа σ с верхним знаком положительно, что соответствует неустойчивости. Таким образом, в слабонадкритической области нет других устойчивых стационарных решений, кроме вихрей Тейлора.

3. Экспериментальная установка (фиг. 1) состоит из гидродинамического стенда с прецизионным приводом, лазерного доплеровского измерителя скорости (ЛДИС), узлов ввода — вывода данных в вычислительную машину и внешних устройств вывода информации.

Гидродинамическая часть установки представляет собой два коаксиальных металлических цилиндра высотой 300 мм, зазор между которыми составляет 10 мм при диаметре внутреннего цилиндра 35 мм. Радиальные биения внутреннего цилиндра не превышают 5 мкм. С целью визуализации течения использовался такого же размера внешний цилиндр из оргстекла. В качестве рабочей жидкости использовалась вода или водный раствор глицерина. Заданная температура жидкости поддерживалась с точностью 0,02°C. Система авторегулирования 14 оборотов двигателя 1З, вращающего внутренний цилиндр, обеспечивает стабильность порядка 0,01% в диапазоне от 100 мс до 10 с. Период вращения может изменяться с минимальным шагом 10^{-4} .

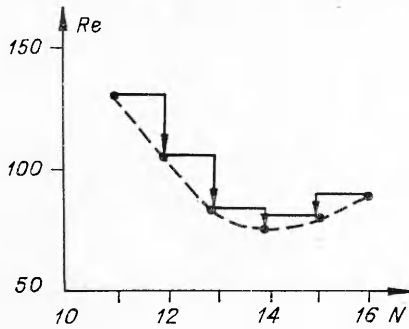
Для измерения скорости жидкости использовался двухчастотный двухкомпонентный лазерный доплеровский измеритель скорости (ЛДИС), оптическая часть которого построена по схеме рассеяния вперед с опорным пучком. В качестве устройства смещения частоты излучения лазера 1



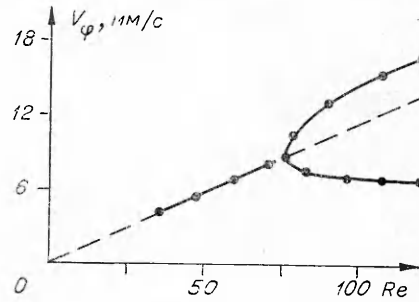
Фиг. 1

и расщепителя использовалась акустооптическая ячейка Брэгга 2 на кристалле TeO_2 с частотой возбуждения $\Omega_1 = 24$ МГц, задаваемой синтезатором частот 4. Лазерные пучки, как показано на фиг. 1, входят через верхнее оптическое окно в зазор между цилиндрами. Геометрия системы позволяла измерять компоненту скорости V_φ . Размер измерительного объема составлял $600 \times 100 \times 100$ мкм³.

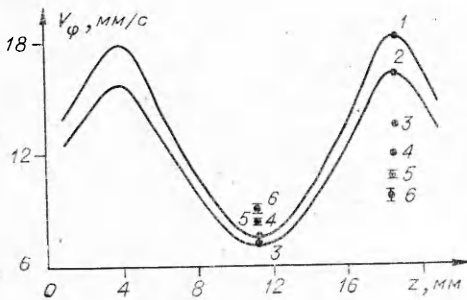
Применение акустооптической ячейки Брэгга позволило кардинально решить задачу фильтрации «пьедестала» доплеровского сигнала. Пучок нулевого порядка и дифрагированные пучки фокусируются в исследованной области потока, образуя два интерференционных поля со взаимно ортогональными полосами. Выходной сигнал фотоприемника 3 поступает на вход избирательного усилителя со средней частотой настройки 24 МГц. Этот усилитель фильтрует сигнал фотоприемника от шумов и постоянной составляющей. Затем сигнал подается на смеситель 5, где происходит перенос его спектра в область доплеровских частот, после этого — на перестраиваемый фильтр 6, где происходит его окончательная фильтрация от шумов и паразитных продуктов частотного преобразования. Выход фильтра подключен к формирователю 7 [10, 11], на выходе которого получают пакеты импульсов доплеровской частоты ω_φ , соответствующие прохождению рассеивающих частиц через измерительный объем, и строб-импульсы, длительность которых равна длительности этих пакетов. Сигналы с выхода формирователя поступают в крейт КАМАК 10 соответственно на счетчик импульсов и измеритель временных интервалов и затем в память ЭВМ М-400 11, где накапливается массив значений мгновенной скорости. Полученная информация является исходной для вычисления требуемых статистических характеристик скорости. Полученные результаты выводятся на графопостроитель 12. Оперативный контроль производится по индикатору средней скорости 8 и сигналу частотного дискриминатора 9, выходное напряжение которого пропорционально «мгновенной» скорости. Электронные узлы ЛДИС, а также узлы ввода — вывода и управления приводом двигателя выполнены в стандарте КАМАК [12]. Измерительный комплекс позволяет также получать информацию о радиальной компоненте скорости V_r . Для определения знака этой компоненты используется дополнительное частотное смещение Ω_0 . Канал усиления и обработки доплеровской частоты ω_r аналогичен описанному выше.



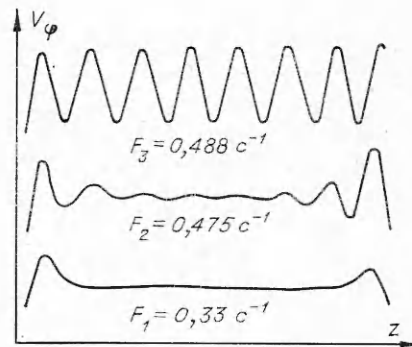
Фиг. 2



Фиг. 3



Фиг. 4

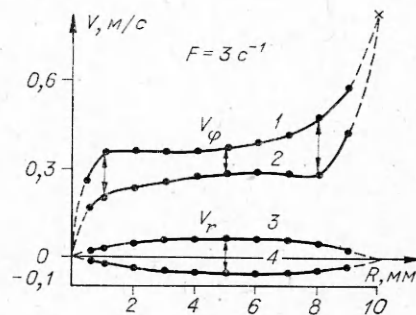


Фиг. 5

4. В экспериментах изучался переход от ламинарного состояния к вихрям Тейлора. Визуально установлено, что в зависимости от начальных условий за порогом устойчивости в системе образуется различное число пар вихрей N (от 11 до 18). В установке с внешним металлическим цилиндром возможность сканирования по оси z в пределах двух вихрей позволяла также определить число N . Было выяснено, что при уменьшении Re к критическому Re_* наблюдалась последовательность переходов от состояния с произвольным числом N к состоянию $N_0 = 14$. На фиг. 2 показана зависимость частоты вращения внутреннего цилиндра $F = \Omega/2\pi$, при которой происходит потеря устойчивости системы с определенным N , от числа пар вихрей N . Видно, что экспериментальные точки переходов лежат на кривой, близкой к параболе, что находится в соответствии с теоретическими представлениями п. 1.

Для системы с оптимальным N_0 был проверен закон Ландау. Для этого в интервале надкритичностей $0,01 < \epsilon < 0,5$ определялась амплитуда A первой пространственной по z гармоники A ; экспериментальная зависимость $A \sim \epsilon^\gamma$, где $\gamma = 0,50 \pm 0,01$, с хорошей точностью подтверждает закон Ландау. Для сравнения укажем, что в аналогичных экспериментах [13] $\gamma = 0,50 \pm 0,03$.

Следует отметить, что при слабой надкритичности малый запас ус-



Фиг. 6

тойчивости приводит к появлению большого уровня шума. Поэтому достоверны лишь данные (фиг. 3) при надкритичностях $\varepsilon \sim 1\%$. Между тем в экспериментах [13] содержатся данные в области $\varepsilon \sim 0,1\%$. Помимо этого, с уменьшением надкритичности от $\varepsilon = 0,8$ до $\varepsilon = 0,018$ происходит смещение точек экстремумов 1—6 по z компоненты V_φ , приводящее к нарушению периодичности вихревой структуры (фиг. 4). Экспериментально показано, что это связано с влиянием торцов, вблизи которых высок уровень гидродинамического шума. В одном из вариантов гидродинамического стенда с цилиндрами меньшей длины (100 мм) и зазором 10 мм изучался процесс образования вихрей по всей длине. На фиг. 5 приведены зависимости V_φ от z при трех значениях F , отсюда видно, что вихри зарождаются у торцов и постепенно заполняют равномерно всю систему. С этими же цилиндрами были получены распределения компонент V_φ (кривые 1, 2 на фиг. 6) и V_r (кривые 3, 4) для вихрей Тейлора в точках, соответствующих максимуму и минимуму по z , в зависимости от r . Видно, что V_r максимальна в центре зазора, а V_φ изменяется более сложно, образуя два максимума. С увеличением надкритичности вихри Тейлора становятся неустойчивыми относительно изгибных колебаний, подробно исследованных визуальными методами в [5]. Статистический анализ, проведенный на ЭВМ, показывает, что в этом случае автокорреляционная функция описывает слабозатухающие колебания с частотой ω_0 и добротностью $\sim 10^2$. С ростом надкритичности вид автокорреляционной функции усложняется, появляются частоты, не соизмеримые с ω_0 .

Поступила 8 V 1979

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д. К проблеме турбулентности. Собрание трудов. Т. 1. М., Наука, 1969.
2. Монин А. С. О природе турбулентности.— УФН, 1978, т. 125, вып. 1.
3. Рабинович М. И. Стохастические колебания и турбулентность.— УФН, 1978, т. 125, вып. 1.
4. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Clarendon, Oxford, 1961.
5. Coles D. Transition in circular Couette flow.— J. Fluid Mech., 1975, vol. 24, pt 3.
6. Юдович В. И. Вторичные течения и неустойчивость жидкости между вращающимися цилиндрами.— ПММ, 1966, № 4.
7. Newell A. C., Whitehead I. A. Finite bandwidth, finite amplitude convection.— J. Fluid Mech., 1969, vol. 38, pt 2.
8. Овчинникова С. Н., Юдович В. И. Расчет вторичного стационарного течения между вращающимися цилиндрами.— ПММ, 1968, т. 32, вып. 5.
9. Kogelman S., DiPrima R. C. Stability of spatially periodic supercritical flows in hydrodynamics.— Phys. Fluids, 1970, vol. 13, N 1.
10. Лазерные доплеровские измерители скорости. Под ред. Ю. Е. Нестерихина. Новосибирск, Наука, 1975.
11. Василенко Ю. Г., Дубнищев Ю. Н., Соболев В. С., Столповский А. А. Лазерные доплеровские измерители вектора скорости со смещением частоты.— Автометрия, 1974, № 6.
12. Нестерихин Ю. Е., Гинзбург А. Н., Золотухин Ю. Н. и др. Организация систем автоматизации научных исследований (проблемы, методы, перспективы).— Автометрия, 1974, № 4.
13. Gollub I. P., Freilich M. H. Optical heterodyne test of perturbations for Taylor instability.— Phys. Fluids, 1976, vol. 19, N 5.