

УДК 519.63

ТЕЧЕНИЯ, ВОЗНИКАЮЩИЕ ПРИ НАБЕГАНИИ ПРЕРЫВНОЙ ВОЛНЫ НА СТУПЕНЬКУ ДНА

В. В. Остапенко, А. А. Малышева

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: ostapenko_vv@ngs.ru

В рамках однослойной модели теории мелкой воды изучается разрешимость задачи о течениях, возникающих при набегаии прерывной волны на ступеньку дна. Рассмотрены решения, в которых полная энергия потока сохраняется на ступеньке, и решения, в которых она на ступеньке теряется. Выделены области двойного и тройного гистерезиса построенных автомодельных решений. Проведена аналогия с задачей обтекания донного препятствия однослойным потоком.

Ключевые слова: мелкая вода, прерывная волна, ступенька дна.

1. Постановка задачи. Дифференциальные уравнения однослойной мелкой воды [1–4] в случае прямоугольного русла постоянной ширины и переменной глубины без учета влияния трения имеют вид

$$h_t + q_x = 0; \quad (1.1)$$

$$q_t + (qv)_x + ghz_x = 0, \quad (1.2)$$

где $h(x, t)$, $q(x, t)$, $v = q/h$, $z = b + h$ — соответственно глубина, расход, скорость и уровень жидкости; $b(x)$ — отметка дна; g — ускорение свободного падения. Уравнение (1.1) представляет собой закон сохранения массы, а уравнение (1.2) — закон сохранения полного импульса. Из этих законов сохранения следуют условия Гюгонио [1, 4]

$$D[h] = [q]; \quad (1.3)$$

$$D[q] = [qv + gh^2/2], \quad (1.4)$$

связывающие параметры течения на прерывной волне, распространяющейся со скоростью D над ровным дном. В формулах (1.3), (1.4) через $[f]$ обозначен скачок функции f на фронте прерывной волны.

Рассмотрим для системы (1.1), (1.2) задачу о распаде начального разрыва

$$z(x, 0) = \begin{cases} z_1, & x < 0, \\ z_0, & x > 0, \end{cases} \quad z_1 > z_0, \quad v(x, 0) = \begin{cases} v_1, & x < 0, \\ 0, & x > 0, \end{cases} \quad v_1 > 0 \quad (1.5)$$

над скачком отметки дна

$$b(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \delta, & x > 0, \end{cases} \quad z_0 > \delta > 0, \quad (1.6)$$

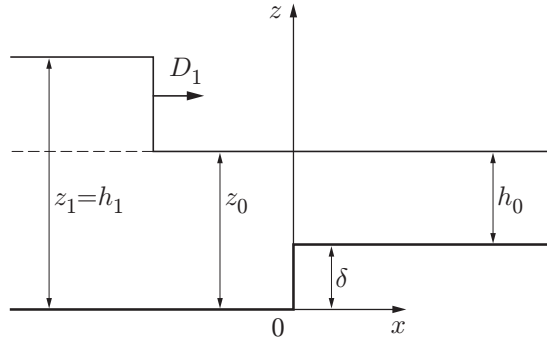


Рис. 1. Профиль начальной прерывной волны, набегающей на ступеньку дна

где параметры потока $z_1 = h_1, v_1$ слева от разрыва (1.6) удовлетворяют условию

$$v_1 = v_s(z_1, z_0), \quad (1.7)$$

в котором

$$v = u_s(h) = v_s(h, z_0) = (h - z_0) \sqrt{g(h + z_0)/(2hz_0)}, \quad h > z_0 \quad (1.8)$$

является уравнением ударной s -адиабаты [4]. Уравнение (1.8), полученное из условий Гюго-нио (1.3), (1.4), связывает параметры потока $h_0 = z_0, v_0 = 0$ перед фронтом прерывной волны с их возможными значениями (h, v) за ее фронтом. Так как $z_1 > z_0, v_1 > 0$, то $q(0, t) > 0$ при $t > 0$ и разрыв (1.6) с учетом терминологии, принятой в [5], представляет собой ступеньку дна, на которую натекает вода. Таким образом, с учетом (1.7), (1.8) автомодельные решения задачи (1.1)–(1.6) описывают течения, возникающие при набегании прерывной волны на ступеньку дна (рис. 1). Скорость распространения этой начальной прерывной волны вычисляется по формуле

$$D_1 = D(z_1, z_0) = \sqrt{gz_1(z_1 + z_0)/(2z_0)}. \quad (1.9)$$

Решение задачи (1.5)–(1.8) при $x < 0$ будем называть течением слева от ступеньки, а при $x > 0$ — течением справа от ступеньки; значение точного решения на разрыве (1.6) при $x = 0 - 0$ будем называть течением перед ступенькой, а при $x = 0 + 0$ — течением на ступеньке.

Задача (1.5)–(1.8) представляет собой частный случай общей задачи о распаде произвольного разрыва над скачком отметки дна, которая изучалась в [6], где были построены качественно различные примеры ее решения в предположении, что на разрыве (1.6) сохраняется полная энергия потока. Однако в [6] не исследована однозначность этих решений и не выделены области их существования. Однозначная разрешимость задачи (1.5), (1.6) при $v_1 = 0$ (задача о разрушении плотины [7] над ступенькой дна) исследовалась в работе [8], сравнение с результатами лабораторных экспериментов приведено в [9]. Автомодельные решения задачи (1.5), (1.6) при $v_1 = 0, \delta < 0$, когда она переходит в задачу о разрушении плотины над уступом дна, построены в [10, 11], сравнение этих решений с экспериментом выполнено в [12].

В настоящей работе, являющейся продолжением работ [8, 11], изучается разрешимость обобщенной задачи (1.5)–(1.8) о течениях, возникающих при набегании прерывной волны на ступеньку дна. Поскольку уравнения мелкой воды (1.1), (1.2) представляют собой простейший пример сильно нелинейной гиперболической системы законов сохранения [13], эквивалентной системе уравнений изоэнтропической газовой динамики [14] с показателем адиабаты $\gamma = 2$, решение для этих уравнений обобщенной задачи о распаде

разрыва (1.5)–(1.8), следуя [15], будем искать в виде комбинации простых волн, стационарного скачка, расположенного в начале координат над ступенькой дна, и соединяющих их зон постоянного течения. При этом применяется обобщенный метод адиабат, который впервые использован в работе [16] при решении задачи о распаде газодинамического разрыва в канале со скачком площади сечения. В результате применения этого метода выделены четыре качественно различных типа устойчивых автомодельных решений задачи (1.5)–(1.8): в трех из них полная энергия потока на ступеньке дна сохраняется и в одном она на ступеньке дна теряется. На плоскости безразмерных определяющих параметров δ , z_1 , полученных при условии $g = z_0 = 1$, построены области существования этих решений. Выделены подобласти двойного и тройного гистерезиса, т. е. такие подобласти, в которых одновременно реализуются два или три различных автомодельных решения. Проведено сравнение построенных решений с решениями задачи о течениях, возникающих при обтекании однослойным потоком длинного донного препятствия [3, 17–19].

2. Автомодельные решения с отраженной прерывной волной. Для построения автомодельных решений задачи о распаде разрыва, сформулированной в п. 1, необходимо задать соотношения, которым удовлетворяют параметры потока на разрыве, возникающем над ступенькой дна (1.6). Следуя [8, 11], будем сначала считать, что на таком разрыве выполнены законы сохранения массы (1.1) и локального импульса

$$v_t + (v^2/2 + gz)_x = 0, \quad (2.1)$$

а значит, как показано в [20], и закон сохранения полной энергии

$$e_t + (q(v^2/2 + gz))_x = gbq_x, \quad (2.2)$$

где $e = (qv + gh^2)/2$ — полная энергия набегающего потока. Уравнения (2.1) и (2.2) являются дифференциальными следствиями системы (1.1), (1.2) на ее гладких решениях. Условия Гюгонио для законов сохранения (1.1) и (2.1) на стоячем скачке, скорость распространения которого $D = 0$, имеют вид

$$[q] = 0, \quad [v^2/2 + gz] = 0, \quad (2.3)$$

т. е. на таком скачке непрерывны расход и константа Бернулли.

Обозначим через h, v и H, V глубину и скорость потока соответственно на ступеньке и перед ней. Тогда соотношения (2.3) можно записать в виде

$$J(H, q) = J(h, q) + \delta, \quad q = hv = HV, \quad (2.4)$$

где $J(y, q) = q^2/(2gy^2) + y$. Как показано в работе [20], соотношения (2.4) задают два отображения F_+ и F_- , первое из которых каждое течение (h, v) на ступеньке переводит в докритическое течение (H_+, V_+) , а второе — в сверхкритическое течение (H_-, V_-) перед ступенькой. В области докритических и критических течений ($v \leq \sqrt{gh}$) устойчивый разрыв над ступенькой задается отображением F_+ , а в области сверхкритических течений ($v > \sqrt{gh}$) — отображением F_- .

После прохождения начальной прерывной волны над ступенькой дна справа от ступеньки будет распространяться новая прерывная волна (рис. 2), параметры течения (h_2, v_2) за фронтом которой лежат на ударной s -адиабате

$$v = v_s(h) = v_s(h, h_0) = (h - h_0)\sqrt{g(h + h_0)/(2hh_0)}, \quad h > h_0. \quad (2.5)$$

На рис. 3 линиями u_s, v_s и v_c изображены ударные s -адиабаты (1.8), (2.5) и множество критических течений

$$v = v_c(h) = \sqrt{gh}, \quad (2.6)$$

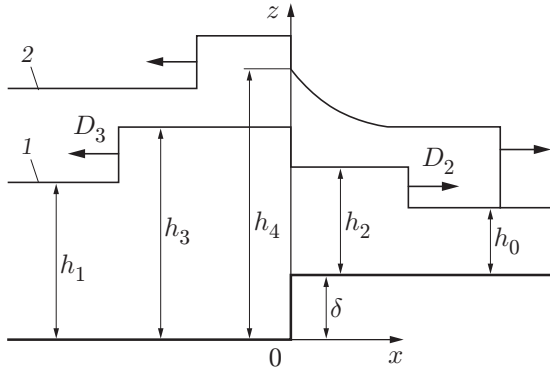


Рис. 2

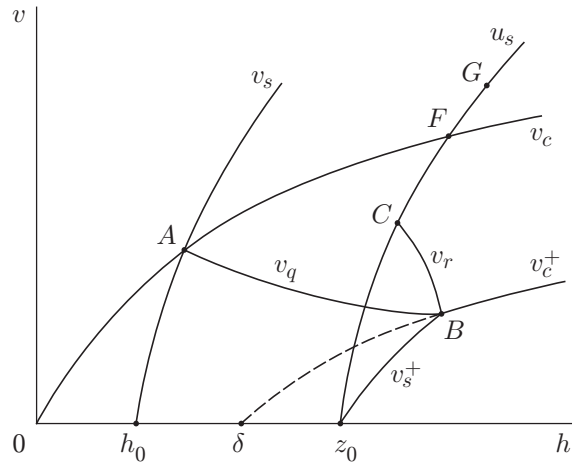


Рис. 3

Рис. 2. Профили волн, возникающих после прохождения начальной прерывной волны над ступенькой дна, в случае докритического течения перед ступенькой:

1 — течение, описываемое решением типа А; 2 — течение, описываемое решением типа В

Рис. 3. Диаграмма адиабат для построения решений типа А и В

а линиями $v_c^+ = F_+[v_c]$ и $v_s^+ = F_+[v_s]$ показаны образы при отображении F_+ множества (2.6) и той части ударной s -адиабаты (2.5), которая лежит в области докритических течений (ниже точки А на рис. 3).

Введем вспомогательную функцию

$$v = v^+(h) = \begin{cases} v_s^+(h), & z_0 < h \leq h_B, \\ v_c^+(h), & h \geq h_B, \end{cases} \quad (2.7)$$

где $B = (h_B, v_B)$ — точка пересечения графиков функций v_s^+ и v_c^+ . Поскольку, как показано в [8], функции v_s^+ и v_c^+ строго монотонно возрастающие, строго монотонно возрастающей является и функция v^+ . Решение задачи (1.5)–(1.8) слева от ступеньки существенно зависит от взаимного расположения на рис. 3 ударной s -адиабаты (1.8) и линии (2.7). Имеет место следующая

Теорема 1. *Функции $u_s(h)$ и $v^+(h)$ удовлетворяют неравенству*

$$u_s(h) > v^+(h) \quad \forall h > z_0. \quad (2.8)$$

Доказательство теоремы 1 приведено в п. 6. Из теоремы 1 следует, что при $h > z_0$ график адиабаты u_s расположен на рис. 3 выше графика функции v^+ .

Зафиксируем на адиабате u_s точку $C = (h_C, v_C)$, из которой выходит ударная r -адиабата

$$v = v_r(h, h_C, v_C) = v_C - (h - h_C)\sqrt{g(h + h_C)/(2hh_C)}, \quad h > h_C,$$

проходящая через точку B . Координаты точки C находятся из системы уравнений $v_C = u_s(h_C)$, $v_B = v_r(h_B, h_C, v_C)$. Имеет место

Теорема 2. *Течение (h_C, v_C) является докритическим, т. е. $v_C < \sqrt{gh_C}$.*

Доказательство теоремы 2 приведено в п. 7. Из теоремы 2 следует, что точка $C = (h_C, v_C)$ лежит на той части адиабаты u_s , которая расположена на рис. 3 ниже линии критических течений v_c .

Предположим, что параметры течения (h_1, v_1) за фронтом начальной прерывной волны, набегающей на ступеньку, лежат на адиабате u_s не выше точки C , в силу чего глубина h_1 удовлетворяет неравенствам $z_0 < h_1 \leq h_C$. Тогда в результате решения задачи о распаде разрыва (1.5)–(1.8) по фону (h_1, v_1) будет распространяться отраженная прерывная волна, параметры течения (h_3, v_3) за фронтом которой однозначно определяются из уравнений $v_3 = v_r(h_3, h_1, v_1) = v_s^+(h_3)$ как координаты точки пересечения строго монотонно убывающей ударной r -адиабаты $v = v_r(h, h_1, v_1)$, выходящей из точки (h_1, v_1) на адиабате u_s , с графиком строго монотонно возрастающей функции v_s^+ . При этом постоянное течение за фронтом прерывной волны, распространяющейся за ступенькой, являясь докритическим или критическим, начинается непосредственно от ступеньки и его параметры (h_2, v_2) вычисляются как координаты точки пересечения адиабаты v_s с гиперболой

$$v = v_q(h, h_3, v_3) = q/h, \quad q = h_3 v_3, \quad (2.9)$$

выходящей из точки (h_3, v_3) .

Скорость прерывной волны, распространяющейся за ступенькой, с учетом (1.9) определяется по формуле

$$D_2 = D(h_2, h_0) = \sqrt{gh_2(h_2 + h_0)/(2h_0)}, \quad (2.10)$$

а скорость отраженной прерывной волны находится по формуле

$$D_3 = v_1 - D(h_3, h_1) = v_1 - \sqrt{gh_3(h_3 + h_1)/(2h_1)}. \quad (2.11)$$

Полученное таким образом решение, профиль которого показан на рис. 2 линией 1, будем называть течением типа А.

Предположим теперь, что $h_1 > h_C$, т. е. точка (h_1, v_1) лежит на адиабате u_s выше точки C (см. рис. 3). Тогда адиабата $v = v_r(h, h_1, v_1)$ пересекает график функции (2.7) по линии v_c^+ , в силу чего параметры течения (h_3, v_3) за фронтом отраженной прерывной волны однозначно определяются из уравнений $v_3 = v_r(h_3, h_1, v_1) = v_c^+(h_3)$. В этом случае течение на ступеньке является критическим и его параметры $h_4 = \sqrt[3]{q^2/g}$, $v_4 = \sqrt[3]{gq}$, где $q = h_3 v_3$, вычисляются как координаты точки пересечения гиперболы (2.9) с линией критических течений (2.6). Течение справа от ступеньки является сверхкритическим и не влияет на параметры потока на ступеньке и слева от нее. Для построения решения, описывающего это течение, необходимо для системы уравнений мелкой воды решить классическую задачу о распаде разрыва над горизонтальным дном [1, 4] со следующими начальными соотношениями:

$$h(x, 0) = \begin{cases} h_4, & x \leq 0, \\ h_0, & x > 0, \end{cases} \quad v(x, 0) = \begin{cases} v_4, & x \leq 0, \\ 0, & x > 0. \end{cases} \quad (2.12)$$

В результате решения задачи (2.12) образуются прерывная s -волна и центрированная r -волна понижения, соединенные областью постоянного течения, параметры которого (h_2, v_2) определяются как координаты точки пересечения ударной s -адиабаты (2.5) с волновой r -адиабатой

$$v = v_r(h, h_4, v_4) = v_4 + 2\sqrt{g}(\sqrt{h_4} - \sqrt{h}), \quad h < h_4. \quad (2.13)$$

Адиабата (2.13) выходит из точки (h_4, v_4) , лежащей на линии критических течений v_c правее точки A (см. рис. 3), в которой эта линия пересекается с ударной адиабатой v_s . Параметры течения в центрированной r -волне понижения вычисляются по формулам [1, 4]

$$h(x, t) = \frac{(3v_4 - \xi)^2}{9g}, \quad v(x, t) = v_4 + \frac{2}{3}\xi, \quad 0 \leq \xi = \frac{x}{t} \leq v_2 - c_2, \quad c_2 = \sqrt{gh_2}. \quad (2.14)$$

Скорости распространения прерывных волн, так же как и ранее, определяются по формулам (2.10) и (2.11). Получаемое таким образом решение, профиль которого показан на рис. 2 линией 2, будем называть решением типа В.

Решения типа В имеют смысл только при условии, что скорость отраженной прерывной волны $D_3 < 0$. Из этого неравенства следует, что точка (h_1, v_1) должна лежать на адиабате u_s ниже точки $G = (h_G, v_G)$, координаты которой $h_G = h_1^*$, $v_G = v_1^*$ находятся из равенства $D_3 = 0$, приводящего к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned} v_1^* &= v_s(h_1^*, z_0) = D(h_3^*, h_1^*), & v_3^* &= v_r(h_3^*, h_1^*, v_1^*), & v_4^* &= \sqrt{gh_4^*}, \\ J(h_3^*, q^*) &= J(h_4^*, q^*) + \delta, & q^* &= h_1^* v_1^* = h_4^* v_4^*. \end{aligned} \quad (2.15)$$

При $D_3 = 0$ отраженная прерывная волна совпадает с неподвижным разрывом над ступенькой, образуя вместе с ним единый стоячий скачок, на котором происходит потеря полной энергии набегающего потока. Поскольку течение перед фронтом стоячего скачка является сверхкритическим, точка G лежит на той части адиабаты u_s , которая расположена на рис. 3 в области сверхкритических течений.

Таким образом, построены автомодельные решения задачи о распаде разрыва (1.5)–(1.8) при условии, что глубина h_1 за фронтом набегающей на ступеньку прерывной волны удовлетворяет неравенствам $z_0 < h_1 < h_G$.

3. Автомодельные решения со сверхкритическим течением перед ступенькой. Построим автомодельные решения задачи о распаде разрыва (1.5)–(1.8), в которых слева от ступеньки сохраняется постоянное сверхкритическое течение (h_1, v_1) , совпадающее с течением за фронтом начальной прерывной волны, набегающей на ступеньку (рис. 4). В таких решениях полный импульс набегающего на ступеньку потока оказывается достаточным для того, чтобы после прохождения над ступенькой начальной прерывной волны влияние ступеньки не распространялось вверх по потоку в область $x < 0$. Указанные автомодельные решения могут быть двух типов: типа С, когда на разрыве, возникающем над ступенькой, выполнены условия (2.4), означающие сохранение полной энергии потока, и решения типа D, когда на ступеньке полная энергия потока теряется.

Рассмотрим сначала решения типа С. В работе [11] показано, что отображение F_- , задаваемое соотношениями (2.4), переводит функцию критических течений (2.6) в моно-

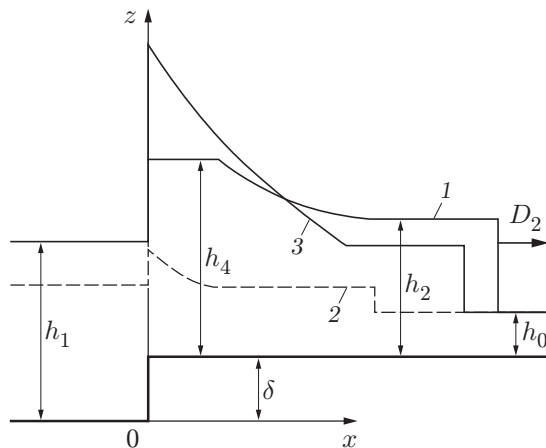


Рис. 4. Профили волн, возникающих после прохождения начальной прерывной волны над ступенькой дна, в случае сверхкритического течения перед ступенькой: 1 — течение, описываемое решением типа С; 2 — предельный случай течения типа С; 3 — течение, описываемое решением типа D

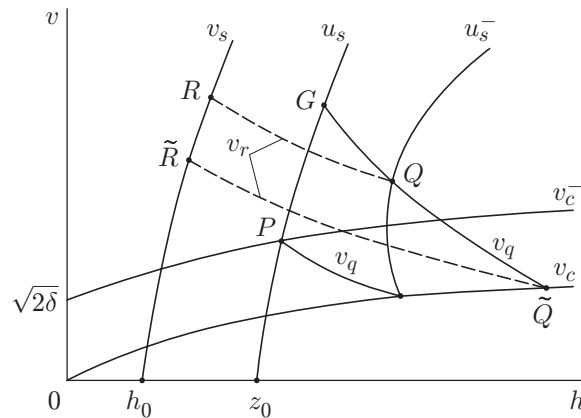


Рис. 5. Диаграмма адиабат для построения решений типа С и D

точно возрастающую функцию $v_c^- = F_-[v_c]$, график которой лежит в области сверхкритических течений (рис. 5). Обозначим через $P = (h_P, v_P)$ точку пересечения адиабаты u_s с линией v_c^- . Координаты этой точки находятся из системы уравнений

$$v_P = v_s(h_P, z_0), \quad J(h_P, q) = J(\sqrt[3]{q^2/g}, q) + \delta, \quad q = h_P v_P.$$

На рис. 5 линией $u_s^- = F_-^{-1}[u_s]$, где F_-^{-1} — отображение, обратное к F_- , приведен образ той части адиабаты u_s , которая расположена в области сверхкритических течений выше точки P . Как показано в [11], функция $u_s^-(h)$ в окрестности линии критических течений является двузначной.

Предположим, что течение за фронтом прерывной волны, набегающей на ступеньку, является сверхкритическим и параметры (h_1, v_1) этого течения лежат на адиабате u_s не ниже точки P , т. е. $h_1 \geq h_P$. Тогда в результате решения задачи о распаде разрыва (1.5)–(1.8) слева от ступеньки сохранится постоянное течение (h_1, v_1) , которое с учетом условий устойчивости, полученных в [17], сформирует на ступеньке течение (h_4, v_4) , являющееся критическим при $h_1 = h_P$ и сверхкритическим при $h_1 > h_P$. Параметры (h_4, v_4) этого течения удовлетворяют неравенствам $h_4 > h_1$, $v_4 < v_1$ и определяются как образ точки (h_1, v_1) при отображении F_-^{-1} или, что то же самое, как координаты точки пересечения линии u_s^- с гиперболой $v_q(h, h_1, v_1)$.

Построение решения справа от ступеньки проводится, как и в течениях типа В, путем решения задачи о распаде разрыва (2.12) над ровным дном. В результате решения этой задачи образуются прерывная s -волна, распространяющаяся со скоростью (2.10), и центрированная r -волна понижения (2.14), в которой $\xi \in [v_4 - c_4, v_2 - c_2]$. Параметры постоянного течения (h_2, v_2) между этими волнами вычисляются как координаты точки пересечения ударной s -адиабаты (2.5) с волновой r -адиабатой (2.13). Профиль получаемого таким образом решения типа С при $h_1 > h_P$ показан на рис. 4 сплошной линией 1. Предельный случай $h_1 = h_P$, когда левая граница волны понижения находится на ступеньке, приведен на рис. 4 штриховой линией 2.

Рассмотрим теперь решения типа D. Как показано в [8], существует два класса решений, в которых полная энергия на ступеньке дна теряется: решения, в которых на разрыв (1.6) приходят две характеристики системы (1.1), (1.2), и решения, в которых на разрыв (1.6) приходят три характеристики этой системы. В случае решений первого класса для замыкания модели мелкой воды требуется модификация условия $[v^2/2 + gz] = 0$ за счет введения в него эвристического параметра, задающего часть полной энергии потока, которая теряется при переходе через ступеньку дна. В случае решений второго класса для

замыкания условий на разрыве (1.6) достаточно непрерывности расхода $[q] = 0$. В этом случае часть полной энергии потока, которая теряется при переходе через ступеньку, однозначно определяется в рамках модели мелкой воды без привлечения каких-либо эвристических параметров. В настоящей работе рассматриваются только решения второго класса.

Для того чтобы в решении типа D три характеристики приходили на разрыв, возникающий над ступенькой, необходимо, чтобы течение перед ступенькой было сверхкритическим, а на ступеньке — критическим. При этом, как показано в [8, 9], для энергетической устойчивости такого разрыва, связанной с потерей на нем полной энергии, необходимо, чтобы параметры потока (h_1, v_1) лежали на адиабате u_s выше точки P , т. е. чтобы начальная глубина удовлетворяла неравенству $h_1 > h_P$. При выполнении этого неравенства задача о распаде разрыва (1.5)–(1.8) допускает энергетически устойчивые решения второго класса, в которых слева от ступеньки сохраняется начальный поток (h_1, v_1) , а на ступеньке формируется критическое течение, параметры которого $h_4 = \sqrt[3]{q^2/g}$, $v_4 = \sqrt[3]{gq}$, где $q = h_1 v_1$, вычисляются как координаты точки пересечения гиперболы $v = v_q(h, h_1, v_1) = h_1 v_1 / h$ с линией критических течений v_c . После определения величин h_4 и v_4 течение справа от ступеньки восстанавливается, как и в решениях типа В, путем решения задачи о распаде разрыва (2.12) над ровным дном. Профиль получаемого таким образом решения типа D показан на рис. 4 линией 3. Отметим, что в решениях типа С и D, как и в решениях типа В, течение справа от ступеньки является сверхкритическим и не оказывает влияния на параметры потока на ступеньке и слева от нее.

Поскольку в предельном случае решений типа В, когда $D_2 = 0 \Rightarrow h_1 = h_G$, эти решения непрерывно переходят в энергетически устойчивые решения типа D, точка G лежит на адиабате u_s выше точки P (см. рис. 5). Это означает, что $h_G > h_P$, и поэтому при начальной глубине $h_1 \in (h_P, h_G)$, когда параметры начального течения (h_1, v_1) лежат на адиабате u_s между точками P и G , задача о распаде разрыва (1.5)–(1.8) допускает три различных решения: типа В, С и D. Если $h_1 \geq h_G$, то эта задача допускает два различных решения: типа С и D. Таким образом, при $h_1 \in (h_P, h_G)$ имеет место тройной, а при $h_1 \geq h_G$ — двойной гистерезис.

В качестве примера на рис. 5 линиями GQR и $G\tilde{Q}\tilde{R}$ приведена схема построения решений типа С и D, получаемых при одной и той же начальной глубине $h_1 = h_G$, при которой происходит непрерывный переход решения типа В в решение типа D. Координаты точек $Q = (h_4, v_4)$, $\tilde{Q} = (\tilde{h}_4, \tilde{v}_4)$, $R = (h_2, v_2)$ и $\tilde{R} = (\tilde{h}_2, \tilde{v}_2)$, задающие параметры указанных решений, удовлетворяют неравенствам

$$h_4 < \tilde{h}_4, \quad v_4 > \tilde{v}_4, \quad h_2 > \tilde{h}_2, \quad v_2 > \tilde{v}_2 \quad \Rightarrow \quad D_2 > \tilde{D}_2,$$

в соответствии с которыми на рис. 4 проведены линии 1 и 3.

При $h_1 \rightarrow h_P + 0$, т. е. когда параметры начального течения (h_1, v_1) “сверху” стремятся по адиабате u_s к точке P (см. рис. 5), решения типа D непрерывно переходят в предельное решение типа С, показанное на рис. 4 штриховой линией 2. Однако это предельное решение является неустойчивым относительно малого изменения начальных данных: при $h_1 = h_P - \varepsilon$ ($\varepsilon \ll 1$) оно скачкообразно преобразуется в решение типа В с отраженной прерывной волной и с докритическим течением (h_3, v_3) перед ступенькой (см. линию 2 на рис. 2).

4. Области существования построенных решений на плоскости определяющих параметров. Выполняя преобразование подобия относительно временной и пространственных переменных, можно перейти к безразмерным величинам, для которых $g = z_0 = 1$. В этом случае решения обобщенной задачи о распаде разрыва (1.5)–(1.8) будут полностью определяться следующими двумя безразмерными параметрами: относительной высотой ступеньки $\delta = \delta/z_0 \in (0, 1)$ и относительным уровнем (глубиной) воды

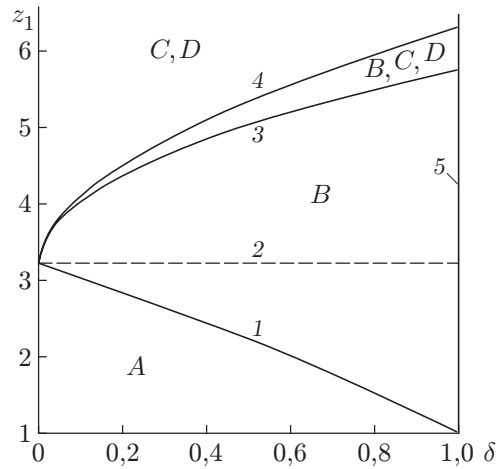


Рис. 6. Области существования решений на плоскости безразмерных определяющих параметров:

1 — линия, разделяющая области существования решений типа А и В; 2 — линия критических течений; 3 — нижняя граница области существования решений типа С и D; 4 — верхняя граница области существования решения типа В; 5 — правая граница областей существования решений

$z_1 = h_1 = z_1/z_0 > 1$ за фронтом начальной прерывной волны, набегающей на ступеньку. Поскольку безразмерная скорость $v_1 = v_1/\sqrt{gz_0}$, которую в данной задаче можно рассматривать как число Фруда, через уравнение ударной адиабаты $v_1 = u_s(z_1) = v_s(z_1, z_0)$ взаимно однозначно связана с начальным уровнем z_1 , введенная пара определяющих параметров (δ, z_1) аналогична паре параметров (δ, v_1) , часто используемой при анализе задачи обтекания донного препятствия однослойным потоком [3, 7, 19]. В нашем случае параметры (δ, z_1) представляются более удобными, чем (δ, v_1) , поскольку прямая зависимость $v_1 = v_s(z_1, z_0)$ на ударной адиабате (1.8) является более простой и общепринятой, чем обратная к ней зависимость $z_1 = v_s^{-1}(v_1, z_0)$. С учетом этого на рис. 6 области существования автомодельных решений типа А, В, С и D приведены на плоскости безразмерных определяющих параметров δ и z_1 .

Область существования решений типа А (характерный профиль этих решений показан на рис. 2 линией 1) расположена на рис. 6 ниже линии 1, уравнение которой в виде зависимости $z_1(\delta)$ определяется следующим образом. Сначала из соотношений $v_A = v_s(h_A, h_0) = \sqrt{h_A}$, где $h_0 = 1 - \delta$, вычисляются координаты $(h_A(\delta), v_A(\delta))$ точки А, в которой на рис. 3 адиабата v_s пересекается с линией критических течений v_c . Как показано в [20],

$$h_A(\delta) = z^*(1 - \delta) \quad \Rightarrow \quad v_A(\delta) = \sqrt{h_A(\delta)} = \sqrt{z^*(1 - \delta)},$$

где

$$z^* = 1 + \frac{4}{\sqrt{3}} \cos\left(\frac{1}{3} \arccos \frac{3\sqrt{3}}{8}\right) \approx 3,214 \quad (4.1)$$

— максимальный корень кубического уравнения $z^3 - 3z^2 - z + 1 = 0$. После этого из системы

$$J(h_B, q) = J(h_A(\delta), q) + \delta, \quad q = h_A(\delta)v_A(\delta) = h_B v_B \quad (4.2)$$

находятся координаты $(h_B(\delta), v_B(\delta))$ точки В, в которой на рис. 3 пересекаются линии v_s^+ и v_c^+ . Затем из системы

$$v_B(\delta) = v_r(h_B(\delta), h_C, v_C), \quad v_C = v_s(h_C, 1) \quad (4.3)$$

определяются координаты $(h_C(\delta), v_C(\delta))$ точки C , в которой на рис. 3 пересекаются ударные адиабаты u_s и v_r . В результате искомая зависимость $z_1(\delta)$ задается функцией $z_1 = h_C(\delta)$, график которой строился путем численного решения методом итераций систем (4.2), (4.3) при различных значениях $\delta \in (0, 1)$.

Область существования решений типа В (характерный профиль которых показан на рис. 2 линией 2) расположена на рис. 6 между линиями 1 и 4. Уравнение линии 4 в виде явной зависимости $\delta(z_1)$, где $z_1 > z^*$, получено из системы (2.15) и может быть записано следующим образом:

$$\delta = J(h_3, q) - J(h_4, q) = (v_3^2 - v_4^2)/2 + h_3 - h_4,$$

где

$$v_3 = q/h_3, \quad h_3 = z_1(\sqrt{1 + 8f_1^2} - 1)/2, \quad f_1 = v_1/\sqrt{z_1}$$

— соотношения на фронте отраженной прерывной волны, когда она при условии $D_3 = 0$ переходит в стоячий гидравлический прыжок;

$$v_4 = \sqrt[3]{q}, \quad h_4 = \sqrt[3]{q^2}, \quad q = z_1 v_1 \quad (4.4)$$

— параметры критического течения на ступеньке, получаемые как координаты точки \tilde{Q} , в которой на рис. 5 гипербола $v_q = q/h$, выходящая из точки G , пересекается с линией критических течений v_c ;

$$v_1 = v_s(z_1, 1) = (z_1 - 1)\sqrt{(z_1 + 1)/(2z_1)} \quad (4.5)$$

— зависимость (1.7) на ударной адиабате (1.8), получаемая при $z_0 = 1$.

Поскольку решения типа С и D (характерные профили этих решений показаны на рис. 4 линиями 1 и 3) реализуются, когда точка (z_1, v_1) лежит на ударной адиабате u_s выше точки P , в которой на рис. 5 эта адиабата пересекается с линией $v_c^- = F_-[v_c]$, область существования решений типа С и D расположена на рис. 6 выше линии 3. Уравнение линии 3 получается в результате записи функции $v_c^-(h)$ в виде следующей явной зависимости $\delta(z_1)$:

$$\delta = J(z_1, q) - J(h_4, q) = (v_1^2 - v_4^2)/2 + z_1 - h_4,$$

где величины v_4 , h_4 и v_1 как функции от $z_1 > z^*$ задаются формулами (4.4), (4.5). Штриховой линией 2 на рис. 6 показан критический уровень $z_1 = z^* \approx 3,214$, при котором течение за фронтом прерывной волны, набегающей на ступеньку, является критическим. При таком начальном уровне z_1 всегда реализуется течение типа В.

Из проведенного анализа следует, что если параметры (δ, z_1) лежат на диаграмме, приведенной на рис. 6, ниже линии 3, то решение обобщенной задачи о распаде разрыва (1.5)–(1.8) определяется однозначно. Если эти параметры расположены выше линии 3, то имеет место гистерезис. Между линиями 3 и 4 этот гистерезис является тройным (здесь одновременно могут существовать решения типа В, С и D), а выше линии 4 — двойным (здесь одновременно могут существовать решения типа С и D).

5. Аналогия с задачей обтекания донного препятствия. Сравнение диаграммы, приведенной на рис. 6, с аналогичной диаграммой областей существования различных решений в задаче обтекания донного препятствия однослойным потоком жидкости [3, 17–19] показывает, что эта задача во многом подобна задаче о набегающей прерывной волне на ступеньку дна, рассматриваемой в данной работе. На диаграмме из работы [17] также выделяются четыре основные области, аналогичные тем, что показаны на рис. 6. При этом решению типа А соответствует полностью докритическое, а решению типа С — полностью сверхкритическое обтекание донного препятствия, при которых происходит лишь локальное возмущение набегающего потока. Решению типа В соответствует обтекание, при

котором препятствие блокирует [17] (контролирует [3]) течение вверх по потоку, формируя отраженную прерывную волну. При этом на вершине препятствия происходит переход от докритического течения к сверхкритическому.

В задаче обтекания донного препятствия существует область гистерезиса [3, 17], аналогичная той, что расположена на рис. 6 между линиями 3 и 4. В этой области могут одновременно существовать как полностью сверхкритическое, так и “блокирующее” решения этой задачи (экспериментально этот результат был подтвержден в работе [18]). В [19] показано, что в этой же области определяющих параметров существует третье решение, аналогичное решению типа D, в котором на склоне препятствия, расположенном вверх по потоку, формируется стоячий гидравлический прыжок. В линейном приближении такой гидравлический прыжок является неустойчивым [19], однако из этого не следует его неустойчивость в рамках общей нелинейной задачи в случае малых изменений параметров потока перед препятствием и на его вершине. Косвенным подтверждением этого могут служить результаты работы [21], в которой устойчивый стоячий гидравлический прыжок был экспериментально реализован перед ступенькой дна в лабораторном лотке.

Из работы [19] следует, что если ступенькой дна (1.6) моделируется монотонное повышение отметки дна типа шельфа [9], длина которого существенно превосходит ширину расположенного на нем гидравлического прыжка, то описывающее это течение решение типа D без учета влияния донного трения может существовать лишь в области тройного гистерезиса, которому на рис. 5 соответствует участок адиабаты u_s между точками P и G , а на рис. 6 — область между линиями 3 и 4. Однако если ступенькой дна (1.6) моделируется скачок отметки дна реального русла, коэффициент шероховатости которого перед ступенькой является достаточно большим, то потеря энергии на стоячем прыжке перед ступенькой может оказаться существенно выше, чем в аналогичном стоячем прыжке над гладким горизонтальным дном. В этом случае решению типа D, описывающему такие течения, будут соответствовать участок адиабаты u_s , лежащий на рис. 5 над точкой G , и область, расположенная на рис. 6 выше линии 4. Таким образом, при начальной глубине $h_1 > h_G$ может быть реализован двойной гистерезис.

6. Доказательство теоремы 1. Обозначим через (h_A, v_A) и (h_F, v_F) координаты точек A и F , в которых на рис. 3 адиабаты v_s и u_s пересекают линию критических течений v_c . Поскольку при $h > h_F$ адиабата u_s лежит в области сверхкритических течений, а график функции v^+ , задаваемой формулой (2.7), при всех $h > z_0$ расположен в области докритических течений, для доказательства теоремы 1 достаточно показать, что неравенство (2.8) является верным при всех $h \in (z_0, h_F)$.

Рассмотрим функцию

$$v = v(h) = \begin{cases} v_s(h), & h_0 < h \leq h_A, \\ v_c(h), & h \geq h_A, \end{cases} \quad (6.1)$$

образом которой при отображении F_+ является функция v_+ . График функции (6.1) состоит из той части адиабаты v_s , которая лежит в области докритических течений, и той части линии критических течений v_c , которая расположена на рис. 3 правее точки A . Пусть $A_1 = (\hat{h}, \hat{v})$ — некоторая точка, лежащая на графике функции (6.1) и удовлетворяющая условию $h_0 < \hat{h} < h_F$. Проведем через точку A_1 гиперболу $v = v_q(h, \hat{h}, \hat{v})$. Эта гипербола в некоторых точках $B_1 = (h_+, v_+)$ и $C_1 = (H, V)$ пересекает линию v_+ и адиабату u_s . Для доказательства неравенства (2.8) достаточно показать, что точка C_1 лежит на гиперболе v_q левее точки B_1 . Последнее, как следует из [8], эквивалентно выполнению при $H > \hat{h}$ неравенства

$$J(\hat{h}, q) + \delta > J(H, q), \quad q = \hat{h}\hat{v} = HV, \quad (6.2)$$

означающего, что при переходе от течения (H, V) перед ступенькой к течению (\hat{h}, \hat{v}) на ступеньке полная энергия набегающего потока возрастает.

Будем считать, что величины h_0, \hat{h}, \hat{v} , а значит, и $q = \hat{h}\hat{v}$, фиксированы. Тогда с учетом соотношения $\delta = z_0 - h_0$ неравенство (6.2) можно записать в виде

$$\varphi(H, z_0) < \varphi(\hat{h}, h_0) \quad \forall H > \hat{h}, \quad \varphi(h, z) = q^2/(2gh^2) + h - z, \quad (6.3)$$

где значения H и z_0 связаны условием

$$HV = Hu_s(H) = H(H - z_0)\sqrt{g(H + z_0)/(2Hz_0)} = q. \quad (6.4)$$

Из условия (6.4) начальный уровень z_0 можно выразить как функцию $z_0 = z(H)$ такую, что $z(\hat{h}) = h_0$ при $\hat{h} \leq h_A$ и $z(\hat{h}) > h_0$ при $\hat{h} > h_A$. Это означает, что неравенство (6.3) будет выполнено при условии

$$\varphi(H, z(H)) < \varphi(\hat{h}, z(\hat{h})) \quad \forall H > \hat{h}. \quad (6.5)$$

Для доказательства неравенства (6.5) достаточно показать, что

$$\frac{d}{dh} \varphi(h, z(h)) = 1 - \frac{q^2}{gh^3} - z_h < 0 \quad \forall h > z(h). \quad (6.6)$$

Введем вспомогательную симметричную функцию $\psi(h, z) = (h - z)^2(h + z)$. При помощи этой функции условие (6.4), которому удовлетворяют величины h и $z(h)$, можно представить в виде

$$h\psi(h, z(h))/z(h) = 2q^2/g = \text{const}. \quad (6.7)$$

Дифференцируя соотношение (6.7) по h с учетом того, что

$$\psi_h = (h - z)(3h + z), \quad \psi_z = (z - h)(3z + h),$$

получим

$$z_h = \frac{z(\psi + h\psi_h)}{h(\psi - z\psi_z)} = \frac{z(4h^2 + zh - z^2)}{h(h^2 + zh + 2z^2)} = \frac{4y^2 + y - 1}{y(y^2 + y + 2)}, \quad (6.8)$$

где $y = h/z > 1$.

Поскольку с учетом (6.8)

$$1 - z_h = \frac{y^3 - 4y^2 + 2y + 1}{y(y^2 + y + 2)} = \frac{(y - 1)(y^2 - 3y - 1)}{y(y^2 + y + 2)},$$

а с учетом (6.4)

$$\frac{q^2}{gh^3} = \frac{u_s^2(h)}{gh} = \frac{(h + z)(h - z)^2}{2zh^2} = \frac{(y + 1)(y - 1)^2}{2y^2},$$

неравенство (6.6) можно записать в виде

$$\frac{(y + 1)(y - 1)^2}{2y} > \frac{(y - 1)(y^2 - 3y - 1)}{y^2 + y + 2}. \quad (6.9)$$

При $y > 1$ выполнение неравенства (6.9) следует из формул

$$\begin{aligned} (y^2 - 1)(y^2 + y + 2) - 2y(y^2 - 3y - 1) &= y^4 - y^3 + 7y^2 + y - 2 = \\ &= (y - 1)(y^3 + 2y + 2) + 5y^2 + y > 0. \end{aligned}$$

Теорема 1 доказана.

7. Доказательство теоремы 2. Для доказательства теоремы 2 достаточно показать, что точка C лежит на адиабате u_s (см. рис. 3) ниже точки F , что эквивалентно неравенству $h_C < h_F$. Поскольку в силу теоремы 1 адиабата u_s расположена на рис. 3 выше линии v_c^+ и адиабата v_r , проходящая через точки B и C , является строго монотонно убывающей, $h_C < h_B$. Это означает, что неравенство $h_C < h_F$ будет следовать из неравенства $h_B < h_F$. Для доказательства последнего заметим, что с учетом (2.4) глубина h_B , для которой введем сокращенное обозначение H , вычисляется из уравнения $J(H, q) = J(h_A, q) + \delta$, где $q^2 = h_A^2 v_A^2 = gh_A^3$. Развернутая запись этого уравнения имеет вид

$$h_A^3/(2H^2) + H - z = 3h_A/2 - h_0, \quad (7.1)$$

где $z = z_0$ — начальный уровень перед ступенькой.

Зафиксируем глубины h_0 и h_A перед ступенькой, а глубины $H = h_B$ и h_F рассмотрим как функции начального уровня $z > h_0$. Поскольку

$$\lim_{z \rightarrow h_0} H(z) = \lim_{z \rightarrow h_0} h_F(z) = h_A,$$

для доказательства неравенства $H = h_B < h_F$ при $z > h_0$ достаточно показать, что

$$H'_z < (h_F)'_z \quad \forall z > h_0. \quad (7.2)$$

Для вычисления производной H'_z продифференцируем по z уравнение (7.1). В результате с учетом того, что $H > h_A$ при $z > h_0$, получим

$$H'_z = 1 + h_A^3/H^3 < 2 \quad \forall z > h_0. \quad (7.3)$$

Как показано в [20], $h_F(z) = z^*z$, где z^* — константа, задаваемая формулой (4.1). Это означает, что

$$(h_F)'_z = z^* > 3. \quad (7.4)$$

Из сравнения неравенств (7.3) и (7.4) следует искомое неравенство (7.2). Теорема 2 доказана.

Заключение. Анализ задачи о течениях, возникающих при набегании прерывной волны на ступеньку дна, показал, что в рамках автомодельных решений теории мелкой воды эта задача всегда разрешима, но разрешима неоднозначно. Если постоянное течение (h_1, v_1) за фронтом начальной прерывной волны является сверхкритическим и $h_1 > h_P$ (см. рис. 5), т. е. параметры задачи (1.5)–(1.8) лежат на рис. 6 выше линии 3, то эта задача допускает два различных решения со сверхкритическим потоком перед ступенькой: решение типа С, в котором полная энергия на ступеньке сохраняется (это решение показано на рис. 4 линией 1), и решение типа D, в котором полная энергия на ступеньке теряется (линия 3 на рис. 4). При более сильном ограничении $h_P < h_1 < h_G$, т. е. если параметры задачи (1.5)–(1.8) лежат на рис. 6 между линиями 3 и 4, эта задача допускает также и решение типа В с отраженной прерывной волной и докритическим потоком перед ступенькой. В этом решении, показанном на рис. 2 линией 2, полная энергия на ступеньке сохраняется.

Полученная многозначность решений задачи (1.5)–(1.8) связана с тем, что уравнения мелкой воды представляют собой длинноволновое приближение уравнений Эйлера [1, 4], в силу чего разрывные решения в теории мелкой воды могут описывать целые переходные области быстрого изменения параметров реальных течений. В частности, разрывными решениями над скачком отметки дна можно моделировать волновые течения в случаях, когда отметка дна реального русла терпит разрыв или когда она имеет участок резкого монотонного изменения. Так, например, в [12] уступом дна в теории моделировался разрыв отметки дна в эксперименте, а в [9] ступенькой в теории моделировалось резкое повышение

отметки дна типа шельфа в эксперименте. В обоих случаях при решении задачи о разрушении плотины теория достаточно хорошо согласуется с экспериментом по возможным типам волн, скоростям их распространения и асимптотическим глубинам за их фронтами.

Применяя данный подход к задаче, рассматриваемой в настоящей работе, можно предположить, что если ступеньке дна (1.6) в теории соответствует скачок отметки дна в эксперименте, оказывающий максимально возможное противодействие напору набегающего потока, то при лабораторном моделировании задачи (1.5)–(1.8) с начальной глубиной $h_1 \in (h_P, h_G)$ (т. е. когда параметры задачи принадлежат области тройного гистерезиса, расположенной на рис. 6 между линиями 3 и 4) следует ожидать реализации волнового течения типа В с отраженной прерывной волной. Если так же как в работе [9], ступенькой дна (1.6) моделируется монотонное повышение отметки дна типа шельфа, то в эксперименте при набегании на этот шельф прерывной волны с глубиной $h_1 \in (h_P, h_G)$ за ее фронтом, можно ожидать формирования течений типа С или D со сверхкритическим потоком перед шельфом. При этом в течениях типа D на шельфе образуется стоячий гидравлический прыжок, на котором часть полной энергии набегающего потока переходит в энергию вихревого перемешивания, что в рамках теории мелкой воды описывается как потеря полной энергии. В течениях типа С на шельфе формируется сверхкритическое течение, при описании которого в рамках теории мелкой воды полная энергия на ступеньке дна (1.6) сохраняется. Переход от течений типа D к течениям типа С в случае одинаковой начальной глубины $h_1 > h_P$ будет происходить при уменьшении крутизны шельфа. Более точный ответ на вопрос об условиях реализации течений типа В, С и D можно получить путем численного моделирования задачи о набегании прерывной волны на шельф, а также в результате проведения соответствующих лабораторных экспериментов в крупных лотках, позволяющих создавать достаточно большой начальный перепад уровней.

ЛИТЕРАТУРА

1. Стокер Дж. Дж. Волны на воде. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
2. Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И. и др. Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1985.
3. Ляпидевский В. Ю., Тешуков В. М. Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
4. Остапенко В. В. Гиперболические системы законов сохранения и их приложение к теории мелкой воды (курс лекций). Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 2004.
5. Букреев В. И., Гусев А. В. Волны за ступенькой в открытом канале // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 1. С. 62–70.
6. Alcrudo F., Benkhaldon F. Exact solutions to the Riemann problem of the shallow water equations with bottom step // Comp. Fluids. 2001. V. 30. P. 643–671.
7. Dressler R. F. Comparison of theories and experiments for the hydraulic dam-break wave // Intern. Assoc. Sci. Hydrology. 1954. V. 3, N 38. P. 319–328.
8. Остапенко В. В. Течения, возникающие при разрушении плотины над ступенькой дна // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 4. С. 51–63.
9. Букреев В. И., Гусев А. В., Остапенко В. В. Волны в открытом канале, образующиеся при удалении щита перед неровным дном типа шельфа // Вод. ресурсы. 2004. Т. 31, № 5. С. 540–546.
10. Атавин А. А., Васильев О. Ф. Оценка возможных последствий аварий на судоходном шлюзе, связанных с разрушением затворов его камер // Тез. докл. Междунар. симп. «Гидравлические и гидрологические аспекты надежности и безопасности гидротехнических со-

- оружений”, Санкт-Петербург, 28 мая — 1 июня 2002 г. СПб.: Всерос. науч.-исслед. ин-т гидротехники, 2002. С. 121.
11. **Остапенко В. В.** Течения, возникающие при разрушении плотины над уступом дна // ПМТФ. 2003. Т. 44, № 6. С. 107–122.
 12. **Букреев В. И., Гусев А. В., Остапенко В. В.** Распад разрыва свободной поверхности жидкости над уступом дна канала // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2003. № 6. С. 72–83.
 13. **Lax P. D.** Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves. Philadelphia: Soc. Industr. and Appl. Math., 1972.
 14. **Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.** Системы квазилинейных уравнений. М.: Наука, 1978.
 15. **Дулов В. Г.** Распад произвольного разрыва параметров газа на скачке площади сечения // Вест. Ленингр. ун-та. Сер. математики, механики и астрономии. 1958. № 19, вып. 4. С. 76–99.
 16. **Яушев И. К.** Распад произвольного разрыва в канале со скачком площади сечения // Изв. АН СССР. Сер. техн. наук. 1967. № 8, вып. 2. С. 109–120.
 17. **Baines P. G.** Topographic effects in stratified flows. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997.
 18. **Lawrence G. A., Asce A. M.** Steady flow over an obstacle // J. Hydraul. Engng. 1987. V. 113. P. 981–991.
 19. **Baines P. G., Whitehead J. A.** On multiple states in single-layer flows // Phys. Fluids. 2003. V. 15, N 2. P. 298–307.
 20. **Остапенко В. В.** О разрывных решениях уравнений “мелкой воды” над уступом дна // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 6. С. 62–74.
 21. **Букреев В. И.** Обтекание порога бурным потоком в открытом канале // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 6. С. 54–61.

*Поступила в редакцию 29/XII 2004 г.,
в окончательном варианте — 13/V 2005 г.*
