

УДК 539.4:622.023.23

РАЗРУШЕНИЕ ХРУПКОГО ГЕОМАТЕРИАЛА С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ ПРИ ДВУХОСНОМ НАГРУЖЕНИИ

С. В. Сукнев

Институт горного дела Севера им. Н. В. Черского СО РАН, 677980 Якутск, Россия
E-mail: suknyov@igds.ysn.ru

Теоретически и экспериментально исследовано влияние краевых условий на разрушение хрупкого геоматериала в зоне концентрации напряжений при двухосном нагружении с учетом масштабного эффекта. Проведено сравнение результатов расчета с полученными экспериментальными данными.

Ключевые слова: разрушение, геоматериалы, масштабный эффект, концентрация напряжений, отверстие, нелокальные критерии разрушения.

DOI: 10.15372/PMTF20150618

Введение. Механические свойства структурно-неоднородных материалов существенно зависят от масштабного фактора, т. е. от нагруженного объема. Наиболее значительно масштабный эффект проявляется при концентрации напряжений, когда эффективный нагруженный объем определяется размером зоны концентрации напряжений, малым по сравнению с характерными размерами деформируемого тела. Поскольку традиционные критерии разрушения не учитывают масштабный эффект, получили распространение нелокальные критерии предельного состояния (см., например, [1–6]). Большинство нелокальных критериев основано на представлении о формировании в материале зоны предразрушения, в которой происходит локальное перераспределение напряжений, при этом основной материал деформируется упруго вплоть до момента разрушения. Типичными материалами, свойства которых зависят от масштабного эффекта, являются бетон, гипс, горные породы, композиты, высокопрочные металлические сплавы, чугун, графит и др. Разрушение рассматривается как физический процесс, происходящий не в математической точке, в которой достигается максимальное значение эквивалентного напряжения, а в некоторой ее малой окрестности (зоне предразрушения). Общим свойством указанных критериев является введение внутреннего размера материала, характеризующего его структуру, что позволяет описать масштабный эффект при концентрации напряжений и тем самым расширить область применимости этих критериев по сравнению с традиционными критериями. Это позволяет прогнозировать наступление разрушения при варьировании размера зоны концентрации напряжений. В большинстве работ, посвященных исследованию данной проблемы, размер зоны концентрации напряжений варьировался путем изменения геометрических размеров или формы концентратора (отверстия, выреза и т. д.) при неизменных

Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных исследований Президиума РАН № 25.

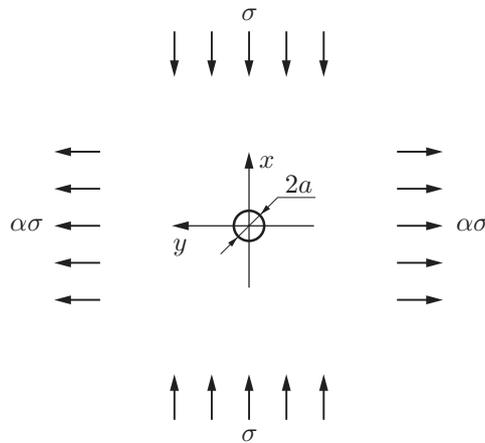


Рис. 1. Круговое отверстие при двухосном нагружении

краевых условиях [7–10]. В работе [11] изучен процесс образования трещин отрыва в хрупком материале с эллиптическим отверстием при одноосном сжатии в зависимости от угла наклона отверстия заданных размеров и формы к оси нагружения.

В настоящей работе на примере задачи о разрушении хрупкого материала с круговым отверстием при двухосном нагружении сжимающими и растягивающими усилиями исследуется возможность применения известных нелокальных критериев в тех случаях, когда размер зоны концентрации напряжений варьируется путем изменения краевых условий.

1. Постановка задачи. Рассматривается изотропная однородная линейно-упругая пластина из хрупкого материала, к которой приложены равномерно распределенные на бесконечности сжимающее напряжение σ и растягивающее напряжение $\alpha\sigma$ ($0 \leq \alpha \leq 1$). В центре пластины находится небольшое круговое отверстие радиусом a (рис. 1). Требуется определить критическое напряжение σ_c , при котором в пластине достигается предельное состояние (образование трещин отрыва на контуре отверстия), в зависимости от параметра двухосного нагружения α .

Прочностные свойства материала пластины зависят от масштабного эффекта. При наличии концентратора напряжений (отверстия) эффективный нагруженный объем определяется размером зоны концентрации напряжений. Механической характеристикой материала пластины является предельное напряжение σ_0 , которое определяется при одноосном растяжении пластины без отверстия. Расчет σ_c проводится с использованием известных нелокальных критериев разрушения.

2. Расчет критического напряжения. Среди нелокальных критериев наибольшее распространение получил критерий средних напряжений, или интегральный критерий

$$\langle \sigma_e \rangle_d < \sigma_0,$$

где $\langle \sigma_e \rangle_d$ — среднее значение эквивалентного напряжения, вычисленное на отрезке длиной d в опасном сечении и характеризующее внутреннее напряженное состояние деформируемого тела:

$$\langle \sigma_e \rangle_d = \frac{1}{d} \int_{x_0}^{x_0+d} \sigma_e(x) dx, \quad (1)$$

x_0 — координата точки, в которой достигается максимальное значение эквивалентного напряжения. Длина отрезка d , на котором проводится осреднение, полагается константой

материала. Необходимость осреднения напряжений обусловлена прежде всего образованием зоны предразрушения, в которой происходит перераспределение напряжений. Размер этой зоны приблизительно равен размеру d .

Оценим величину критического напряжения, при котором на контуре кругового отверстия в образце, подвергнутом двухосному нагружению (см. рис. 1), образуются трещины отрыва. Для расчетов будем использовать известное решение задачи Кирша [12]. Эквивалентное напряжение определим с помощью первой теории прочности (теории наибольших нормальных напряжений). Распределение нормальных напряжений σ_y вдоль линии приложения сжимающей нагрузки (ось x) имеет вид

$$\sigma_y = \frac{\sigma}{2} \left(3 \frac{a^4}{x^4} - \frac{a^2}{x^2} \right) + \frac{\alpha\sigma}{2} \left(2 + \frac{a^2}{x^2} + 3 \frac{a^4}{x^4} \right). \quad (2)$$

Начало системы координат находится в центре отверстия, величина приложенного сжимающего напряжения σ считается положительной. Растягивающие напряжения достигают максимального значения $\sigma_{\max} = \sigma(1 + 3\alpha)$ на контуре отверстия в точках $x = \pm a$, по мере удаления от него напряжения быстро уменьшаются.

Подставляя (2) в (1) при $x_0 = a$ и приравнявая результат интегрирования к σ_0 , получаем критическое напряжение

$$\sigma_c = 2\sigma_0[(1 + \gamma)\gamma^{-3} + \alpha(1 + \gamma^{-1})(2 + \gamma^{-2})]^{-1} \quad (3)$$

($\gamma = 1 + d/a$). При $\gamma = 1$ формула (3) совпадает с традиционным критерием разрушения.

Наряду с критерием средних напряжений широкое распространение получил критерий напряжений в точке. При использовании этого критерия вместо интегрирования проводится вычисление эквивалентного напряжения σ_e в некоторой точке, удаленной от точки максимума на расстояние d :

$$\sigma_e(x_0 + d) = \sigma_0. \quad (4)$$

Критическое расстояние d полагается константой материала, не совпадающей с длиной отрезка d , на котором проводится осреднение в интегральном критерии. Для обоснования критерия (4) используются те же допущения о перераспределении напряжений в зоне предразрушения, что и для интегрального критерия. Напряжения на границе зоны предразрушения считаются приблизительно равными напряжениям, полученным при решении линейно-упругой задачи.

Подставляя в (2) значение $x = a + d$ и приравнявая полученный результат к σ_0 , находим критическое напряжение

$$\sigma_c = 2\sigma_0[(-\gamma^{-2} + 3\gamma^{-4}) + \alpha(2 + \gamma^{-2} + 3\gamma^{-4})]^{-1}. \quad (5)$$

При $\gamma = 1$ формула (5) совпадает с традиционным критерием разрушения.

При использовании критерия фиктивной трещины зона предразрушения моделируется трещиной длиной d , исходящей из вершины концентратора. Затем для тела с трещиной, находящейся в неоднородном поле напряжений, рассчитывается коэффициент интенсивности напряжений и применяется критерий линейной механики разрушения.

Процедура вычисления критического напряжения описана в работе [13]. Коэффициент интенсивности напряжений рассчитывается по формуле

$$K = \sqrt{\frac{2}{\pi(b-a)}} \int_a^b \sigma_y(x) \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} dx, \quad (6)$$

где $b = a + d$. Подставляя (2) в (6) и приравнявая полученное значение K к критическому значению K_c , а также учитывая, что при одноосном растяжении в отсутствие отверстия

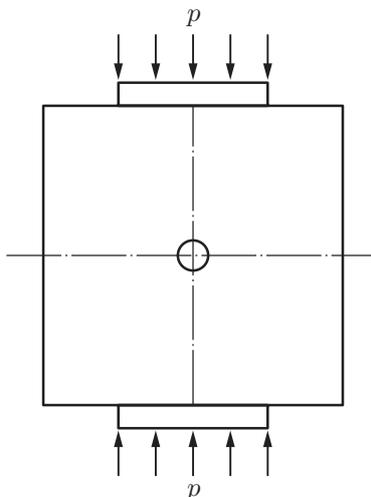


Рис. 2. Схема нагружения образца

$K_c = \sigma_0 \sqrt{\pi d/2}$, получаем

$$\sigma_c = 2\sigma_0 [(-\gamma^{-1,5} + 0,375\gamma^{-3,5}(5 + 2\gamma + \gamma^2)) + \alpha(2 + \gamma^{-1,5} + 0,375\gamma^{-3,5}(5 + 2\gamma + \gamma^2))]^{-1}. \quad (7)$$

При $\gamma = 1$ формула (7) совпадает с традиционным критерием разрушения.

3. Эксперименты с образцами, имеющими круговое отверстие. Проведено две серии испытаний гипсовых образцов с круговым отверстием под действием неравномерно распределенного сжатия. Нагрузка p прикладывалась к образцу с помощью металлических вставок, помещенных между образцом и нагружающими плитами. Вставки размещались в центрах верхней и нижней граней образца (рис. 2). При этом в центральной части образца (вне зоны влияния отверстия) реализовывалось достаточно однородное двухосное напряженное состояние: растяжение по горизонтальной оси образца и сжатие по его вертикальной оси (см. рис. 1).

В качестве модельного материала использовался дигидрат сульфата кальция (двухводный гипс), приготовленный для первой серии экспериментов из водного раствора строительного гипса, содержащего β -полугидрат сульфата кальция (гипс 1), для второй серии экспериментов — из водного раствора высокопрочного гипса марки ГВВС-16, содержащего α -полугидрат сульфата кальция (гипс 2). Образцы представляли собой квадратные плиты размером 200×200 мм. Толщина плит составляла $36 \div 38$ мм. После изготовления образцы просушивались в течение 30–40 сут, непосредственно перед испытанием в центре каждого образца высверливалось круговое отверстие диаметром 5 мм.

В ходе испытаний образцов в зонах концентрации растягивающих напряжений на контуре отверстия происходило образование трещин отрыва, которое имело внезапный характер и сопровождалось характерным щелчком. Трещины моментально распространялись вдоль линии приложения сжимающей нагрузки на расстояние, приблизительно равное 50 мм, при дальнейшем нагружении их рост замедлялся. Образование трещин сопровождалось также локальной разгрузкой образца, что соответствовало появлению зубца на диаграмме деформирования. Критическая нагрузка в момент образования трещин определялась по максимальному значению нагрузки, соответствующему вершине зубца на диаграмме.

На рис. 3 приведены диаграммы деформирования образцов из гипса 1 в координатах нагрузка p — время испытания t . В экспериментах использовались широкие ($b = 114$ мм) и узкие ($b = 40$ мм) вставки.

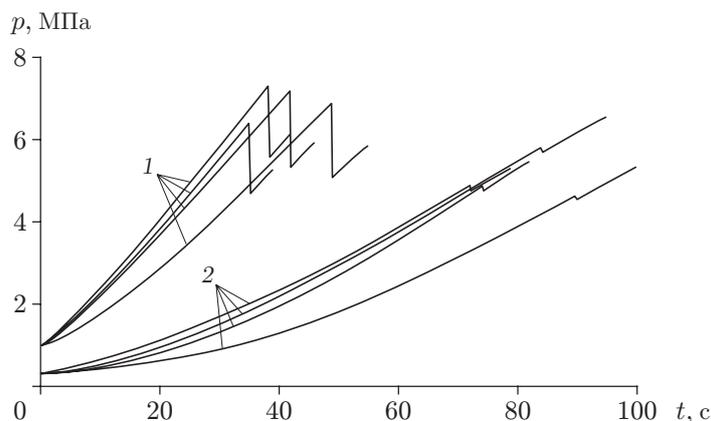


Рис. 3. Диаграммы деформирования образцов из гипса 1, полученные по результатам четырех экспериментов с использованием узких (1) и широких (2) вставок

Таблица 1

Параметры образцов из гипса 1

b , мм	σ/p	α
40	0,347	0,317
114	0,757	0,189

Таблица 2

Параметры образцов из гипса 2

b , мм	σ/p	α
20	0,185	0,327
60	0,488	0,299
100	0,693	0,235
139	0,822	0,134
178	0,942	0,015

Предел прочности материала на растяжение определялся непосредственно в экспериментах при испытании на разрыв образцов корсетного типа толщиной 25 мм с радиусом закругления рабочей части $110 \div 120$ мм и с минимальной шириной сечения, равной 30 мм. Для обеспечения равномерного растяжения образца в сечении с минимальной шириной использовались специальные захваты. По результатам испытаний 11 образцов из гипса 1 определено среднее значение предела прочности $\sigma_0 = 2,00$ МПа, стандартное отклонение составило 0,29 МПа.

Значения σ , α вычислялись методом конечных элементов в центре образцов, нагруженных с помощью вставки заданного размера и не содержащих отверстия. Нагрузка, приложенная к образцу, моделировалась перемещением абсолютно жесткой вставки. В области контакта образца со вставкой проскальзывание отсутствовало. Результаты расчетов приведены в табл. 1.

С целью проверки корректности выполненных оценок с использованием решения задачи Кирша и полученных значений σ и α рассчитывались максимальные растягивающие напряжения на контуре кругового отверстия малого радиуса, расположенного в центре пластины. Указанные напряжения рассчитывались методом конечных элементов для образцов, содержащих отверстие и нагруженных с помощью вставок. Различия результатов расчетов составило приблизительно 1 %, что существенно меньше разброса экспериментальных данных о величине критического давления: для образцов с широкими вставками коэффициент вариации составил 10,2 %, для образцов с узкими вставками — 5,6 %.

На рис. 4 представлены зависимости критического напряжения σ_c в момент образования трещин отрыва на контуре отверстия от параметра двухосного нагружения α . Видно, что нелокальные критерии разрушения достаточно точно описывают полученные экспериментальные данные. Различия результатов расчетов составило менее 1 %.

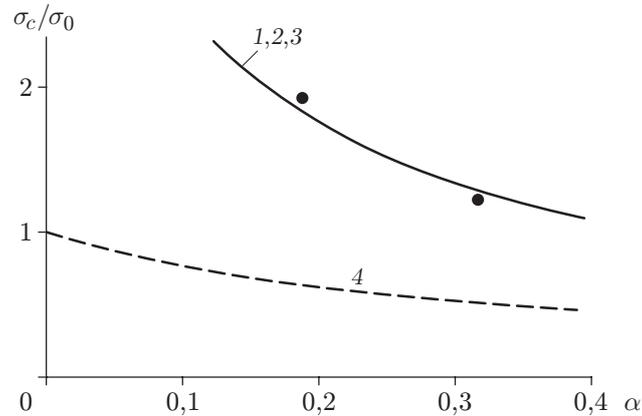


Рис. 4. Зависимость критического напряжения от параметра двухосного нагружения для образцов из гипса 1:

линии — результаты расчета (1 — расчет по критерию средних напряжений (3) ($d = 2,2$ мм), 2 — расчет по критерию напряжений в точке (5) ($d = 0,79$ мм), 3 — расчет по критерию фиктивной трещины (7) ($d = 1,17$ мм), 4 — расчет по традиционному критерию); точки — экспериментальные данные

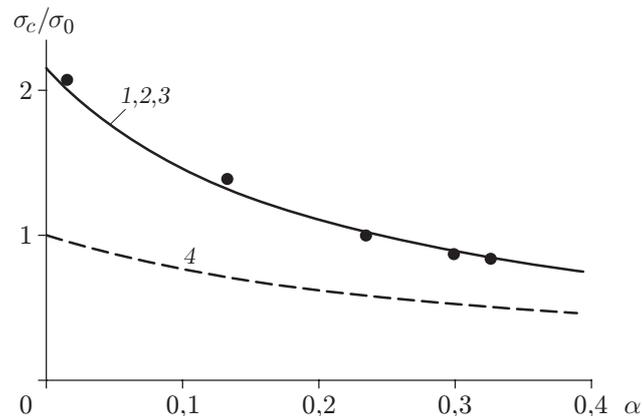


Рис. 5. Зависимость критического напряжения от параметра двухосного нагружения для образцов из гипса 2:

линии — результаты расчета (1 — расчет по критерию средних напряжений (3) ($d = 0,92$ мм), 2 — расчет по критерию напряжений в точке (5) ($d = 0,39$ мм), 3 — расчет по критерию фиктивной трещины (7) ($d = 0,55$ мм), 4 — расчет по традиционному критерию); точки — экспериментальные данные

При испытании образцов из гипса 2 размер вставок изменялся в диапазоне от 20 до 178 мм, результаты расчетов величин σ и α приведены в табл. 2. Было изготовлено и испытано по 5–6 образцов со вставками каждого размера. Предел прочности материала на растяжение определялся непосредственно в экспериментах. По результатам испытания 12 образцов определено среднее значение предела прочности 6,50 МПа, стандартное отклонение составило 0,67 МПа.

На рис. 5 представлены зависимости критического напряжения σ_c в момент образования трещин отрыва на контуре отверстия от параметра двухосного нагружения α . Как и в случае образцов из гипса 1, нелокальные критерии разрушения достаточно точно описывают полученные экспериментальные данные. Различие результатов расчетов составило менее 1 %.

Заключение. На основе проведенных экспериментальных и теоретических исследований установлены закономерности разрушения геоматериалов, содержащих концентраторы напряжений в виде кругового отверстия, при различных краевых условиях. Получены новые экспериментальные данные о трещинах отрыва, образующихся в пористых геоматериалах, с использованием нелокальных критериев разрушения выполнены расчеты критической нагрузки в зависимости от параметра двухосного нагружения. Показано, что при фиксированном размере отверстия влияние условий нагружения на критическое напряжение достаточно точно описывается нелокальными критериями средних напряжений, напряжений в точке и фиктивной трещины.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Seweryn A., Mroz Z.** A non-local stress failure condition for structural elements under multiaxial loading // Engng Fracture Mech. 1995. V. 51, N 6. P. 955–973.
2. **Mikhailov S. E.** A functional approach to non-local strength condition and fracture criteria // Engng Fracture Mech. 1995. V. 52, N 4. P. 731–754.
3. **Сукнев С. В.** Критерий локальной прочности // Пробл. прочности. 2004. № 4. С. 108–124.
4. **Смирнов В. И.** Структурный подход в задачах предельного равновесия хрупких тел с концентраторами напряжений // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 4. С. 162–172.
5. **Taylor D.** The theory of critical distances. Oxford: Elsevier, 2007.
6. **Кургузов В. Д., Корнев В. М.** Построение диаграмм квазихрупкого и квазивязкого разрушения материалов на основе необходимых и достаточных критериев // ПМТФ. 2013. Т. 54, № 1. С. 179–194.
7. **Lajtai E. Z.** Brittle fracture in compression // Intern. J. Fracture. 1974. V. 10, N 4. P. 525–536.
8. **Imamura S., Sato Y.** Fracture of a graphite solid cylinder with a transverse hole in tension // J. College Engng Nihon Univ. Ser. A. 1987. V. 28. P. 51–55.
9. **Hyakutake H., Hagio T., Nisitani H.** Fracture of FRP plates containing notches or a circular hole under tension // Intern. J. Pressure Vessels Piping. 1990. V. 44, N 3. P. 277–290.
10. **Carter B. J.** Size and stress gradient effects on fracture around cavities // Rock Mech. Rock Engng. 1992. V. 25, N 3. P. 167–186.
11. **Сукнев С. В.** Расчетно-экспериментальное исследование разрушения хрупкого материала с эллиптическим отверстием при сжатии // ПМТФ. 2013. Т. 54, № 2. С. 171–178.
12. **Седов Л. И.** Механика сплошной среды. М.: Наука, 1984. Т. 2.
13. **Сукнев С. В.** Нелокальные критерии разрушения. Критерий фиктивной трещины // Наука и образование. 2009. № 1. С. 29–36.

*Поступила в редакцию 10/VII 2014 г.,
в окончательном варианте — 18/XII 2014 г.*