

УДК 532.517; 681.121.8

ВОПРОСЫ ТЕОРИИ И ПРАКТИЧЕСКОГО ИСПОЛЬЗОВАНИЯ
ЛАЗЕРНЫХ ДОППЛЕРОВСКИХ ИЗМЕРИТЕЛЕЙ СКОРОСТИ
ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ТУРБУЛЕНТНЫХ ПОТОКОВ

Г. А. Барилл, Ю. Н. Дубнищев, В. П. Коронкевич,
В. С. Соболев, А. А. Столповский, Е. Н. Уткин,
Н. Ф. Шмойлов

(Новосибирск)

В настоящее время большое внимание уделяется созданию лазерных допплеровских измерителей скорости (ЛДИС) для экспериментального изучения турбулентных течений. В статье рассмотрены основные типы оптических схем ЛДИС. Приведены выражения для выходного сигнала фотоприемника и результаты спектрального анализа этого сигнала с учетом статистики рассеивающих центров. Выведено соотношение неопределенностей для пространственного разрешения и ширины допплеровского спектра. Приведены оптическая схема трехкомпонентного измерителя скорости и блок-схема его электронной части. Показаны возможности измерителя на примере исследования обтекания цилиндра.

Действие ЛДИС основано на выделении в рассеянном свете допплеровского сдвига частоты ω_D , пропорционального проекции вектора скорости рассеивающего свет объекта на выбранное направление и определяемого следующим выражением:

$$\omega_D = \mathbf{V} \cdot (\mathbf{K}_s - \mathbf{K}_i) \quad (1)$$

где \mathbf{V} — вектор скорости рассеивающих свет частиц в исследуемой области потока, \mathbf{K}_i и \mathbf{K}_s — волновые векторы соответственно падающего и рассеянного пучков.

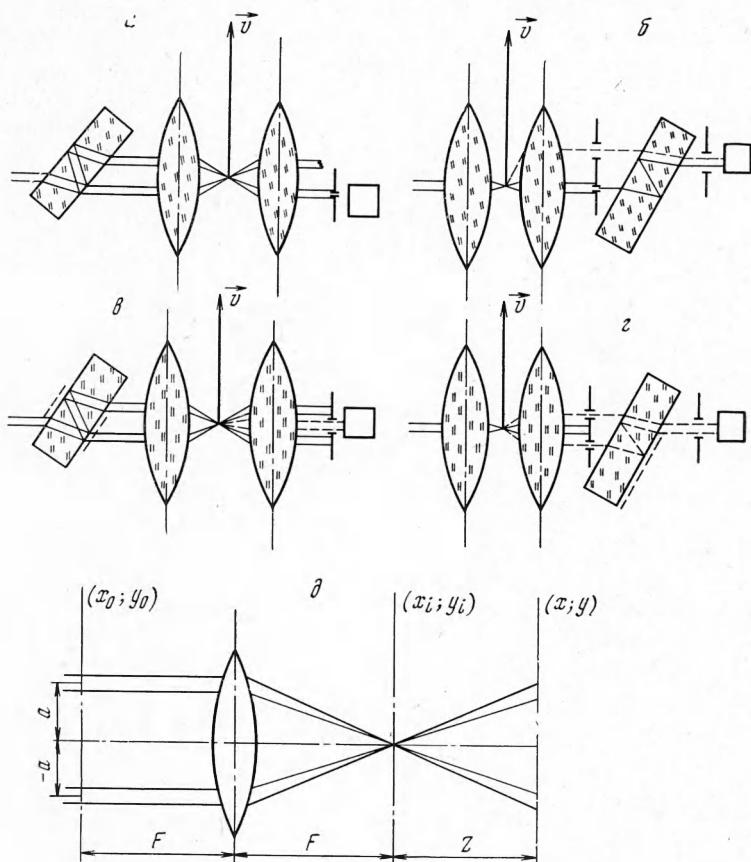
Выделение допплеровского сдвига частоты в рассеянном пучке может осуществляться методом оптического гетеродинирования (гомодинирования), либо применением спектрометра, в качестве которого может быть использован интерферометр Фабри — Перо. Все многообразие оптических схем ЛДИС, использующих принцип гетеродинирования, можно свести к следующим основным типам:

- 1) схемы с геометрией рассеяния, предложенной Голдстейном и Крейдом [2] (фиг. 1, а);
- 2) схемы с геометрией рассеяния, впервые описанной Йе и Камминсом [4] (фиг. 1, б);
- 3) дифференциальные схемы [3,5] (фиг. 1, в, г).

При использовании схем типа 1) в исследуемую область потока направляются два когерентных пучка, один из которых имеет интенсивность, много меньшую интенсивности другого, и является опорным. В плоскости фотоприемника опорный пучок интерфеcирует с рассеянным пучком, пространственно совмещенным с ним. Фотоприемник как смеситель оптических сигналов выделяет сигнал разностной частоты, равной допплеровскому сдвигу в рассеянном пучке. К достоинству схемы следует отнести автоматическое пространственное совмещение пучков, тогда как в схеме 2) (фиг. 1, б) для этого используется специальное интерферометрическое

устройство. Особенностью оптических схем обоих типов является зависимость параметров допплеровского сигнала (частота, ширина спектра) от геометрии как падающих, так и рассеянного пучков.

При использовании дифференциальной схемы (фиг. 1, в) в исследуемую область потока направляются два когерентных пучка равной интенсивности. Разностная допплеровская частота на выходе фотоприемника не



Фиг. 1

зависит от геометрии рассеянных пучков и определяется только геометрией падающих. Дифференциальная схема, показанная на фиг. 1, в, является инвертированной схемой фиг. 1, в. В этой схеме разностная допплеровская частота и ширина спектра не зависят от геометрии падающего пучка и определяются только геометрией рассеянных. Частота сигнала при этом равна алгебраической разности допплеровских сдвигов частоты каждого из рассеянных пучков.

Описанные выше типы оптических схем ЛДИС могут быть выполнены как с делением амплитуды, так и с делением волнового фронта лазерного пучка.

Аналитическое описание и спектральный анализ допплеровского сигнала. Анализ структуры оптического сигнала ЛДИС можно провести, используя аппарат теории оптической фильтрации. На возможность такого подхода впервые было указано в [6]. Для исследования выбрана обобщенная схема прибора, представленная на фиг. 1, д. Пусть в передней

фурье-плоскости (x_0, y_0) фокусирующего объектива имеется поле

$$u_{01}(x_0 - a) + u_{02}(x_0 + a)$$

причем

$$\begin{aligned} u_{01}(x_0 - a, y_0) &= u_{01}(x_0 - a) u_{01}(y_0) \\ u_{02}(x_0 + a, y_0) &= u_{02}(x_0 + a) u_{02}(y_0) \end{aligned}$$

Рассеивающий центр, движущийся в задней фурье-плоскости в направлении оси x_i будем считать фильтром с пространственно-частотной характеристикой в виде дельта-функции $\delta[x_i - v(t - t_0)]$. Если пренебречь апертурной функцией объектива, поле в задней фурье-плоскости можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} u(x_i, y_i) = & \frac{1}{j\lambda F} \left[\Phi_{01} \exp \left(j \frac{kx_i a}{F} \right) + \right. \\ & \left. + \Phi_{02} \exp \left(- j \frac{kx_i a}{F} \right) [1 - \delta[x_i - v(t - t_0)]] \right] \end{aligned} \quad (2)$$

где Φ_{01} и Φ_{02} — фурье-трансформанты функций $U_{01}(x_0, y_0)$ и $U_{02}(x_0, y_0)$ соответственно, а F — фокусное расстояние объектива.

Поле в произвольной плоскости x на расстоянии z от фокуса представляет собой обратное фурье-преобразование поля (2) и запишется так:

$$\begin{aligned} U(x, z) = & - \frac{\exp(jkz)}{\lambda^2 F z} \left\{ U_{01} \left[\left(x + \frac{az}{F} \right), y \right] + U_{02} \left[\left(x - \frac{az}{F} \right), y \right] - \right. \\ & - U_{01}(y) \Phi_{01} \left[\frac{kv}{F} (t - t_0) \right] \exp \left(j \frac{kv}{F} (t - t_0) (a + x) \right) - \\ & \left. - U_{02}(y) \Phi_{02} \left[\frac{kv}{F} (t - t_0) \right] \exp \left(- j \frac{kv}{F} (t - t_0) (a - x) \right) \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

При использовании дифференциальной схемы фотоприемник, помещенный в точку x (вне прямых проходящих лучей), регистрирует интенсивность поля, дифрагированного на рассеивающем центре. Выражение для нее (интенсивности) легко получается из (3)

$$\begin{aligned} I_g = & \frac{1}{\lambda^4 F z} \left\{ U_{01}(y) \Phi_{01}^2 \left[\frac{k}{F} v (t - t_0) \right] + U_{02}(y) \Phi_{02}^2 \left[\frac{k}{F} v (t - t_0) \right] + \right. \\ & + 2U_{01}(y) U_{02}(y) \Phi_{01} \left[\frac{k}{F} v (t - t_0) \right] \cos [\omega_D (t - t_0)] \\ & \left. \left(\omega_D = \frac{2akv}{F} \right) \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

Из (4) следует, что допплеровская частота не зависит от координаты x . Интенсивность поля, регистрируемого в точке $x = az/F$ фотоприемником, в схеме с опорным пучком описывается выражением, очевидным образом получающимся из (3) при условии, что $U_{01} \gg U_{02}$

$$\begin{aligned} I_{0n} = & \frac{1}{\lambda^4 F z} \left\{ U_{02}^2 \left[\left(x - \frac{az}{F} \right), y \right] - U_{01}^2(y) \Phi_{01}^2 \left[\frac{kv}{F} (t - t_0) \right] - \right. \\ & - 2U_{02} \left[\left(x - \frac{az}{F} \right), y \right] U_{01}(y) \Phi_{01} \left[\frac{kv}{F} (t - t_0) \right] \cos [\omega_D (t - t_0)] \\ & \left. \left(\omega_D = \frac{kv}{F} (a + x) \right) \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

Из (5) видно, что значение допплеровской частоты в схеме с опорным пучком зависит от координаты x и, следовательно, от геометрии рассеянного пучка.

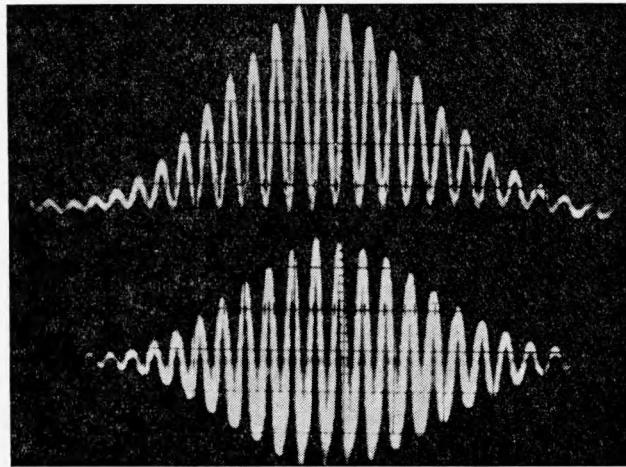
Из (4), (5) следует, что условие наилучшей контрастности в дифференциальной схеме

$$U_{01}(y)\Phi_{01} = U_{02}(y)\Phi_{02} \quad (6)$$

а в схеме с опорным пучком

$$U_{02}[(x-a), y] = U_{01}(y)\Phi_{01} \quad (7)$$

В реальных оптических схемах ЛДИС на входе имеется либо два гауссовых пучка (схемы с делением амплитуды поля), либо два пучка, дифраги-



Фиг. 2

рованные на одинаковых щелях (диафрагмах). Соответственно выражение для $\Phi [kvF^{-1}(t - t_0)]$ в (3), (4) и (5) примет вид
для гауссовых пучков

$$\Phi(t) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \exp[-\xi^2 \omega_D^2 (t - t_0)^2] \quad \left(\xi = \frac{\sigma}{2\sqrt{2}a} \right) \quad (8)$$

для двух одинаковых круглых диафрагм диаметра b с равномерным распределением интенсивности

$$\Phi(t) = 4a \frac{J_1[b\omega_D a^{-1}(t - t_0)]}{\omega_D(t - t_0)} \quad (9)$$

для двух одинаковых щелей шириной b с равномерным распределением интенсивности

$$\Phi(t) = 4a \frac{\sin[b\omega_D a^{-1}(t - t_0)]}{\omega_D(t - t_0)} \quad (10)$$

где σ — параметр распределения интенсивности входного гауссова пучка;
 J_1 — функция Бесселя первого рода первого порядка.

Сигнал от одной частицы, полученный экспериментально на схеме с двумя щелями до и после вычитания постоянной составляющей, представлен на фиг. 2.

Суммарный допплеровский сигнал при условии максимальной контрастности интерференционного поля в плоскости фотоприемника можно,

как это следует из выражений (4—7), представить в виде

$$I(t) = \sum_{n=1}^N I_n(t - t_n) \{1 + \cos [\omega_D(t - t_n)]\} \quad (11)$$

где t_n — случайный момент появления n -й рассеивающей частицы в области пересечения падающих пучков в потоке, N — число частиц, прошедших через исследуемый объем. Сигнал состоит из собственно допплеровской составляющей

$$\sum_{n=1}^N I_n(t - t_n) \cos (\omega_D(t - t_n))$$

и низкочастотной «постоянной» составляющей

$$\sum_{n=1}^N I_n(t - t_n)$$

Как показано ниже, спектр сигнала при условии, что точечные рассеивающие свет частицы образуют в исследуемом потоке равномерное пуассоновское поле, описывается следующим выражением:

$$I(\omega) = \frac{1}{T} |I_0(\omega)|^2 \left[Tq + 2 \frac{q^3}{\omega^2} - 2e^{-\alpha} \left(\frac{q^2}{\omega^2} \cos \beta + \frac{q}{\omega} \sin \beta \right) \right] \\ \left(\alpha = \frac{\omega^2 T q}{q^2 + \omega^2}, \quad \beta = \frac{\omega T q^2}{q^2 + \omega^2} \right) \quad (12)$$

где q — плотность потока частиц, T — время анализа сигнала, $I_0(\omega)$ — амплитудный спектр сигнала от одиночной частицы.

Учитывая (8) — (10), легко получить, что для гауссовых пучков

$$I_0(\omega) = \sum_{i=1}^2 \exp [\omega_i^2 / (4\xi \omega_D^2)] \quad (\omega_1 = \omega, \omega_2 = \omega - \omega_D = \Delta\omega) \quad (13)$$

Для схем с круглыми диафрагмами

$$I_0(\omega) = \sum_{i=1}^2 \xi_i(\omega_i) \left[\arccos \left| \frac{a\omega_i}{2b\omega_D} \right| - \frac{a\omega_i}{2b\omega_D} \sqrt{1 - \frac{b^2\omega_i^2}{4b^2\omega_D^2}} \right] \quad (14)$$

$$\xi_i(\omega) = \begin{cases} 1 & \text{при } |\omega_i| \leqslant 2b\omega_D/a \\ 0 & \text{при } |\omega_i| > 2b\omega_D/a \end{cases}$$

Для схем со щелями

$$I_0(\omega) = \sum_{i=1}^2 \xi_i(\omega_i) \left[\frac{a}{b} \omega_D - |\omega_i| \right] \quad (15)$$

Выражение для спектра допплеровского сигнала с отфильтрованной постоянной составляющей сильно упрощается

$$I(\Delta\omega) = q I_0^2(\Delta\omega) \quad (16)$$

Из (16) следует, что энергетический спектр сигнала повторяет энергетический спектр от одиночной частицы и пропорционален концентрации частиц. Следовательно, среднеквадратичное значение переменной части

допплеровского сигнала пропорционально \sqrt{q} . На фиг. 3 в качестве примера представлен амплитудный спектр, рассчитанный по формулам (14) и (16).

Соотношение между пространственным и временными разрешением ЛДИС. Анализ выражений (8) — (10) и (13) — (15) показывает, что соотношение между пространственным разрешением оптической схемы измерителя и шириной амплитудного спектра в общем случае можно представить в виде

$$\delta \Delta f = \beta v \quad (17)$$

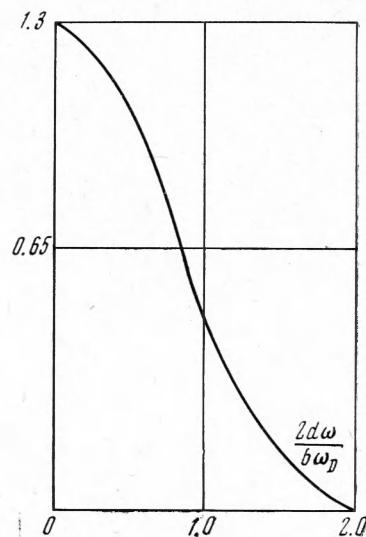
где δ — минимальный линейный размер, из которого извлекается информация о скорости, Δf — полуширина амплитудного спектра, v — скорость, β — постоянный коэффициент, зависящий от типа оптической схемы, и уровня, на котором отсчитывается ширина спектра.

Например, для схем с круглыми диафрагмами $\beta = 7.6 / \pi$, с прямоугольными щелями $\beta = 2$. Пространственное разрешение при этом оценивается по нулям первого максимума функции Эйри, а ширина спектра — по нулевому уровню спектральной плотности; для гауссовых пучков при отсчете δ и Δf на уровне l^{-2} имеет место $\beta = 2 / \pi$.

При применении ЛДИС для исследования турбулентных потоков мгновенная частота допплеровского сигнала изменяется пропорционально флюктуациям скорости, т. е. сигнал оказывается промодулированным по частоте. Известно, что спектр частотно-модулированного сигнала является сложной функцией модулирующего процесса, которая упрощается только в двух случаях: если модуляция узкополосная, т. е. интенсивность турбулентности мала, а модулирующий процесс высокочастотен, то половина допплеровского спектра как повторяет спектр модулирующего процесса; если турбулентность велика и процесс низкочастотен, то допплеровский спектр повторяет кривую распределения значений скорости. В общем же случае судить о параметрах модулирующего процесса по характеру спектра частотно-модулированного колебания трудно. В свете этого использование анализатора спектра как измерительного прибора в допплеровских системах исследования турбулентности мало перспективно.

Трехкомпонентный ЛДИС. Оптическая часть. На основе проведенных исследований авторами предложена новая оптическая схема ЛДИС, позволяющая осуществить измерение трех ортогональных проекций вектора скорости, и разработаны принципы рациональной обработки полученного допплеровского сигнала. Ниже приводится описание макета разработанной аппаратуры.

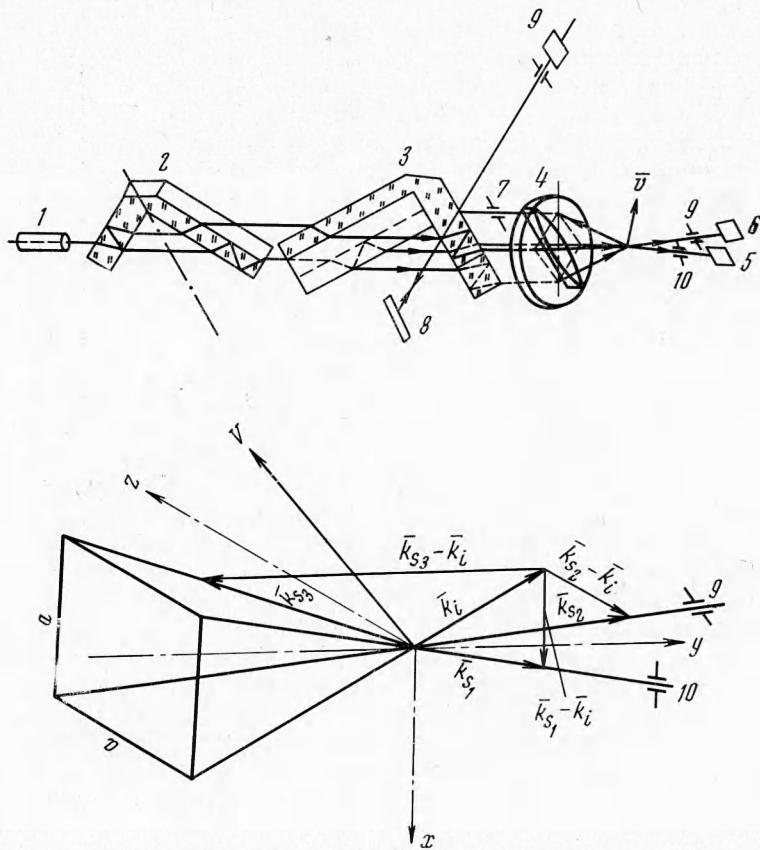
Оптическая часть представлена на фиг. 4. Луч лазера 1 двумя помещенными последовательно расщепителями 2 и 3 разделяется на три параллельных пучка, попарно расположенных в ортогональных плоскостях. Интенсивность пучка, направленного по ребру прямого угла, который образован этими ортогональными плоскостями, много больше интенсивностей двух других пучков, играющих роль опорных. Расщепленные пучки объективом 4 фокусируются в исследуемую область потока. Свето-



Фиг. 3

вые пучки, рассеянные примесными частицами в фокальной плоскости объектива, имеют допплеровское смещение частоты, которое пропорционально скорости рассеивателей. Выделение допплеровского сдвига осуществляется оптическим гетеродинированием пространственно совмещенных опорного и рассеянного пучков фотоприемниками 5 и 6. Частоты получаемых сигналов пропорциональны проекциям вектора скорости на соответствующие разностные векторы $\bar{K}_{s1} - \bar{K}_i$ и $\bar{K}_{s2} - \bar{K}_i$.

Для определения третьей проекции используется рассеянный пучок, выделенный диафрагмой 7 в направлении, симметричном направлению



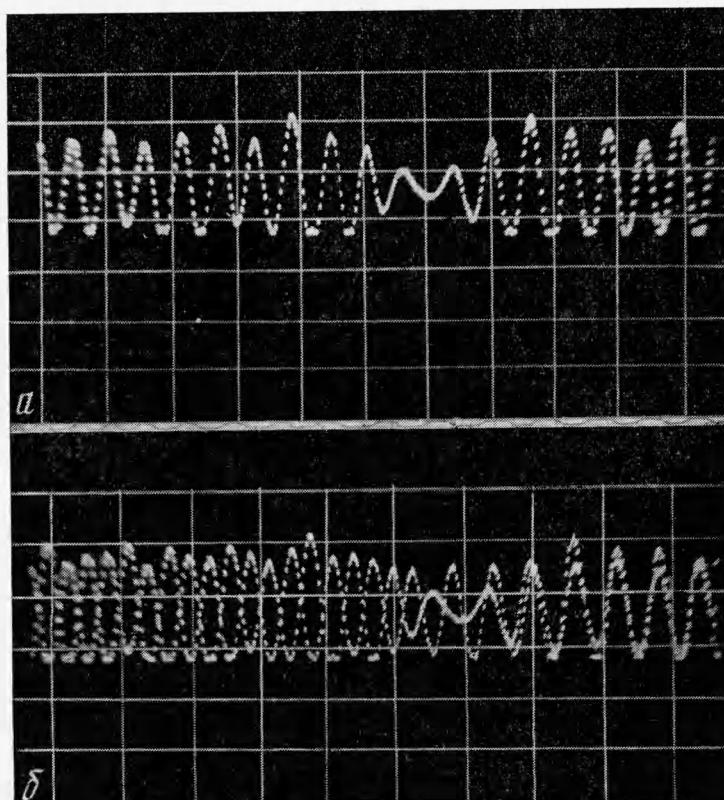
Фиг. 4 а, б

падающего сильного пучка относительно оси объектива, и лежащий с ним в одной плоскости. Допплеровский сдвиг равен проекции вектора скорости на разностный вектор $\bar{K}_{s3} - \bar{K}_i$ и выделяется оптическим гетеродинированием в интерферометре Майкельсона. Из фиг. 4 легко видеть, что упомянутые разностные векторы взаимно ортогональны. Таким образом, оптическая схема ЛДИС позволяет одновременно измерить три ортогональные проекции вектора скорости.

Типичный сигнал, получаемый от фотоприемника при ламинарном потоке, представлен на фиг. 5. Как и следовало ожидать, он имеет характер биений, сильно промодулирован по амплитуде и имеет паразитную фазовую модуляцию, обусловленную случайному характером моментов вхождения частиц в фокальную область объектива. Характер фазовой модуляции

наглядно виден на фиг. 5, б, где показано наложение половин одной и той же реализации сигнала.

Электронная часть. Первый вариант аппаратуры был построен по схеме с фазовой автоподстройкой частоты, описанной в [8]. Эта схема оказалась чувствительной к резким колебаниям амплитуды сигнала и скачкам фазы. В результате при ламинарном потоке шумы в полосе 50 гц составляли 3% в пересчете на эквивалентную турбулентность. В связи с большим значением шумов возникла необходимость введения в систему элементов нелинейной фильтрации и слежения по частоте, а не по фазе.

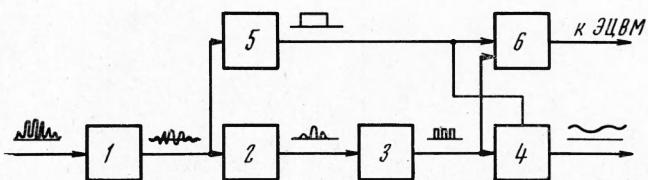


Фиг. 5

Блок-схема электронной части второго варианта измерителя представлена на фиг. 6. Сигнал от фотоприемника поступает на управляемый полосовой фильтр 1 для подавления шумов лазера и фотоприемника. Затем он подается на пороговый усилитель 2, который пропускает сигнал только в те отрезки времени, когда его амплитуда намного превышает уровень шумов. Формирователь 3, включенный после усилителя, преобразует сигнал в пачки импульсов. Параллельно формирователем 5 создаются стробирующие импульсы с длительностью, равной длительности пачек. Пачки импульсов поступают на частотный детектор 4 с памятью, которая действует в моменты пропадания сигнала. На выходе частотного детектора получается аналоговый сигнал, пропорциональный мгновенному значению скорости исследуемого потока. Пачки импульсов подаются также на счетчик 6, управляемый стробирующими импульсами таким образом,

что заданное заранее время счета удлиняется на отрезки времени, в течение которых сигнал на выходе счетчика отсутствует. В результате на выходе этого устройства получается код чисел, равных значению средней скорости за выбранное время. Счетчик снабжен цифровым табло, показывающим текущие значения скорости. Напряжения кодов с выхода счетчика вводятся в ЭВМ, которая выдает все статистические характеристики турбулентного потока.

В качестве примера на фиг. 7 представлена функция распределения значений скорости при времени усреднения 1 сек, полученная с помощью



Фиг. 6

ЭЦВМ для ламинарного потока со скоростью 1 см/сек. Дисперсия в данном случае обусловлена шумами прибора. Среднеквадратичное отклонение составляет порядка 0,1%.

Разработанная аппаратура по одному каналу измерения имеет следующие характеристики:

- 1) диапазон измеряемых скоростей от $2 \cdot 10^{-3}$ до 2 м/сек;
- 2) шумы устройства, эквивалентные турбулентности в полосе частот 0—100 герц, составляют 1%;
- 3) полоса пропускания по частоте пульсаций скорости разбита на три поддиапазона — 10, 100 и 1000 герц;
- 4) пространственное разрешение имеет порядок $0.1 \times 0.1 \times 0.5 \text{ мм}^3$;
- 5) время усреднения $10^{-3} \div 10$ сек.

Экспериментальные результаты. Для иллюстрации возможностей одного измерительного канала был проведен следующий эксперимент. В канале сечением $16 \times 16 \text{ мм}^2$ с ламинарным потоком в 40 мм вверх по потоку от фокуса ЛДИС по вертикальной оси канала был установлен цилиндр диаметром 5 мм. Аналоговый сигнал с выхода ЛДИС был подан на коррелятор. Автокорреляционные функции дорожки Кармана при средних скоростях 1 — 3.5 см/сек, 2 — 5 см/сек, 3 — 7 см/сек, 4 — 10 см/сек представлены на фиг. 8. При самой низкой скорости размер вихря, определенный по соотношению $R = VT$, где V — средняя скорость, измеренная цифровой частью ЛДИС, а T — период корреляционной функции, равен 7 мм.

При увеличении скорости размер вихря уменьшается и, наконец, корреляционная функция теряет периодичность, т. е. закономерный процесс нарушается.

В заключение рассмотрим некоторые дополнительные вопросы, связанные с изложенным выше методом.

Получение спектра сигнала от одиночной частицы. Для нахождения амплитудного спектра допплеровского сигнала от одной частицы в случае цилиндрически симметричных пучков следует учесть, что спектр функции $[J_1(\rho t)] / t$ равен

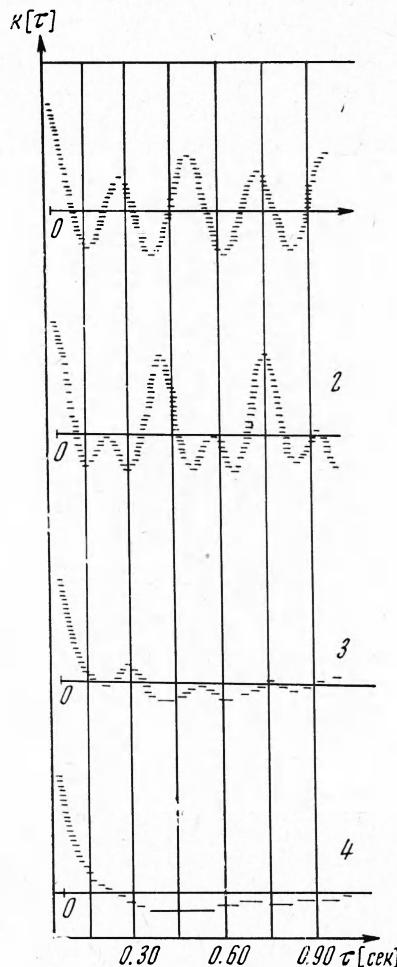
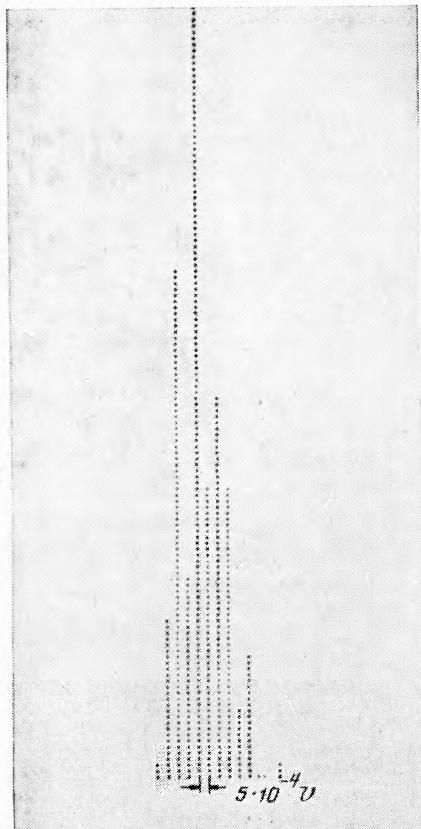
$$S(\omega) = \frac{\sqrt{\pi} 0.886}{2\rho} \sqrt{\rho^2 - \omega^2} \quad (18)$$

Следовательно, функции $[J_1^2(\rho t)] / t^2$ соответствует в качестве фурье-образа свертка

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\gamma) S(\gamma - \omega) d\gamma \quad (19)$$

Геометрически эта свертка представляет собой площадь области, общей для двух окружностей, откуда следует (для $\omega < 2\rho$):

$$G(\omega) = \left(2\arccos \frac{\omega}{2\rho} - \frac{\omega}{\rho} \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{4\rho^2}} \right) a^2 \quad (20)$$



Фиг. 8

Аналогично получается выражение для $I_0(\omega)$ в случае прямоугольных щелей. При этом учитывается, что функция $[2 \sin(\rho t)]/\pi t$ является обратным фурье-преобразованием прямоугольного единичного импульса длительностью ρ в частотном пространстве. Следовательно, фурье-преобразование функции $[4 \sin^2(\rho t)]/\pi^2 t^2$ является свертка прямоугольного импульса самого с собой, что дает треугольник

$$G(\omega) = 2\rho - |\omega| \quad (21)$$

Получение спектра сигнала с учетом статистики частиц. Если поток рассеивающих частиц считать равномерным пуассоновским, то запаздывание t_l между моментами попадания в рабочую зону l -й и $l+1$ -й частиц будет непрерывной случайной величиной, распределенной по показательному закону

$$f(t_l) = \begin{cases} 0 & \text{при } t_l < 0 \\ qe^{-qt_l} & \text{при } t_l > 0 \end{cases}$$

Поскольку момент попадания n -й частицы в интерференционную область $t_n = \sum_{l=1}^n t_l$, то плотность распределения случайной величины t_n определяется согласно закону Эрланга

$$f(t_n) = \frac{q (qt_n)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-qt_n} \quad (22)$$

Число частиц N за время наблюдения T будет случайной величиной, распределенной по закону Пуассона с плотностью

$$f(N) = \frac{(Tq)^N}{N!} e^{-Tq} \quad (23)$$

Используя (23), теорему запаздывания и теорему о спектре суммы, можем записать выражение для амплитудного спектра допплеровского сигнала следующим образом:

$$I(\omega) = I_0(\omega) \left(1 + \sum_{n=1}^N e^{-j\omega t_n} \right) \quad (24)$$

где $I_0(\omega)$ — спектр сигнала от одной частицы, а t_n — момент появления n -й частицы в центре области извлечения информации.

О средняя выражение (24) по t_n и N , можно легко получить математическое ожидание спектра

$$\langle I(\omega) \rangle = \frac{1}{T} I_0^2(\omega) \left[Tq + 2 \frac{q^2}{\omega^2} - 2e^{-\alpha} \left(\frac{q^2}{\omega^2} \cos \beta + \frac{q}{\omega} \sin \beta \right) \right] \quad (25)$$

$$\left(\alpha = \frac{\omega^2 T q}{q^2 + \omega^2}, \quad \beta = \frac{\omega T q^2}{q^2 + \omega^2} \right)$$

Поступила 30 III 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Yen Y., Cummins H. Z. Lokalised fluid flow measurements with He—Ne laser spectrometer. Appl. Phys. Letters, 1964, vol. 4, No. 10.
2. Goldstein R. J., Reid D. K. Measurement of laminar flow develop in a square duct using a laser-Doppler flowmeter. Trans. ASME, Ser. E, J. Appl. Mech., 1967, vol. 34, No. 4, pp. 813—818.
3. Lehmann B. Geschwindigkeitsmessung mit laser-Dopplerverfahren. Wissenschaftliche Berichte AEG-Telefunken, 1968, Bd 41, H. 3.
4. Дубинщев Ю. Н., Коронкевич В. П., Соболев В. С., Столповский А. А., Уткин Е. Н., Шмойлов Н. Ф. Измерение параметров турбулентных потоков лазерного допплеровского измерителя скорости. Автометрия, 1971, № 1.
5. Ринкевич Ю. С. Применение ОКГ для определения скорости частиц в двухфазной струе методом гетеродинирования. Радиотехника и электроника, 1969, т. 14, № 10, стр. 1903—1905.
6. Rudd M. J. A new theoretical model for the laser Doppler meter. J. Phys., Ser. E, 1969, vol. E2, No. 1, pp. 55—58.
7. Папулис А. Теория систем и преобразований в оптике. М., «Мир», 1971.
8. Fogelman J. W., Lewis R. D., Thornton J. R., Watson H. J. Laser Doppler velocimeter for measurement of localized flow velocities in liquids. Proc. IEEE, 1966, vol. 54, No. 3, pp. 424—425.
9. Adrian R. J., Goldstein R. J. Analysis of laser Doppler anemometer. J. Phys., Ser. E, 1971, vol. 4, No. 7.