

УДК 533.6.013.4

**Математическое моделирование
самовозбуждающихся колебаний
по тангажу коническо-сферического тела
при числе Маха $M = 1,75$ с использованием
гипотезы вынужденных колебаний***

Е.А. Часовников

*Институт теоретической и прикладной механики
им. С.А. Христиановича СО РАН, Новосибирск*

E-mail: chas@itam.nsc.ru

Для моделирования самовозбуждающихся колебаний тела предложена гипотеза формирования периодических вихревых структур в донном следе, частота схода которых совпадает с собственной частотой колебаний тела, а их силовое воздействие на тело математически описывается гармонической функцией времени. Получены аналитические формулы для аэродинамических производных и эквивалентных аэродинамических производных. Показано, что математическая модель удовлетворительно описывает зависимости угла тангажа от времени и зависимости эквивалентных аэродинамических производных от амплитуды колебаний для двух моментов инерции тела. Математическая модель прогнозирует гиперболический закон зависимости амплитуды автоколебаний от приведенной частоты.

Ключевые слова: коническо-сферическое тело, свободные колебания, демпфирование тангажа, самовозбуждающиеся колебания.

Введение

Исследованию феномена потери аэродинамического демпфирования по тангажу осесимметричных тел посвящено множество экспериментальных работ [1–4]. В ряде из них в качестве объектов были выбраны конусы [2–4]. Обычно задняя часть конусов представляла собой плоскую поверхность [2], а в некоторых работах [3, 4] рассматривалась форма задней части, отличная от плоской. Известно, что задняя часть затупленных осесимметричных тел, широко используемых в качестве спускаемых в атмосфере планет космических летательных аппаратов, может явиться источником потери аэродинамического демпфирования, развития самовозбуждающихся колебаний и формирования незатухающих колебаний (автоколебаний). Несмотря на многолетние исследования,

* Работа выполнена в рамках Программы фундаментальных научных исследований государственных академий наук на 2021–2023 годы. Эксперименты проведены на базе ЦКП «Механика».

механизмы этого явления изучены слабо. Отсутствуют и адекватные инженерные математические модели (ММ), позволяющие смоделировать явление для решения практических задач.

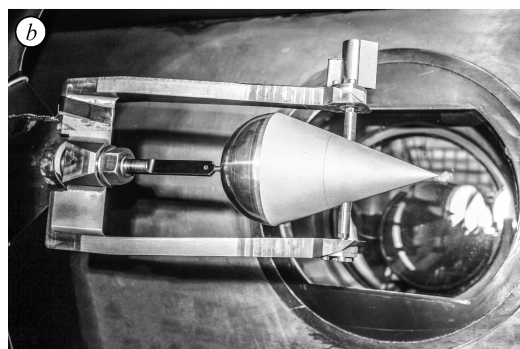
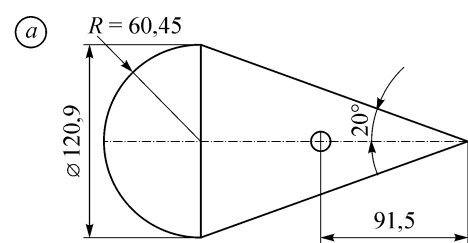
Для описания аэродинамических нагрузок при неустановившемся движении тел в настоящее время наиболее широко применяется концепция аэродинамических производных, в рамках которой коэффициент момента тангажа представляется в виде суммы стационарного значения и динамических добавок, пропорциональных скорости изменения угла атаки и угловой скорости тангажа. Аэродинамические производные этой ММ зависят только от угла атаки.

Сравнительно недавно была предложена гипотеза запаздывания [5], главная идея которой состоит в следующем. Коэффициент момента тангажа кормовой части тела при неустановившемся движении в данный момент времени равен коэффициенту момента тангажа кормовой части тела при установившемся движении в некоторый предыдущий момент времени $t - t_{\text{lag}}$, т.е. $r m_z(t) = r m_{z_{\text{st}}} [\alpha(t - t_{\text{lag}})]$, где t_{lag} — время запаздывания, $\alpha(t - t_{\text{lag}})$ — угол атаки в момент времени $t - t_{\text{lag}}$.

Следует отметить, что если амплитуда автоколебаний тела существенно зависит от приведенной частоты колебаний, то смоделировать этот эффект частоты при помощи указанных выше ММ, не представляется возможным.

В работе [6] для моделирования самовозбуждающихся колебаний сегментально-конического тела использовалась ММ, включающая в себя обыкновенное линейное дифференциальное уравнение первого порядка (гипотеза релаксации). В результате численных исследований было показано, что эта ММ дает возможность описывать эффект частоты. Однако ограниченные экспериментальные данные не позволили проверить адекватность этой ММ.

В настоящей работе предпринята попытка использовать другую ММ для описания коэффициента момента тангажа тела, представляющего собой острый круговой конус с задней полусферической частью (коническо-сферическое тело, см. рис. 1а). Для него



при малых сверхзвуковых скоростях ($M = 1,75, 2,0$ и $2,25$) и моменте инерции $I_z = 14,0 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ в работе [4] были обнаружены самовозбуждающиеся колебания при испытаниях в аэродинамической трубе на установке свободных колебаний с поперечной державкой (см. рис. 1б). Далее эта модель будет обозначаться как «тяжелая» модель. Также были проведены дополнительные испытания данной модели, но с небольшим закруглением

Рис. 1. Схема модели (а) и общий вид модели и установки свободных колебаний в аэродинамической трубе Т-313 ИТПМ СО РАН (б).

Размеры приведены в мм; круглым маркером на оси симметрии отмечено положение оси вращения (а).

носика конуса по сфере (см. далее таблицу). Радиус закругления составлял $r = 2$ мм ($\bar{r} = r/D = 0,0166$, D — диаметр миделевого сечения тела). Анализ показал, что это изменение не сказалось заметным образом на интегральных характеристиках.

В представленном исследовании получены экспериментальные данные для геометрически идентичного коническо-сферического тела с меньшим моментом инерции: $I_z = 2,2 \cdot 10^{-3}$ кг·м² (назовем его «легкая» модель). Важно, что в этом случае автоколебания практически вырождались (см. далее), т.е. был экспериментально обнаружен эффект влияния частоты колебаний. Как будет показано ниже, предлагаемая ММ позволяет описывать этот эффект.

В дальнейшем будут использоваться следующие экспериментальные характеристики: коэффициент момента тангажа, его квазистационарные значения (в моменты мгновенной остановки), огибающие переходных процессов угла тангажа по времени и эквивалентные аэродинамические производные. Методики их определения были изложены в работах [7, 8]. По этим же методикам находятся и расчетные характеристики, за исключением коэффициента момента тангажа. Последний определяется путем численного расчета (см. ниже). Эквивалентные аэродинамические производные везде далее определялись по методу 2, предложенному в работе [7], посредством аппроксимации коэффициента момента тангажа эквивалентным его значением на участке колебаний $N = 2 - 5$ (N — число периодов колебаний):

$$m_z = (m_z^\alpha)_e \theta + \left(m_z^{\bar{\omega}z} + m_z^{\bar{\alpha}} \right)_e \frac{l}{V} \dot{\theta},$$

где $(m_z^\alpha)_e$ и $(m_z^{\bar{\omega}z} + m_z^{\bar{\alpha}})_e$ — эквивалентные аэродинамические производные коэффициента момента тангажа (постоянные величины на рассматриваемом участке колебаний), θ и $\dot{\theta}$ — соответственно угол тангажа и скорость изменения угла тангажа.

В таблице приведены условия испытаний, параметры подобия и экспериментальные характеристики колебаний тела из работы [4] для $I_z = 14,0 \cdot 10^{-3}$ кг·м² и полученные в настоящей работе для $I_z = 2,2 \cdot 10^{-3}$ кг·м². Используемые здесь сокращения и параметры обозначают следующее: № протокола — четырехзначный номер протокола испытаний, Re — число Рейнольдса, α_0 — начальный угол атаки (при фиксации тела арретиром), $i_z = 2I_z / (\rho S l^3)$ — безразмерный момент инерции тела (параметр подобия при свободных колебаниях [9]), ρ — плотность воздуха, S — характерная площадь тела, l — характерная длина тела, $\bar{\omega} = \omega l/V$ — приведенная частота колебаний, $\omega = 2\pi f$ — круговая частота колебаний модели, f — частота колебаний модели, V — скорость потока, Θ_{avt} — амплитуда автоколебаний.

Таблица

Параметры эксперимента

№ протокола	M	$Re \cdot 10^{-6}$	$I_z \cdot 10^3$, кг·м ²	α_0 , град	i_z	$\bar{\omega}$	Θ_{avt} , град	Примечание
4157	1,80	3,98	14,0	4,7	917	0,0199	9,54	—
4126	1,79	3,83	14,0	11,6	823	0,0207	9,95	—
4161	1,79	3,95	14,0	33,8	919	0,0196	11,8	—
4160	1,79	3,37	14,0	−1,1	1080	0,0184	10,0	Пониженное число Рейнольдса
4327	1,79	4,00	14,0	10,5	901	0,0199	11,0	Носик модели закруглен
4329	1,79	3,98	14,0	−1,2	904	0,0199	9,5	Носик модели закруглен
4326	1,78	4,15	2,2	10,8	135	0,0556	1,8	—

1. Математическая модель свободных колебаний тела и определение неизвестных параметров

Рассмотрим сущность предполагаемого механизма самовозбуждающихся колебаний. Предположим, что при движении тела в донном следе формируются некие периодические вихревые структуры, частота схода которых совпадает с собственной частотой колебаний тела, и которые, в свою очередь, обуславливают вынужденные колебания тела. Силовое воздействие вихревых структур на тело будем описывать гармонической функцией времени. В этом случае уравнения движения тела на установке свободных колебаний будут иметь следующий вид (вынужденные колебания линейного осциллятора):

$$I_z \ddot{\alpha} = m_z q S l,$$

$$m_z = m_{zst}^\alpha \alpha + \left(m_z^{\bar{\omega}_z} + m_z^{\bar{\alpha}} \right)_* \frac{\dot{\alpha} l}{V} + \tilde{m}_z \sin(pt + \varphi), \quad (1)$$

здесь $\ddot{\alpha}$, $\dot{\alpha}$ — соответственно вторая и первая производные угла атаки по времени, $q = \rho V^2/2$ — скоростной напор, m_{zst}^α — производная коэффициента момента тангажа при установившемся движении $m_{zst}(\alpha)$ по углу атаки, $\left(m_z^{\bar{\omega}_z} + m_z^{\bar{\alpha}} \right)_*$ — коэффициент демпфирования тангажа передней части тела, $\tilde{m}_z$, p и φ — соответственно амплитуда, круговая частота и фаза гармонической составляющей коэффициента момента тангажа. Отметим, что при вращательных колебаниях $\alpha(t) = \theta(t)$.

Представим ММ в более привычном виде:

$$I_z \ddot{\alpha} + \left[- \left(m_z^{\bar{\omega}_z} + m_z^{\bar{\alpha}} \right)_* \frac{q S l^2}{V} \right] \dot{\alpha} + (-m_{zst}^\alpha q S l) \alpha = \tilde{m}_z q S l \sin(pt + \varphi). \quad (2)$$

Известно, что общее решение уравнения (2) имеет вид:

$$\alpha = A e^{-bt} \sin(k_1 t + \xi) + B \sin(pt + \varphi - \psi),$$

$$\text{здесь } b = \frac{- \left(m_z^{\bar{\omega}_z} + m_z^{\bar{\alpha}} \right)_* q S l^2}{2 I_z V}, \quad k_1 = \sqrt{k^2 - b^2}, \quad B = \frac{\tilde{m}_z q S l}{I_z \sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4 b^2 p^2}}, \quad k = \sqrt{\frac{-m_{zst}^\alpha q S l}{I_z}},$$

$\operatorname{tg} \psi = 2bp/(k^2 - p^2)$. Так как $b \ll k$, то можно принять $k_1 = \sqrt{k^2 - b^2} = k$.

При совпадении частоты вынужденных колебаний p с собственной частотой k (в соответствии с предлагаемым механизмом самовозбуждающихся колебаний) будем иметь:

$$B = \frac{\tilde{m}_z q S l}{I_z 2 b k} = \frac{\tilde{m}_z}{- \left(m_z^{\bar{\omega}_z} + m_z^{\bar{\alpha}} \right)_* \bar{k}} \left(\bar{k} = \frac{k l}{V} \right),$$

$$\operatorname{tg} \psi = \infty, \quad \psi = \pi/2.$$

Тогда

$$\alpha = A e^{-bt} \sin(kt + \xi) - B \cos(kt + \varphi). \quad (3)$$

Скорость изменения угла атаки рассчитывается как

$$\dot{\alpha} = Ae^{-bt} k \cos(kt + \xi) - Ae^{-bt} b \sin(kt + \xi) + Bk \sin(kt + \varphi).$$

Для начальных условий $t = 0$, $\alpha(0) = \alpha_0$, $\dot{\alpha}(0) = 0$ получим:

$$\alpha_0 = A \sin \xi - B \cos \varphi,$$

$$0 = Ak \cos \xi - Ab \sin \xi + Bk \sin \varphi.$$

Решая данную систему уравнений, можно найти начальную фазу и начальную амплитуду свободных колебаний:

$$\operatorname{ctg} \xi = \frac{(\alpha_0 + B \cos \varphi)b - Bk \sin \varphi}{(\alpha_0 + B \cos \varphi)k}, \quad (4)$$

$$A = \frac{\alpha_0 + B \cos \varphi}{\sin \xi}.$$

Если $\varphi = 0$, то выражения (4) приобретают вид:

$$\operatorname{ctg} \xi = b/k, \quad (5)$$

$$A = \frac{\alpha_0 + B}{\sin \xi}. \quad (6)$$

Из (5) получаем

$$\operatorname{ctg} \xi = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \xi \right) \approx \frac{\pi}{2} - \xi = \frac{b}{k}.$$

Отсюда

$$\xi = \frac{\pi}{2} - \frac{b}{k}. \quad (7)$$

Из (6) следует:

$$A = \frac{\alpha_0 + B}{\sin \frac{\pi}{2} \cos \frac{b}{k} - \cos \frac{\pi}{2} \sin \frac{b}{k}} \approx \alpha_0 + B. \quad (8)$$

Подставим (7) и (8) в (3):

$$\begin{aligned} \alpha &= (\alpha_0 + B)e^{-bt} \sin \left(kt + \frac{\pi}{2} - \frac{b}{k} \right) - B \cos(kt) = (\alpha_0 + B)e^{-bt} \cos \left(kt - \frac{b}{k} \right) - B \cos(kt) = \\ &= (\alpha_0 + B)e^{-bt} \cos kt \cos \frac{b}{k} + (\alpha_0 + B)e^{-bt} \sin kt \sin \frac{b}{k} - B \cos(kt) \approx \\ &\approx (\alpha_0 + B)e^{-bt} \cos kt + (\alpha_0 + B)e^{-bt} \frac{b}{k} \sin kt - B \cos(kt) = \\ &= \left[(\alpha_0 + B)e^{-bt} - B \right] \cos kt + (\alpha_0 + B)e^{-bt} \frac{b}{k} \sin kt \approx \left[(\alpha_0 + B)e^{-bt} - B \right] \cos kt. \end{aligned}$$

Производная от угла атаки запишется следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha} = & -\left[(\alpha_0 + B)e^{-bt} - B\right]k \sin kt - (\alpha_0 + B)e^{-bt}b \cos kt + (\alpha_0 + B)e^{-bt}b \cos kt - \\ & - (\alpha_0 + B)e^{-bt} \frac{b^2}{k} \sin kt = \left[-\left((\alpha_0 + B)e^{-bt} - B\right) - (\alpha_0 + B)e^{-bt} \frac{b^2}{k^2}\right]k \sin kt \approx \\ & \approx -\left[(\alpha_0 + B)e^{-bt} - B\right]k \sin kt.\end{aligned}$$

Отсюда получим:

$$\sin kt = -\frac{\dot{\alpha}}{\left[(\alpha_0 + B)e^{-bt} - B\right]k}.$$

Подставим это выражение в (1):

$$\begin{aligned}m_z = & m_{z_{st}}^{\alpha} \alpha + \left(m_z^{\bar{\omega}_z} + m_z^{\bar{\alpha}}\right)_* \frac{\dot{\alpha}l}{V} - \frac{\tilde{m}_z}{\left[(\alpha_0 + B)e^{-bt} - B\right]k} \dot{\alpha} = \\ = & m_{z_{st}}^{\alpha} \alpha + \left(m_z^{\bar{\omega}_z} + m_z^{\bar{\alpha}}\right)_* \frac{\dot{\alpha}l}{V} - \frac{\tilde{m}_z}{\left[(\alpha_0 + B)e^{-bt} - B\right]k} \frac{\dot{\alpha}l}{V}.\end{aligned}\quad (9)$$

Тогда аэродинамические производные будут иметь вид:

$$\begin{aligned}m_z^{\alpha} = & \frac{\partial m_z}{\partial \alpha} = m_{z_{st}}^{\alpha}, \\ m_z^{\bar{\omega}_z} + m_z^{\bar{\alpha}} = & \frac{\partial m_z}{\partial \bar{\omega}_z} + \frac{\partial m_z}{\partial \bar{\alpha}} = \left(m_z^{\bar{\omega}_z} + m_z^{\bar{\alpha}}\right)_* - \frac{\tilde{m}_z}{\left[(\alpha_0 + B)e^{-bt} - B\right]k}.\end{aligned}\quad (10)$$

Проанализируем соотношение (10). Функция $f(t) = (\alpha_0 + B)e^{-bt} - B$ при $\alpha_0 < 0$ и $\alpha_0 + B > 0$ для переходного процесса, изображенного на рис. 2а, имеет вид, представленный на рис. 2б, и равна

$$(\alpha_0 + B)e^{-bt} - B = -\Theta,$$

где Θ — текущая амплитуда колебаний. Тогда выражение (10) для коэффициента демпфирования тангажа (рис. 3) переписывается следующим образом:

$$m_z^{\bar{\omega}_z} + m_z^{\bar{\alpha}} = \left(m_z^{\bar{\omega}_z} + m_z^{\bar{\alpha}}\right)_* + \frac{\tilde{m}_z}{\Theta k}.\quad (11)$$

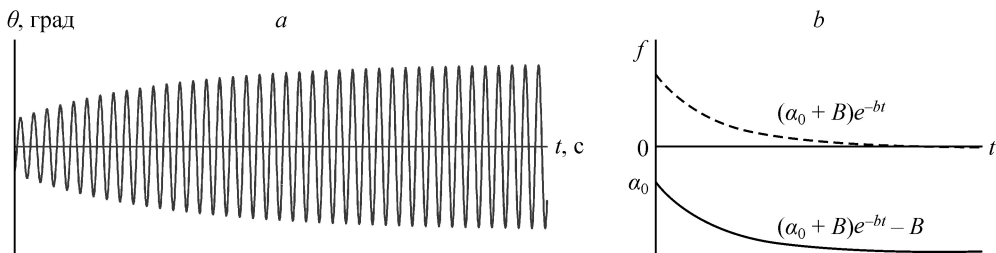


Рис. 2. Зависимость угла тангажа (а) и функции $f(t) = (\alpha_0 + B)e^{-bt} - B$ (б) от времени при $\varphi = 0$, $\alpha_0 < 0$, $\alpha_0 + B > 0$ (нижняя кривая).

Рис. 3. Зависимость коэффициента демпфирования тангажа от амплитуды колебаний при $\varphi = 0$, $\alpha_0 < 0$, $\alpha_0 + B > 0$.

При $\alpha_0 > 0$ функция $f(t) = (\alpha_0 + B)e^{-bt} - B$ имеет вид, указанный на рис. 4b (для переходного процесса, изображенного на рис. 4a). На участке затухания I

$$(\alpha_0 + B)e^{-bt} - B = \Theta$$

и выражение (10) запишется как (рис. 5, верхняя линия)

$$m_z^{\bar{\omega}_z} + m_z^{\bar{\alpha}} = \left(m_z^{\bar{\omega}_z} + m_z^{\bar{\alpha}} \right)_* - \frac{\tilde{m}_z}{\Theta k}. \quad (12)$$

Соответственно на участке II

$$(\alpha_0 + B)e^{-bt} - B = -\Theta$$

и коэффициент демпфирования тангажа будет иметь вид (рис. 5, нижняя линия):

$$\bar{m}_z^{\bar{\omega}_z} + m_z^{\bar{\alpha}} = \left(m_z^{\bar{\omega}_z} + m_z^{\bar{\alpha}} \right)_* + \frac{\tilde{m}_z}{\Theta k}.$$

На рис. 5 стрелки отображают характер изменения коэффициента демпфирования тангажа при изменении амплитуды колебаний. Переход с верхней ветки на нижнюю происходит скачком при нулевой амплитуде. Отметим, что аналогичные закономерности для аэродинамических производных имеют место при $\varphi = 180$ град.

Найдем теперь эквивалентный коэффициент демпфирования тангажа. Для этого приравняем коэффициент момента (9) эквивалентному коэффициенту:

$$m_{z_{st}}^{\alpha} \alpha + \left(m_z^{\bar{\omega}_z} + m_z^{\bar{\alpha}} \right)_* \bar{\alpha} - \frac{\tilde{m}_z}{f(t_{sr}) k} \bar{\alpha} = (m_z^{\alpha})_e \alpha + \left(m_z^{\bar{\omega}_z} + m_z^{\bar{\alpha}} \right)_e \bar{\alpha},$$

где t_{sr} — некоторый момент времени на выделенном участке переходного процесса ($N = 1-5$).

Учитывая, что $f(t_{sr}) = \pm \Theta_{sr}$, получим

$$\begin{aligned} (m_z^{\alpha})_e &= m_{z_{st}}^{\alpha}, \\ \left(m_z^{\bar{\omega}_z} + m_z^{\bar{\alpha}} \right)_e &= \left(m_z^{\bar{\omega}_z} + m_z^{\bar{\alpha}} \right)_* \pm \frac{\tilde{m}_z}{\Theta_{sr} k}. \end{aligned} \quad (13)$$

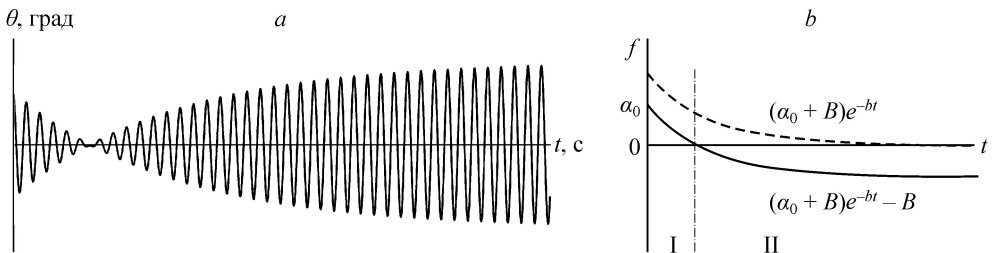


Рис. 4. Зависимость угла тангажа (a) и функции $f(t) = (\alpha_0 + B)e^{-bt} - B$ (b) от времени при $\varphi = 0$, $\alpha_0 > 0$ (нижняя кривая).

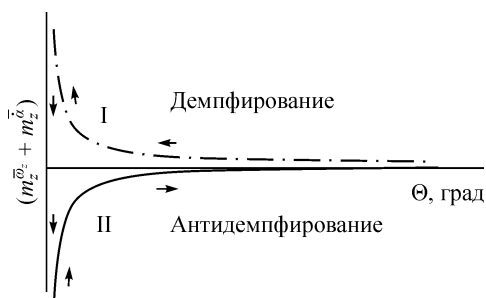


Рис. 5. Зависимость коэффициента демпфирования тангажа от амплитуды колебаний при $\varphi = 0$, $\alpha_0 > 0$.

В формуле (13) Θ_{sr} представляет своего рода среднюю амплитуду на выделенном участке. Поскольку она неизвестна, то везде при расчете эквивалентного коэффициента демпфирования тангажа принималась средней за рассматриваемый интервал времени:

$\Theta_{sr} = (\Theta_1 + \Theta_2)/2$, где Θ_1 и Θ_2 — соответственно начальная и конечная амплитуды колебаний на выделенном участке.

Расчеты показывают, что если брать малый выделенный интервал времени ($N = 1-5$), то эквивалентный коэффициент демпфирования тангажа очень близок к коэффициенту демпфирования тангажа. Таким образом, зависимость эквивалентного коэффициента демпфирования тангажа от амплитуды и приведенной частоты (13) представляет собой гиперболу.

Покажем, что для линейного осциллятора в зависимости $m_z(\alpha)$ на режиме установившихся колебаний отсутствует гистерезис. Для этого подставим в уравнение движения (2) вторую производную

$$\ddot{\alpha} = -\Theta p^2 \sin(pt - \psi) = -p^2 \alpha$$

от частного решения уравнения

$$\alpha = \Theta \sin(pt - \psi)$$

(при этом угол φ примем равным нулю) и получим

$$m_z = \frac{I_z \ddot{\alpha}}{qSl} = -\frac{I_z p^2}{qSl} \alpha, \quad (14)$$

что и требовалось доказать.

Далее выразим из выражения $k = \sqrt{\frac{-m_{zst}^\alpha qSl}{I_z}}$ момент инерции тела:

$$I_z = \frac{-m_{zst}^\alpha qSl}{k^2},$$

и, подставив его в (14), получим

$$m_z = m_{zst}^\alpha \frac{p^2}{k^2} \alpha.$$

Из этой формулы видно, что в случае совпадения частот вынужденных и собственных колебаний тела производная m_z^α будет равна статической производной m_{zst}^α (соответственно, квазистационарный коэффициент момента тангажа будет равен стационарному).

Рассмотрим вопросы моделирования автоколебаний тела с помощью ММ вынужденных колебаний линейного осциллятора.

Уравнения движения тела на установке свободных колебаний (1) в форме, удобной для численного интегрирования, выглядят следующим образом:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega_z, \quad (15)$$

$$\frac{d\omega_z}{dt} = m_z \left(\frac{\rho V^2}{2I_z} \right) Sl, \quad (16)$$

$$m_z = m_{z_{st}}^\alpha \alpha + \left(m_z^{\bar{\omega}_z} + m_z^{\bar{\alpha}} \right)_* \frac{\dot{\alpha} l}{V} + \tilde{m}_z \sin(pt + \varphi). \quad (17)$$

Исследования показали, что влияние момента сил трения в узле вращения незначительно, поэтому везде далее оно не учитывается. Отметим также, что обработка экспериментальных данных проводилась с учетом момента трения [7, 8].

В ММ неизвестны четыре параметра: $m_{z_{st}}^\alpha$, $\left(m_z^{\bar{\omega}_z} + m_z^{\bar{\alpha}} \right)_*$, $\tilde{m}_z$, φ . Производная $m_{z_{st}}^\alpha$ определялась линейной аппроксимацией зависимости квазистационарного коэффициента момента тангажа от угла атаки $m_{z_{kst}}(\alpha)$. Эта процедура дала значение $m_{z_{st}}^\alpha = -0,360$ 1/рад.

Для определения остальных параметров при $\varphi = 0$ и 180° можно использовать аппроксимацию экспериментальных данных аналитической зависимостью (13). Однако ввиду большого разброса данных (см. далее) точность такого подхода оказывается низкой. Поэтому параметры ММ подбирались из условия согласования расчетных и экспериментальных огибающих переходных процессов угла тангажа по времени для двух реализаций, соответствующих двум частотам колебаний (№ протоколов 4329 и 4326). Расчетные переходные процессы определялись посредством численного интегрирования уравнений движения (15) – (17) методом Рунге – Кутты четвертого порядка.

Параметры ММ, дающие удовлетворительное согласование данных (рис. 6), имеют значения:

$$\left(m_z^{\bar{\omega}_z} + m_z^{\bar{\alpha}} \right)_* = -0,225, \quad \tilde{m}_z = 0,0008, \quad \varphi = 180^\circ.$$

В дальнейших расчетах эти параметры были приняты постоянными и оптимальными, за исключением испытаний (№ протоколов 4157, 4160). Для этих испытаний расчетный угол φ , равный соответственно $\varphi = 60^\circ$ и 30° , подбирался индивидуально.

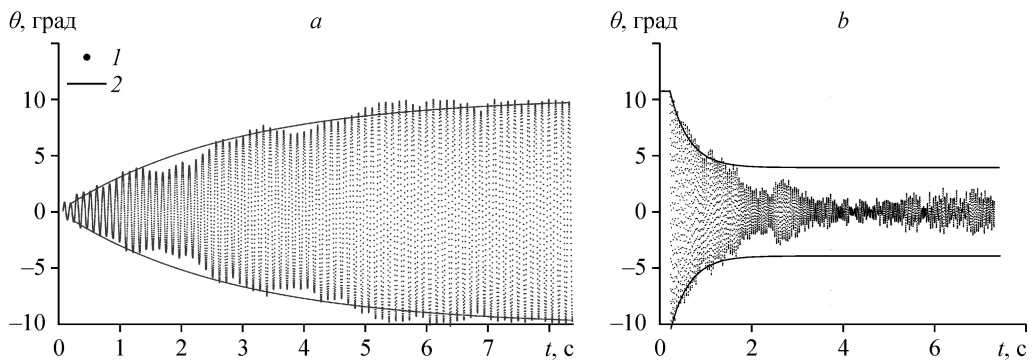
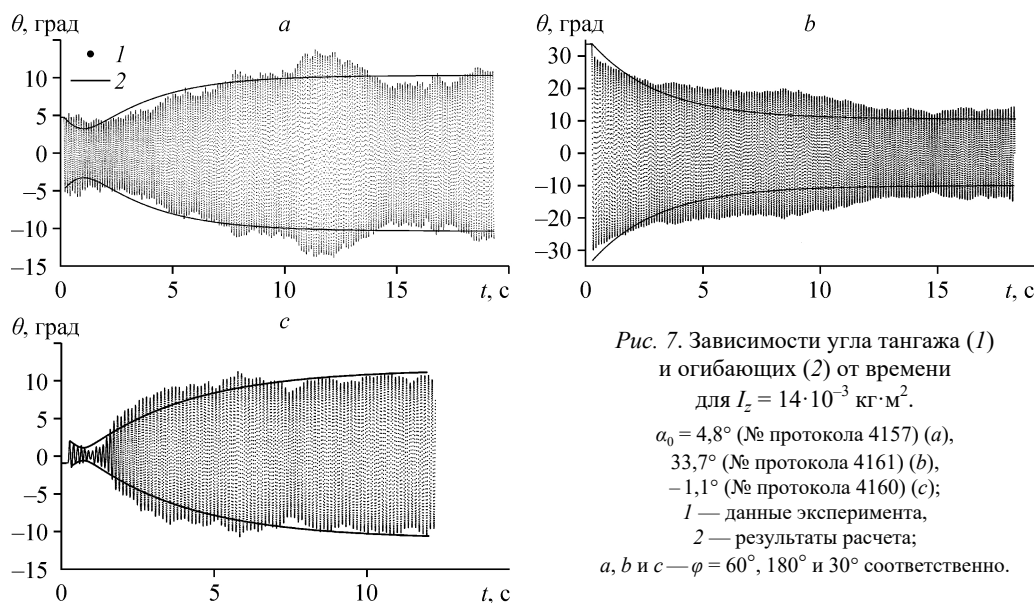


Рис. 6. Зависимости угла тангажа (1) и огибающих (2) от времени для $I_z = 14 \cdot 10^{-3}$ кг·м².

$\alpha_0 = -1,2^\circ$ (№ протокола 4329) (а), $10,8^\circ$ (№ протокола 4326) (б);
1 — данные эксперимента, 2 — результаты расчета; $\varphi = 180^\circ$.

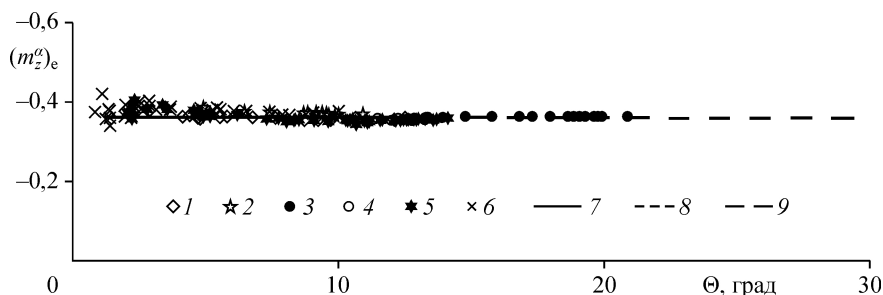


2. Результаты математического моделирования

На рис. 7 сопоставляются расчетные и экспериментальные огибающие переходных процессов угла тангажа по времени для некоторых других режимов. Согласование можно считать удовлетворительным. Следует отметить, что моделируются и эффекты затухания переходных процессов на начальных участках для некоторых испытаний (№ протоколов 4157, 4160) (рис. 7a, 7c).

Ниже рассматриваются различные расчетные аэродинамические характеристики коэффициента момента тангажа и в ряде случаев проводится их сравнение с экспериментальными.

На рис. 8, 9 для сравнения приведены эквивалентные аэродинамические производные тела. Можно отметить удовлетворительное согласование расчетных данных с экспериментальными. Обращает на себя внимание необычный характер зависимости эквивалентного коэффициента демпфирования тангажа от амплитуды колебаний для испытания (№ протокола 4157) (рис. 9b, $\varphi = 60^\circ$), который, тем не менее, также удовлетворительно моделируется (см. также рис. 7a).



1–5 — данные эксперимента, $I_z = 14 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ (соответственно № протоколов 4157, 4160, 4161, 4327, 4329);
6 — данные эксперимента, $I_z = 2,2 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ (№ протокола 4326);
7–9 — расчет соответственно для $I_z = 14 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ (№ протокола 4329), $2,2 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ (№ протокола 4326), $14 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ (№ протокола 4161); 1–3 — $N = 4, 5$; 4–9 — $N = 2-5$.

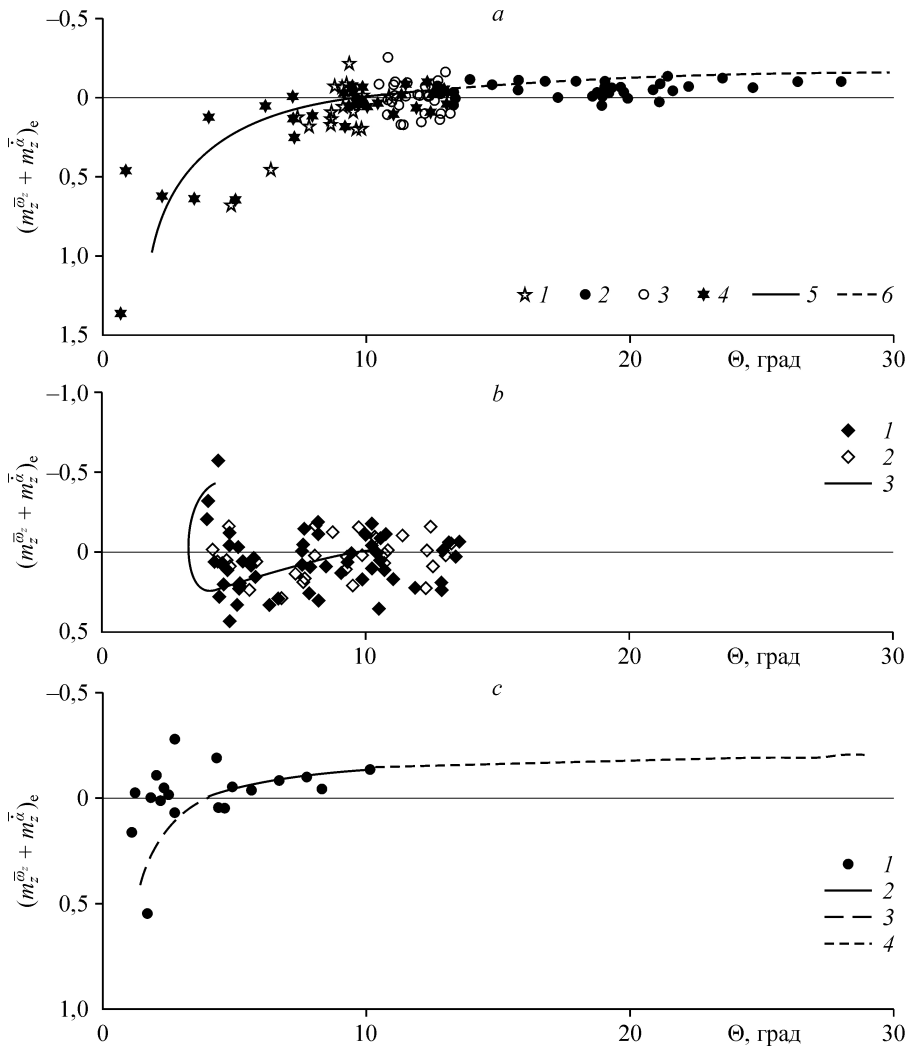


Рис. 9. Зависимости эквивалентного коэффициента демпфирования тангажа от амплитуды колебаний.

a — $I_z = 14 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$: 1–4 — эксперимент (соответственно № протоколов 4160, 4161, 4327, 4329), 5, 6 — расчет (№ протоколов 4329, 4161); 1, 2, 4 — $N = 4, 5$; 3, 5, 6 — $N = 2-5$;

b — $I_z = 14 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$: 1, 2 — данные эксперимента (№ протокола 4157) соответственно для $N = 2-5$ и $N = 4, 5$; 3 — результаты расчета (№ протокола 4157), $\varphi = 60^\circ$, $N = 2-5$;

c — $I_z = 2,2 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ (№ протокола 4326):

1 — данные эксперимента, $N = 4, 5$; 2 — результаты расчета, $N = 2-5$;

3, 4 — результаты расчета соответственно для начальных углов атаки $\alpha_0 = 1^\circ$ и 30° , $N = 2-5$.

Огибающие расчетных и экспериментальных зависимостей коэффициента момента тангажа от времени, а также квазистационарные значения коэффициента момента тангажа, соответствующие нулевой угловой скорости вращения тела (рис. 10), удовлетворительно согласуются между собой.

На рис. 11 приведены расчетные зависимости коэффициента момента тангажа от угла атаки. Для «тяжелой» модели эти данные взяты на режиме автоколебаний, а для «легкой» — на начальном участке. Нетрудно заметить, что для «тяжелой» модели коэффициент момента тангажа равен стационарному, что было доказано ранее аналитически. Для «легкой» модели направление обхода зависимости $m_z(\alpha)$ соответствует затуханию переходного процесса. На участке автоколебаний для этой модели наблюдаются

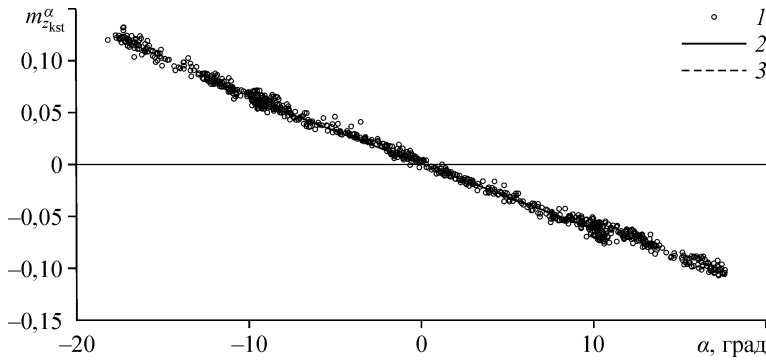


Рис. 10. Зависимость квазистационарного аэродинамического коэффициента $m_{z_{kst}}^{\alpha}$ от угла атаки.

1 — данные эксперимента, 2, 3 — результаты расчета для $I_z = 14 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ (№ протокола 4329) и $2,2 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ (№ протокола 4326).

те же закономерности, что и для «тяжелой» модели. Однако отметим, что сравнение результатов расчета и эксперимента (рис. 11а, 11с) ничего не дает ввиду тонкости эффектов и большого разброса экспериментальных данных.

С помощью ММ также исследовалось влияние приведенной частоты на амплитуду автоколебаний (рис. 12). Для этого были выполнены расчеты переходных процессов в широком диапазоне моментов инерции тела. Можно также аналитически установить эту зависимость. Для этого достаточно приравнять к нулю эквивалентный коэффициент демпфирования тангажа (13):

$$\left(m_z^{\bar{\omega}_z} + m_z^{\bar{\alpha}}\right)_e = \left(m_z^{\bar{\omega}_z} + m_z^{\bar{\alpha}}\right)_* + \frac{\tilde{m}_z}{\Theta_{\text{авт}} \bar{k}} = 0,$$

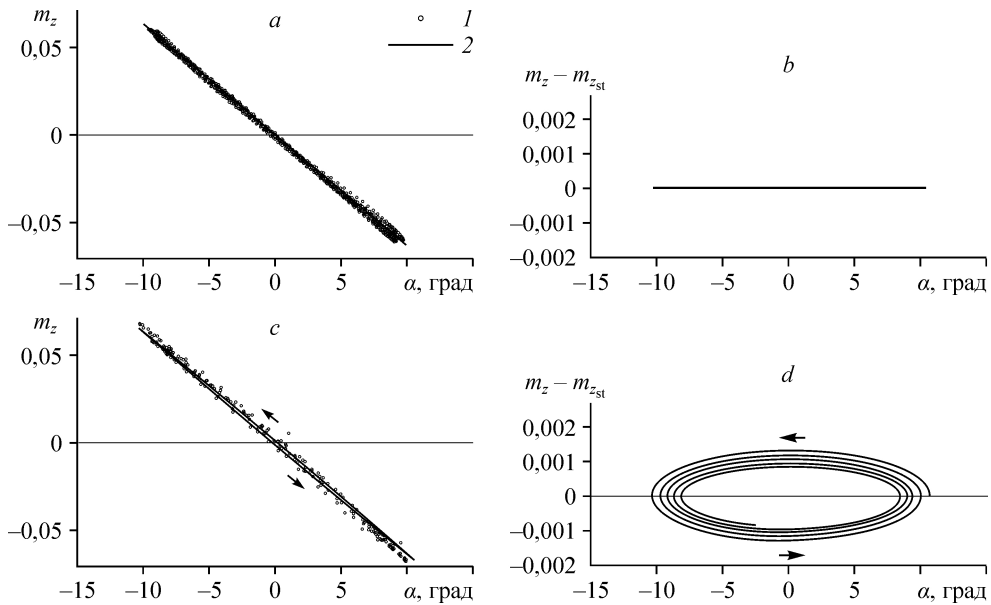


Рис. 11. Расчетные зависимости коэффициента момента тангажа и его составляющей от угла атаки.

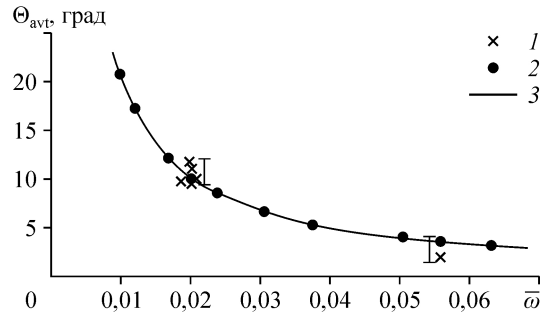
а, б — $I_z = 14,0 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ (№ протокола 4329), с, д — $I_z = 2,2 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$ (№ протокола 4326); 1 — данные эксперимента, 2 — результаты расчета.

Рис. 12. Зависимость амплитуды автоколебаний от приведенной частоты.

- 1 — данные эксперимента,
2 — результаты численного расчета,
3 — аналитическая зависимость.

тогда

$$\Theta_{\text{авт}} = - \frac{\tilde{m}_z}{\left(m_z^{\omega_z} + m_z^{\alpha} \right)_* \bar{k}}.$$



Таким образом, имеет место гиперболический закон зависимости амплитуды автоколебаний от приведенной частоты (рис. 12). Если рассматривать дорожку разброса данных для «тяжелой» модели (вертикальный маркер на рис. 12) в качестве критерия точности, то для «легкой» модели расчетная и экспериментальная амплитуды автоколебаний находятся в пределах этой дорожки.

На рис. 13 приведены расчетные амплитудно-частотные и фазо-частотные характеристики линейного осциллятора для двух моментов инерции тела, иллюстрирующие сущность ММ. На режимах автоколебаний тела амплитуды соответствуют резонансным значениям, а сдвиг фазы между коэффициентом момента тангажа $\tilde{m}_z \sin(pt + \varphi)$ и углом атаки $\alpha = B \sin(pt + \varphi - \psi)$ составляет $\psi = 90^\circ$.

В заключение следует отметить, что предложенная ММ и механизм самовозбуждающихся колебаний требуют дальнейшей экспериментальной проверки. Для этого целесообразно провести дополнительные испытания тела при других моментах инерции и сопоставить амплитуды автоколебаний с расчетными (рис. 12).

Заключение

Для моделирования свободных колебаний коническо-сферического тела по углу тангажа при числе Маха $M = 1,75$ и двух моментах инерции в работе использована математическая модель коэффициента момента тангажа, включающая гармоническую функцию времени с постоянной амплитудой и частотой, равной собственной частоте колебаний линейного осциллятора. Неизвестные параметры математической модели определялись из условия приемлемого согласования расчетных и экспериментальных огибающих переходных процессов угла тангажа по времени для двух испытаний с разными моментами инерции.

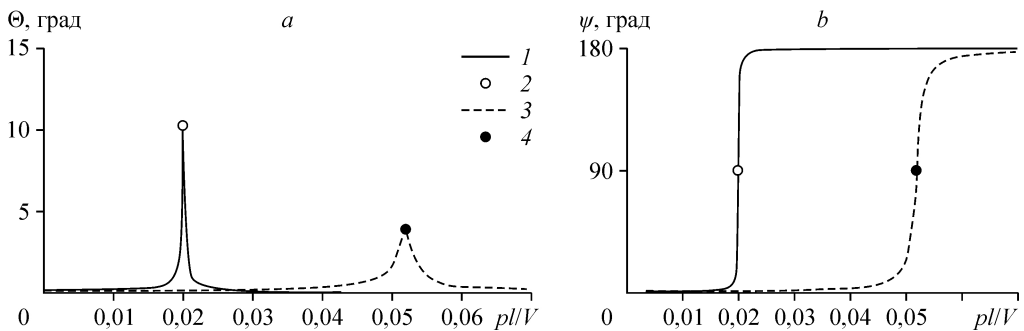


Рис. 13. Расчетные амплитудно-частотная (a) и фазо-частотная (b) характеристики линейного осциллятора.

1, 3 — соответственно $I_z = 14 \cdot 10^{-3}$ и $2,2 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$; 2, 4 — резонансные значения при $p/V = kl/V$.

Показано, что математическая модель удовлетворительно моделирует самовозбуждающиеся колебания тела и описывает интегральные аэродинамические характеристики, в частности, зависимость эквивалентного коэффициента демпфирования тангажа от амплитуды колебаний.

Рассмотренный в работе механизм самовозбуждающихся колебаний коническо-сферического тела и его математическая модель требуют дополнительной экспериментальной проверки.

Автор выражает благодарность Н.П. Адамову, Н.А. Мищенко и М.В. Чистякову, принявшим участие в подготовке и проведении экспериментов.

Список литературы

1. Kazemba C.D., Braun R.D., Clark L.G., Schoenenberger M. Survey of blunt body supersonic dynamic stability // J. of Spacecraft and Rockets. 2017. Vol. 54, No 1. P. 109–127.
2. Федяевский К.К., Блюмина Л.Х. Гидродинамика отрывного обтекания. М.: Машиностроение, 1977. 120 с.
3. Adcock J.B. Some experimental relations between the static and dynamic stability characteristics of sting-mounted cones with bulbous bases // Transactions of the 3rd Technical Workshop on Dynamic Stability Problems. Paper 5. Vol. II, NASA Ames Research Center, Moffett Field, Calif., Nov., 1968.
4. Adamov N.P., Chasovnikov E.A. Self-induced oscillations of a cone with a hemispherical rear part at low supersonic velocities // American Institute of Physics Conf. Proceedings. 2018. Vol. 2027. P. 030150-1–030150-5.
5. Abe T., Sato S., Matsukawa Y., Yamamoto K., Hiraoka K. Study for dynamically unstable motion of reentry capsule // The Institute of Space and Astronautical Sci. Report SP No. 17. 2003. P. 301–332.
6. Chasovnikov E.A. Mathematical modeling of self-induced oscillations of a segmental-conical body with free movement in the pitch angle // American Institute of Physics Conf. Proceedings 2351. 2021. P. 030073-1 – 030073-22.
7. Часовников Е.А., Часовников С.А. Методы определения эквивалентного аэродинамического демпфирования моделей спускаемых аппаратов при испытаниях на установке свободных колебаний // Теплофизика и аэромеханика. 2019. Т. 26, № 1. С. 1–8.
8. Часовников Е.А. Особенности аэродинамического момента и демпфирования тангажа модели возвращаемого аппарата при свободных колебаниях на сверхзвуковых скоростях // Теплофизика и аэромеханика. 2020. Т. 27, № 3. С. 347–355.
9. Часовников Е.А., Часовников С.А. О критериях подобия при экспериментальном моделировании движения летательных аппаратов с помощью маломасштабных моделей // Теплофизика и аэромеханика. 2017. Т. 24, № 1. С. 1–6.

*Статья поступила в редакцию 17 марта 2023 г.,
после доработки — 26 июля 2023 г.,
принята к публикации 17 августа 2023 г.*