

AMS subject classification: 35L04, 65M08, 92B20

Функция плотности вероятности модели с утечками “интегрировать-и-сработать” с шумом Леви и ее численная аппроксимация

П. Сингх¹, М.К. Кадалбаджоо², К. Шарма³

¹School of Mathematics and Computer Applications, Thapar University, Patiala, India

²Department of Mathematics and Statistics, Indian Institute of Technology, Kanpur, India

³Department of Mathematics, South Asian University, New Delhi, India

E-mails: paramjeet.singh@thapar.edu (Сингх П.), kadal@iitk.ac.in (Кадалбаджоо М.К.), kapil.sharma@sau.ac.in (Шарма К.)

Сингх П., Кадалбаджоо М.К., Шарма К. Функция плотности вероятности модели с утечками “интегрировать-и-сработать” с шумом Леви и ее численная аппроксимация // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2016. — Т. 19, № 1. — С. 87–96.

В данной статье исследуется численный анализ модели с утечками “интегрировать-и-сработать” с шумом Леви. Рассматривается нейронная модель, в которой функция плотности вероятности нейрона в некотором потенциале в любое время моделируется с помощью уравнения переноса. Шум Леви включен вследствие скачков импульсов возбуждения и запрета. Благодаря этим скачкам полученное в результате уравнение переноса содержит два интеграла (скачка) в правой части. Разработаны, реализованы и проанализированы некоторые численные методы конечно-объемного типа; также включены некоторые численные примеры.

DOI: 10.15372/SJNM20160107

Ключевые слова: модель с утечками “интегрировать-и-сработать”, уравнение переноса, конечно-объемная аппроксимация, шум Леви.

Singh P., Kadalbajoo M.K., Sharma K. Probability density function of leaky integrate-and-fire model with Lévy noise and its numerical approximation // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2016. — Vol. 19, № 1. — P. 87–96.

We investigate a numerical analysis of a leaky integrate-and-fire model with Lévy noise. We consider a neuron model in which the probability density function of a neuron in some potential at any time is modeled by a transport equation. Lévy noise is included due to jumps by excitatory and inhibitory impulses. Due to these jumps the resulting equation is a transport equation containing two integrals in the right-hand side (jumps). We design, implement, and analyze numerical methods of finite volume type. Some numerical examples are also included.

Keywords: *Leaky integrate-and-fire model, transport equation, finite volume approximation, Lévy noise.*

1. Введение

Уравнение “интегрировать-и-сработать” было предложено в 1907 г. Лапиком (Lapicque [1]) как простая модель нейронной активности. В этой модели при введении входного тока напряжение мембраны увеличивается со временем до достижения постоянного порога, в этот момент возникает скачок в виде дельта-функции и напряжение сбрасывается на его потенциал покоя. После этого модель продолжает работать. Таким образом, частота срабатывания модели линейно увеличивается неограниченно по мере

увеличения входного тока, после рефрактерного периода, ограничивающего частоту срабатывания нейрона, не давая ему срабатывать во время этого периода. Другой недостаток этой модели состоит в том, что в ней не реализуется память, зависящая от времени. Если модель в какое-то время получит сигнал ниже порога, она будет сохранять это добавочное напряжение до тех пор, пока она снова не работает. Очевидно, что эта особенность не соответствует наблюдаемому поведению нейронов. В модели “интегрировать-и-сработать” с утечками проблема памяти решается путем добавления члена “утечки” к потенциалу мембраны, отражая диффузию ионов через мембрану в тех случаях, когда в ячейке нет равновесия [2].

Модель нейронов “интегрировать-и-сработать” приобрела широкое признание как одна из канонических моделей для изучения нейронных систем. Она дает хорошее описание подпороговой интеграции синаптических входов в масштабе времени, который является медленным по сравнению с быстрой генерацией скачков. В большинстве нейронных моделей, изучавшихся аналитически в теоретической нейрологии, рассматривался только случай однородного во времени синаптического входа, для которого существует ряд хорошо развитых математических методов (их обзор можно найти в статье Баркитта [3]). Эволюция функции плотности вероятности $p(t, v)$ для популяции нейронов “интегрировать-и-сработать” с утечками проходит в соответствии с законами сохранения, и ее можно записать в виде зависящего от времени гиперболического уравнения в частных производных первого порядка.

Более чем через 100 лет после введения модели “интегрировать-и-сработать” в статье (Lapicque, 1907) она остается одной из самых распространенных моделей для моделирования и анализа динамики нейронных сетей [3]. Модель предлагает значительное упрощение сложных клеточных процессов, при помощи которых нейрон обрабатывает поступающую информацию [4, 5]. Однако, несмотря на свою минималистическую природу, она описывает некоторые важные черты нейронной динамики. Многочисленные вариации модели использовались для моделирования реакции единичных клеток, а также нейронных сетей разнообразных форм и размеров.

В новейших научных исследованиях общий нейрон “интеграции-и-срабатывания” управляется вводом стохастического постоянного тока. Это есть модель нейрона, получающего большое число слабых синаптических входов [3, 5]. Это лишь один из нескольких примеров аналитически обрабатываемой стохастической модели биофизического нейрона. Она успешно использовалась для моделирования и объяснения ряда явлений, экспериментально наблюдаемых в нейронной ткани [6–8]. Поведение единичной модели “интегрировать-и-сработать” со стационарным стохастическим вводом было довольно хорошо понято Баркиттом и Таквеллом [3, 9]. Однако численное моделирование все же необходимо для определения правильности аппроксимаций, используемых в тех случаях, которые могут рассматриваться лишь с помощью малых возмущений или не поддаются аналитической обработке [10, 11]. Классическое описание динамики большого множества нейронов основано на детерминистических/стохастических дифференциальных системах для нейронных сетей возбуждения–запрета [1, 5].

2. Модель с утечками “интегрировать-и-сработать” с шумом Леви

В детерминистических моделях “интегрировать-и-сработать” с утечками или классических моделях “интегрировать-и-сработать” для сетей возбуждения вероятность $p(t, v)$ нейрона в потенциале v во время t задается как

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial v}[(-v + I(t))p(t, v)] &= N(t)\delta(v = V_R), \quad v \leq V_F, \\ p(t, V_F) &= 0, \\ p(t, -\infty) &= 0, \\ N(t) &= (-V_F + I(t))p(t, V_F) \geq 0, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где $I(t)$ — заданная интенсивность входного тока, $I(t)$ задается суммой периодического входного сигнала и постоянного тока, т. е.

$$I(t) = I_0(1 + m \cos(\Omega t)),$$

где $\Omega = 2\pi/T$ (T — период сигнала), $N(t)$ — число возбужденных нейронов во время t (скорость срабатывания). При отсутствии значительных связей между нейронами потенциал нейронов считается потенциалом покоя $v = 0$. Когда потенциал достигает потенциала срабатывания V_F , нейрон подвергается действию разряда и устанавливается в исходное состояние V_R [12–15]. Согласно обычным экспериментальным данным,

$$0 < V_R < V_F.$$

Уравнение модели в (2.1) имеет предел при $A \rightarrow \infty$ в следующем уравнении:

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial v}[(-v + I(t))p(t, v)] + A 1_{v \geq V_F} p(t, v) = N(t)\delta(v = V_R), \quad v \in \mathbb{R}. \quad (2.2)$$

Скачки в (2.2) включены как импульсы возбуждения и задержки. Рассмотрим модель нейронов, в которой вероятность $p(t, v)$ нейрона в потенциале v в любое время t задается следующим уравнением:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial v}[(-v + I(t))p(t, v)] + A 1_{v \geq V_F} p(t, v) &= \int [p(t, v + \alpha) - p(t, v)]M^+(\alpha) d\alpha + \\ &+ \int [p(t, v - \beta) - p(t, v)]M^-(\beta) d\beta + N(t)\delta(v = V_R), \quad v \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ p(0, v) = p^0(v) \geq 0, \quad \int p^0(v) dv &= 1, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где α — добавление напряжения вследствие импульсов возбуждения, β — уменьшение напряжения вследствие импульсов задержки. Интенсивность этих импульсов определяется функциями $M^+(\alpha)$ и $M^-(\beta)$, которые являются заданными внешними вводами, обусловленными шумом в сети. Эти меры Леви являются ограниченными. Запишем F для потока: $F = (-v + I(t))p(t, v)$, $\Pi^+(p)$ для положительного скачка Леви, $\Pi^-(p)$ для отрицательного скачка Леви. Мы можем считать эти меры гауссовыми: $M^+(\alpha) = e^{-\alpha^2/2}$ и т. д.

Скорость срабатывания задается следующим образом:

$$N(t) := A \int_{V_F}^{\infty} p(t, v) dv. \quad (2.4)$$

Интегрируя уравнение (2.3) по \mathbb{R} , мы получим

$$\frac{d}{dt} \int_{v \in \mathbb{R}} p(t, v) dv + A \int_{V_F}^{\infty} p(t, v) dv = N(t).$$

Определение $N(t)$ предполагает, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(t, v) dv = 1. \quad (2.5)$$

Это линейная версия модели с утечками “интегрировать-и-сработать” с шумом Леви. Возможная нелинейность является результатом того, что $I(t)$ зависит от общей активности сети, т. е.

$$I(t) = I_0 + aN(t).$$

3. Численные аппроксимации

В настоящее время обыкновенные дифференциальные уравнения с разностными членами (задержками) достаточно хорошо изучены, однако нет соизмеримой теории для дифференциальных уравнений в частных производных (т. е. для неизвестных, зависящих от времени и пространства). Математическая модель, полученная из модели нейронной изменчивости, которая представляет собой обыкновенное дифференциальное уравнение с поточечной задержкой, рассматривалась несколькими исследователями [16, 17].

В данном пункте численный метод строится на основе конечно-объемных аппроксимаций [18, 19]. Хотя обыкновенные дифференциальные уравнения с разностными членами (задержками) достаточно хорошо изучены, нет соизмеримой теории для дифференциальных уравнений в частных производных (т. е. для неизвестных, зависящих от времени и пространства). Прокомментируем некоторые свойства уравнения (2.3):

1. Уравнение является линейным и находится в консервативной форме.
2. Для членов шума

$$|\Pi^+(p)|^2 \leq \left(\int p(t, v - \alpha) M^-(\alpha) d\alpha \right)^2 \leq \int p^2(t, v - \alpha) d\alpha \int M^{-2}(\alpha) d\alpha \leq \|p\|_{L^2}.$$

3. Мы используем локализацию, т. е. $p(t, v) = 0 \quad \forall v \geq |V|$.

Численные схемы строятся на основе конечно-объемных аппроксимаций Лакса–Фридрикса [20, 21]. Пусть область, представляющая для нас интерес, — это $\Omega = [-V, V]$. Для аппроксимаций времени–напряжения плоскость (t, v) дискретизируется, если взять размер сетки Δv , временной шаг Δt и определить точки сетки (t_n, v_j) следующим образом:

$$t_n = n\Delta t, \quad n = 0, 1, \dots; \quad v_j = j\Delta v, \quad j = -J, -J + 1, \dots, J - 1, J.$$

Найдем приближенное численное решение P_j^n , аппроксимирующее $p(t_n, v_j) \quad \forall n, j$. Здесь P_j^n — приближенное решение на временном уровне n в центре ячейки j ширины Δv , определяемое как

$$P_j^n = \frac{1}{\Delta v} \int_{v_{j-1/2}}^{v_{j+1/2}} p(t_n, v) dv.$$

Замыкание области $\Omega_{\Delta v} = (v_j = j\Delta v, \quad j = -J + 1, -J + 2, \dots, J - 2, J - 1)$ обозначим $\bar{\Omega}_{\Delta v}$: $\bar{\Omega}_{\Delta v} = (v_j = j\Delta v, \quad j = -J, -J + 1, \dots, J - 1, J)$.

С использованием конечно-объемной аппроксимации численная схема задается следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{P_j^{n+1} - P_j^n}{\Delta t} + \frac{1}{\Delta x} [F(P_j^n, P_{j+1}^n) - F(P_{j-1}^n, P_j^n)] + A 1_{v_j \geq V_F} P_j^n \\ = N(t_n) \delta(v_j = V_R) + \Pi^+(P_j^n) + \Pi^-(P_j^n). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Значения потока задаются следующим образом:

$$F(P_j^n, P_{j+1}^n) = \frac{-v_j P_j^n - v_{j+1} P_{j+1}^n}{2} - \frac{|\max(v_{j+1/2}, \varepsilon)|}{2} (P_{j+1}^n - P_j^n) + I(t_n) \left[\frac{P_j^n + P_{j+1}^n}{2} \right],$$

$$N(t_n) = \sum_{V_F}^V P_j^n \Delta v.$$

Аппроксимируем интеграл при помощи формулы средней точки:

$$\begin{aligned} \Pi^+(P_j^n) &= \int p(t, v + \alpha) M^+(\alpha) d\alpha - p(t, v) \int M^+(\alpha) d\alpha \\ &\approx \Delta\alpha \sum_{k=-K}^{k=K} P(t_n, v_j + \alpha_k) M^+(\alpha_k) - P_j^n C. \end{aligned}$$

Аналогичным образом

$$\Pi^-(P_j^n) \approx \Delta\beta \sum_{k=-K}^{k=K} P(t_n, v_j - \beta_k) M^-(\beta_k) - P_j^n C.$$

Зададим численную аппроксимацию следующим образом:

$$\begin{aligned} P_j^{n+1} &= P_j^n - \frac{\Delta t}{\Delta v} [F(P_j^n, P_{j+1}^n) - F(P_{j-1}^n, P_j^n)] - A\Delta t \mathbf{1}_{v_j \geq V_F} P_j^n + N(t_n) \mathbf{1}_{v_j = V_R} + \\ &\quad \Delta t \Pi^+(P_j^n) + \Delta t \Pi^-(P_j^n). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Здесь заданные меры могут быть аппроксимированы на большом расстоянии нулем. Продолжим P_j^n нулем также для численных вычислений.

Мы можем взять M^+ равномерной на $[0, V_1]$ при $V_1 = V_F - V_R$ (чтобы зафиксировать идею). Для функции Дирака мы просто помещаем член в правой части V_R с правильным весом, чтобы имело место сохранение массы.

Начальные и граничные условия задаются следующим образом:

$$P_j^0 = P^0(v_j) \quad \forall j = -J + 1, \dots, J - 1, \quad (3.3a)$$

$$P_{-J}^n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (3.3б)$$

$$P_J^n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots. \quad (3.3в)$$

Здесь заданные меры могут быть аппроксимированы на большом расстоянии нулем. Продолжим P_j^n нулем для численных вычислений.

Численная схема Лакса–Фридрихса (3.2) является консервативной. Отметим, что метод Лакса–Фридрихса хорошо предсказывает распространение ударной волны при значительном размывании разрыва вследствие высокой вязкости, тогда как схема против потока предсказывает устойчивое решение, не меняющееся со временем. В данном случае основной причиной того, что схема Лакса–Фридрихса превосходит схему против потока, является то, что она имеет консервативный вид. Численная схема для закона сохранения $u_t + (f(u))_x = 0$ считается консервативной, если ее можно записать в виде

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \left(F_{j+1/2}^n - F_{j-1/2}^n \right),$$

где $F_{j+1/2}^n$ называется численным потоком, который является, в некотором смысле, аппроксимацией потока $f(u)$ на поверхности раздела между ячейками $x_{j+1/2} = x_j + \Delta x/2$. Следует отметить, что формула для потока Лакса–Фридрихса на поверхности раздела $j + 1/2$ представляет собой среднее левого и правого потоков: $f(u_j)$, $f(u_{j+1})$ плюс центральная разность $u_{j+1} - u_j$, что свидетельствует о наличии диффузионного члена.

Таким образом, схему Лакса–Фридрихса можно считать дискретным вариантом диффузионного уравнения. В имеющейся литературе показано, что если численная схема для закона сохранения является согласованной, устойчивой и консервативной, то полученное в результате численное решение сходится к слабому решению закона сохранения [20]. Присутствие источника не делает схему неустойчивой, оно влияет лишь на вид постоянной устойчивости.

4. Результаты вычислений и их обсуждение

Рассмотрим и решим некоторые тестовые примеры с использованием методов, представленных в данной статье. Максимальные абсолютные ошибки для этих примеров вычисляются с помощью принципа дробления сетки [22].

4.1. Численные примеры

Возьмем гауссовы начальные данные

$$p_0(v) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{(v-\mu)^2}{2\sigma^2}\right]$$

и выполним численные вычисления. Возьмем также область $[-4, 4]$ и $A = 5$. Выбор области для α и β : $[-3, 3]$. Значения $M^+(\alpha)$ и $M^+(\beta)$ также представлены в виде гауссовых начальных данных, но они центрированы при $v = 0$. Значение интенсивности $I(t) = 1 + \cos(2\pi t)$, а дисперсия берется равной 1.

На рис. 4.1 представлено решение при $t = 0.5$, где $V_R = 1.0$ и $V_F = 2.0$. Численное решение центрировано при $v = 1$.

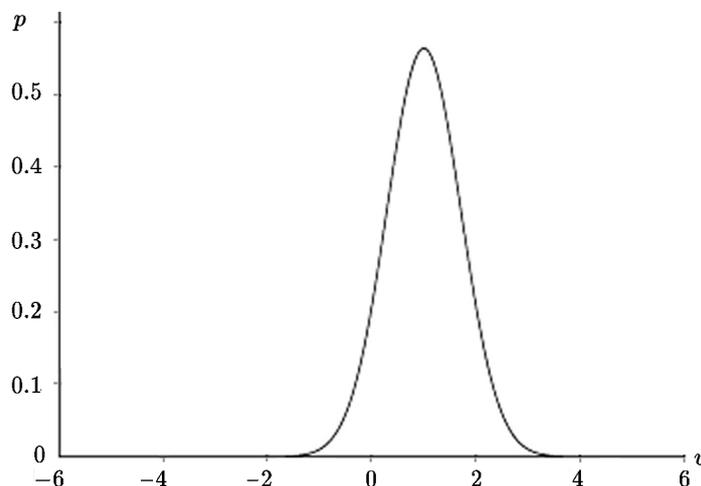


Рис. 4.1. Численное решение при $t = 0.5$

На рис. 4.2 график решения получен при различных начальных данных, центрированных при 0.0, 1.0 и 1.5 (из левой в правую часть соответственно).

Рис. 4.3 показывает приближенное решение на различных временных уровнях с начальными данными, центрированными при $v = 1.0$. Выбор V_R и V_F такой же, как указано выше. Число Куранта берется равным 0.2.

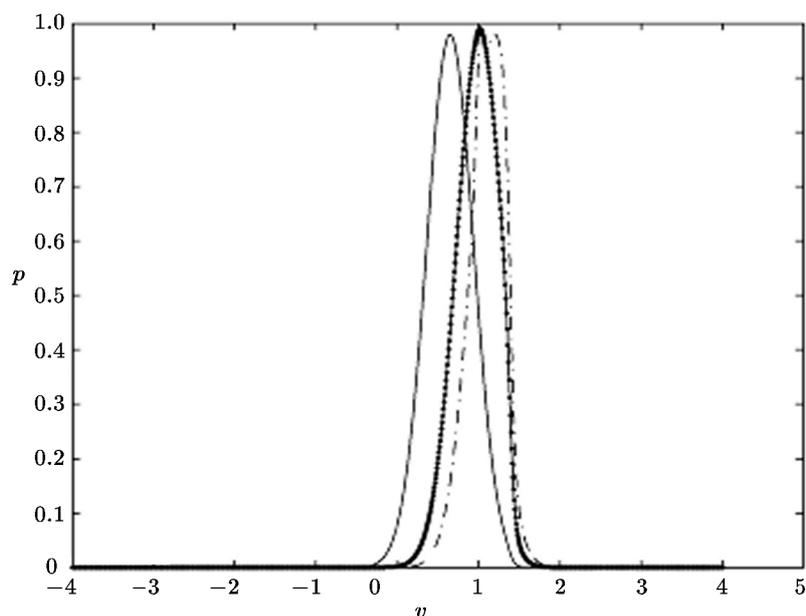


Рис. 4.2. Численное решение при различных начальных значениях

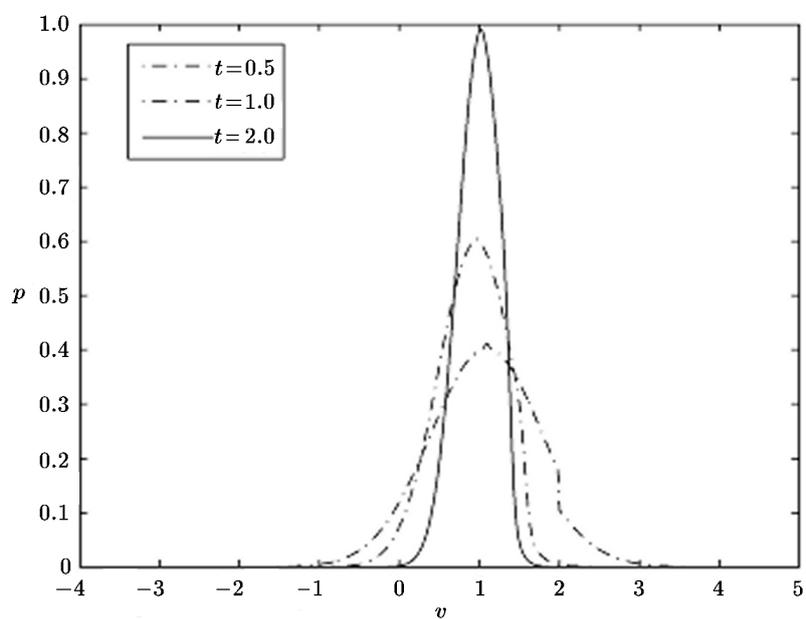


Рис. 4.3. Численное решение на различных временных уровнях

На рис. 4.4 численное решение получено при различных значениях сброса: 0.5 (для левого графика) и 1.0 (для правого графика). Небольшой излом на вершине графика ожидаем ввиду присутствия в источнике дельта-функции Дирака.

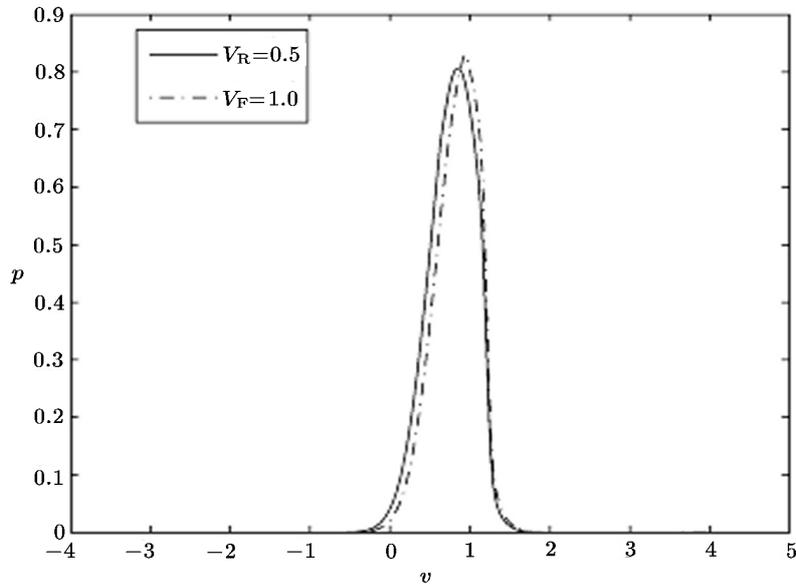


Рис. 4.4. Численное решение для различных значениях сброса потенциала

В двух таблицах ошибок указаны различные начальные данные, центрированные при 0 и 1 соответственно. Эти таблицы показывают почти линейную сходимость численной аппроксимации.

Таблица 4.1. Максимальная абсолютная ошибка, полученная с использованием схемы Лакса–Фридрихса с начальными данными, центрированными при 0

Δt	Δx			
	1/100	1/200	1/400	1/800
$\Delta x/2$	0.053308	0.026327	0.013097	0.006541
$\Delta x/4$	0.027900	0.013334	0.006577	0.003274
$\Delta x/8$	0.017055	0.006971	0.003333	0.001644
$\Delta x/16$	0.013255	0.004274	0.001742	0.000833

Таблица 4.2. Максимальная абсолютная ошибка, полученная с использованием схемы Лакса–Фридрихса с начальными данными, центрированными при 1

Δt	Δx			
	1/100	1/200	1/400	1/800
$\Delta x/2$	0.052293	0.024324	0.011386	0.006378
$\Delta x/4$	0.025569	0.012229	0.006189	0.003127
$\Delta x/8$	0.016044	0.006547	0.003267	0.001463
$\Delta x/16$	0.011247	0.004084	0.001432	0.000967

5. Выводы

Рассмотрено уравнение переноса нейронной модели, основанное на модели “интегрировать-и-сработать” с утечками. Взята нейронная модель с шумом Леви. На основе конечно-объемной численной аппроксимации Лакса–Фридрихса построена численная схема для получения приближенного решения модели с утечками “интегрировать-и-сработать” с шумом Леви. Для численных вычислений использованы гауссовы начальные

данные также для членов шума. Рисунки показывают, что небольшой излом на вершине графика ожидаем из-за присутствия в источнике дельта-функции Дирака в уравнении переноса. Данное исследование показало, что модель сохраняет принцип сохранения и что общая вероятность сконцентрирована у значения сброса потенциала.

Благодарности. Авторы благодарят профессоров Бенуа Пертхама и Эдвигу Годлевски из лаборатории Жака-Луи Лионса Университета Пьера и Марии Кюри (Париж, Франция) за полезные обсуждения и комментарии относительно включения шума в модель.

Литература

1. **Lapicque L.** Recherches quantitatives sur l'excitation électrique des nerfs traitée comme une polarization // *J. Physiol. Pathol. Generale.* — 1907. — № 9. — P. 620–635.
2. **Koch C., Segev I.** *Methods in Neuronal Modeling: From Ions to Networks*, second edition. — Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 1998.
3. **Burkitt A.N.** A review of the integrate-and-fire neuron model: I. Homogeneous synaptic input // *Biol. Cybern.* — 2006. — Vol. 95, iss. 1. — P. 1–19.
4. **Rall W.** *The Theoretical Foundation of Dendritic Function: Selected Papers of Wilfrid Rall with Commentaries.* — Boston: MIT Press, 1995.
5. **Tuckwell H.C.** *Introduction to Theoretical Neurobiology.* — Cambridge: Cambridge University Press, 1988.
6. **Brunel N., Hakim V.** Fast global oscillations in networks of integrate-and-fire neurons with low firing rates // *Neural Comput.* — 1999. — Vol. 11. — 1621–1671.
7. **Doiron B.M., Chacron M.J., Maler L., Longtin A., and Bastian J.** Inhibitory feedback required for network oscillatory responses to communication but not prey stimuli // *Nature.* — 2003. — Vol. 421(6922). — P. 539–543.
8. **Mattia M., Del Giudice P.** Finite-size dynamics of inhibitory and excitatory interacting spiking neurons // *Phys. Rev. E.* — 2004. — Vol. 70, iss. 5. — P. 052903–1–4.
9. **Tuckwell H.C.** *Stochastic Processes in the Neurosciences.* — Philadelphia: SIAM, 1989.
10. **Brunel N., Chance F.S., Fourcaud N., and Abbott L.F.** Effects of synaptic noise and filtering on the frequency response of spiking neurons // *Phys. Rev. Lett.* — 2001. — Vol. 86. — P. 2186–2189.
11. **Lindner B., Schimansky-Geier L.** Transmission of noise coded versus additive signals through a neuronal ensemble // *Phys. Rev. Lett.* — 2001. — Vol. 86. — P. 2934–2937.
12. **Pakdaman K.** Periodically forced leaky integrate-and-fire model // *Phys. Rev. E.* — 2001. — Vol. 63, iss. 4, id. 041907. — <http://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevE.63.041907>
13. **Pakdaman K., Perthame B., and Salort D.** Dynamics of a structured neuron population // *Nonlinearity.* — 2010. — Vol. 23, iss. 1. — P. 55–75.
14. **Pham J., Pakdaman K., Champagnat J., and Vibert J.-F.** Activity in sparsely connected excitatory neural networks: effect of connectivity // *Neural Networks.* — 1998. — Vol. 11, iss. 3. — P. 415–434.
15. **Pham J., Pakdaman K., and Vibert J.-F.** Noise-induced coherent oscillations in randomly connected neural networks // *Phys. Rev. E.* — 1998. — Vol. 8, iss. 3. — P. 3610–3622.
16. **Kadalbajoo M.K., Sharma K.K.** Numerical treatment of a mathematical model arising from a model of neuronal variability // *J. Math. Anal. Appl.* — 2005. — Vol. 307, iss. 2. — P. 606–627.

17. **Kadalbajoo M.K., Sharma K.K.** An exponentially fitted finite difference scheme for solving boundary-value problems for singularly-perturbed differential-difference equations: small shifts of mixed type with layer behavior // J. Comput. Anal. Appl. — 2006. — Vol. 8, iss. 2. — P. 151–171.
18. **LeVeque R.J.** Numerical Methods for Conservation Laws, Lectures in Mathematics, ETH Zürich. — Basel: Birkhäuser, 1999.
19. **Morton K.W., Mayers D.F.** Numerical Solution of Partial Differential Equations, second edition. — Cambridge: Cambridge University Press, 2005.
20. **LeVeque R.J.** Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems. — Cambridge: Cambridge University Press, 2002.
21. **Toro E.F.** Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics: A Practical Introduction. — Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1999.
22. **Doolan E.P., Miller J.J.H., and Schilders W.H.A.** Uniform Numerical Methods for Problems with Initial and Boundary Layers. — Dublin: Boole Press, 1980.

Поступила в редакцию 25 января 2015 г.