УДК 539.375

ПОЛЗУЧЕСТЬ ЗАЩЕМЛЕННЫХ ПЛАСТИН ПРИ РАЗЛИЧНЫХ СТРУКТУРАХ АРМИРОВАНИЯ

Ю. В. Немировский

Институт теоретической и прикладной механики им. С. А. Христиановича СО РАН,
630090 Новосибирск
E-mail: nemirov@itam.nsc.ru

На основе теории старения в формулировке Ю. Н. Работнова разработан единый подход к исследованию процесса ползучести защемленных по контуру пластин с разнообразными структурами армирования. В декартовой и полярной системах координат рассмотрен широкий класс прямолинейных и криволинейных структур армирования. Для этих структур выведены уравнения увеличения прогибов вследствие ползучести и уравнения для определения предельно допустимых времен эксплуатации.

Ключевые слова: пластины, ползучесть, изгиб, армированные структуры, теория старения, время разрушения.

В различных изделиях современного машиностроения, судостроения и авиакосмической техники широко используются плоские конструкции из армированных металлов и пластиков. При больших амплитудах термосиловых нагрузок в таких конструкциях интенсивно развиваются процессы ползучести, что приводит к необходимости поиска путей снижения деформативности и предотвращения преждевременного разрушения конструкций. Наиболее естественный способ решения этих проблем заключается в подборе подходящих материалов и поиске рациональных структур армирования. Плоская пластина заданной геометрической формы может быть армирована в плоскости бесконечным разнообразием прямолинейных или криволинейных волокон [1].

Рассматривая далее задачи поперечного изгиба армированных пластин, будем считать, что эти пластины состоят из слоев, симметрично армированных относительно срединной поверхности $z = 0$. Полагаем, что в каждом слое волокна имеют постоянное поперечное сечение и различные механические свойства. Тогда в криволинейной системе координат (α_1, α_2) связь между плотностью ω_i и углом траектории армирования φ_i в i-м слое пластины определяется уравнением [2]

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\,(H_2\omega_i\cos\varphi_i) + \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\,(H_1\omega_i\sin\varphi_i) = 0,$$

где H_1, H_2 — параметры Ламе.

В случае армирования по координатным линиям имеем

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\,(H_2\omega_{1i}) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial\alpha_2}\,(H_1\omega_{2i}) = 0,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12-01-90405-Укр_а).

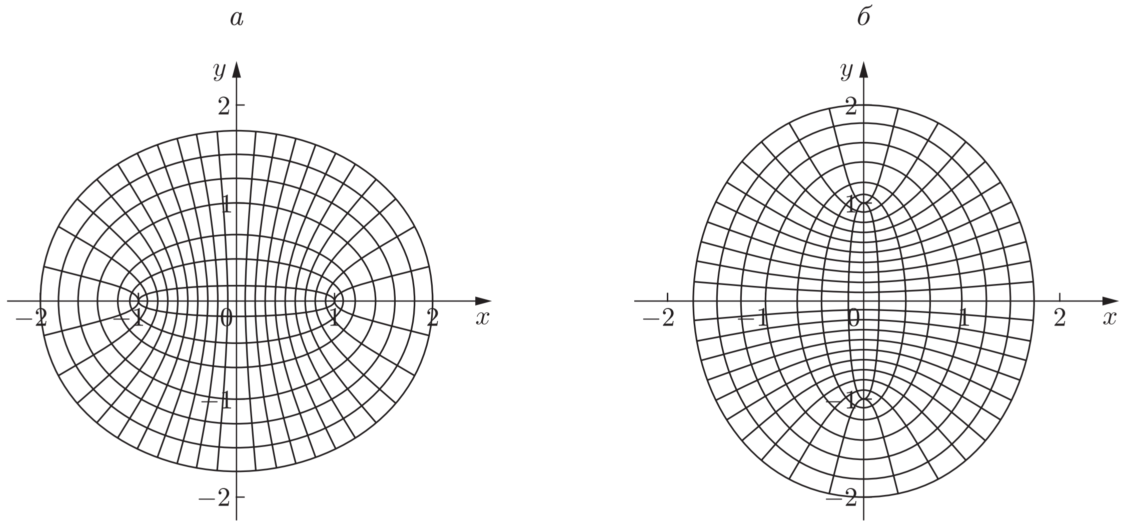

Рис. 1. Ориентация волокон в направлениях координатных линий эллиптической системы:
а — семейство арматур с фокусами на оси x; *б* — семейство арматур с фокусами на оси y

$$\omega_{1i}(\alpha_1, \alpha_2) = \frac{H_{2i}(\alpha_1^0, \alpha_2)\omega_{1i}^0(\alpha_2)}{H_2(\alpha_1, \alpha_2)}, \qquad \omega_{2i} = \frac{H_1(\alpha_1, \alpha_2^0)\omega_{2i}^0}{H_1(\alpha_1, \alpha_2)},$$

где $\omega_{2i}^0(\alpha_1)$, $\omega_{1i}^0(\alpha_2)$ — известные функции на линиях $\alpha_2 = \alpha_2^0 = \text{const}$ и $\alpha_1 = \alpha_1^0 = \text{const}$.

Достаточно большое разнообразие криволинейных структур армирования в i-м слое пластины ($h_{i-1} \leqslant z \leqslant h_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$) можно получить, рассматривая схемы с ортогональными траекториями армирования. Общие ортогональные системы координат U, V можно получить с помощью соотношения

$$U + iV = f(x + iy), \qquad i^2 = -1,$$

где f — произвольная аналитическая функция [3].

В частности, полагая

$$U + iV = \arcsin\frac{x + iy}{c}, \qquad \sin U = \frac{s_1 - s_2}{2c}, \qquad \operatorname{ch} V = \frac{s_1 + s_2}{2c}$$

($s_1 = \sqrt{(x + c)^2 + y^2}$, $s_2 = \sqrt{(x - c)^2 + y^2}$ — расстояния между точкой (x, y) и фокусами, находящимися в точках с координатами $y = 0$, $x = \pm c$) и выполняя замену переменных $x = c \sin U \operatorname{ch} V$ $(0 \leqslant U \leqslant 2\pi)$, $y = \pm c \cos U \operatorname{sh} V$ $(0 \leqslant V \leqslant \infty)$, получаем эллиптические координаты, координатными линиями которых являются софокусные U-гиперболы и V-эллипсы:

$$\frac{x^2}{c^2 \operatorname{ch}^2 V} + \frac{y^2}{c^2 \operatorname{sh}^2 V} = 1, \qquad \frac{x^2}{c^2 \sin^2 U} - \frac{y^2}{c^2 \cos^2 U} = 1.$$

На рис. 1 показаны семейства арматур двух типов: с фокусами на оси x и с фокусами на оси y. Приведем выражения для плотностей армирования ω_k и углов армирования φ_k волокон в эллиптической системе координат. Для V-эллипсов имеем

$$\frac{x^2}{\operatorname{ch}^2 V} + \frac{y^2}{\operatorname{sh}^2 V} = c^2, \qquad \operatorname{tg}\varphi_1 = \frac{dy}{dx} = -\frac{x \operatorname{sh}^2 V}{y \operatorname{ch}^2 V} = -\operatorname{tg} U \operatorname{th} V,$$

$$\sin^2 \Psi_1 = \frac{\cos^2 U \operatorname{ch}^2 V}{\operatorname{ch}^2 V - \sin^2 U}, \qquad \sin^2 \Psi_1 = \frac{\sin^2 U \operatorname{sh}^2 V}{\operatorname{ch}^2 V - \sin^2 U}.$$

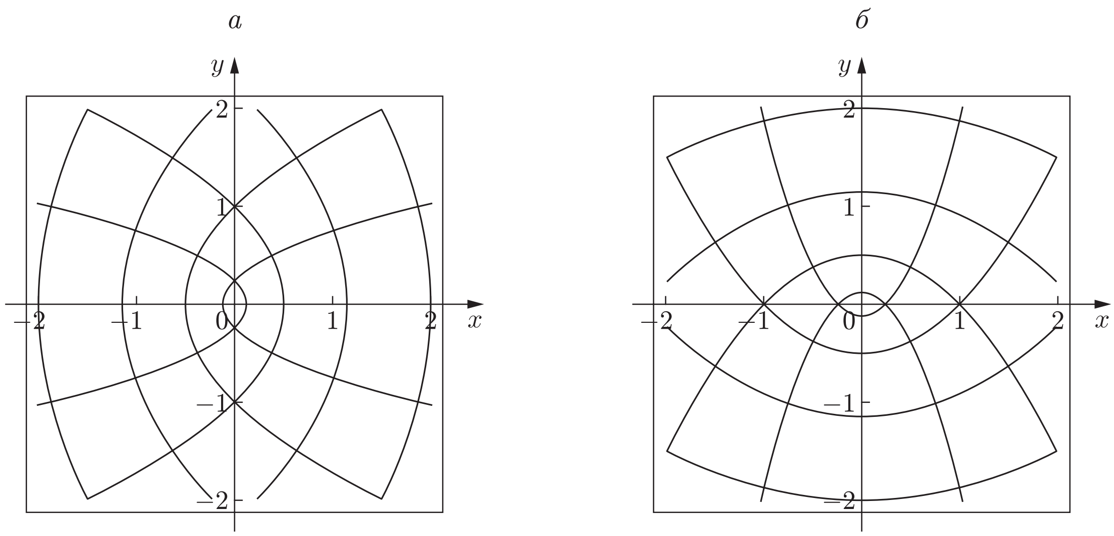

Рис. 2. Параболические структуры армирования:
а — семейство парабол с вершинами на оси x; *б* — семейство парабол с вершинами на оси y

Плотность армирования вдоль V-эллипсов равна

$$\omega_1(U,V) = \frac{\sqrt{g_{22}(U_0,V)}\,\omega_1^0(V)}{\sqrt{g_{22}(U,V)}}, \qquad g_{22}(U,V) = c^2(\operatorname{ch}^2 V - \sin^2 U).$$

Для U-гипербол имеем

$$\frac{x^2}{\sin^2 U} - \frac{y^2}{\cos^2 U} = c^2, \qquad \operatorname{tg}^2 \Psi_2 = \frac{dy}{dx} = \frac{x\cos^2 U}{y\sin^2 U} = -\operatorname{ctg} U\ \operatorname{cth} V,$$

$$\cos^2\Psi_2 = \frac{\sin^2 U \operatorname{sh}^2 V}{\operatorname{ch}^2 V - \sin^2 U}, \qquad \sin^2\Psi_2 = \frac{\cos^2 U \operatorname{ch}^2 V}{\operatorname{ch}^2 V - \sin^2 U}.$$

Плотность армирования вдоль U-гипербол равна

$$\omega_2(U,V) = \frac{\sqrt{g_{11}(U,V_0)}\,\omega_2^0(V)}{\sqrt{g_{11}(U,V)}}, \qquad g_{11}(U,V) = c^2(\operatorname{ch}^2 V - \sin^2 U).$$

Полагая

$$u + iv = \sqrt{2(x+iy)}, \qquad u = \sqrt{r+x}, \qquad v = \sqrt{r-x}$$

($r = \sqrt{x^2+y^2}$ — расстояние от точки с координатами $x = 0$, $y = 0$), получаем семейства траекторий, совпадающих с координатными линиями параболической системы координат (софокусные U- и V-параболы с общей осью симметрии (рис. 2)). В случае параболической структуры армирования плотности армирования волокон определяются выражениями

$$\omega_1(x,y) = \sqrt{\frac{r-x}{2r}}\,\omega_1^0, \qquad \omega_2(x,y) = \sqrt{\frac{r+x}{2r}}\,\omega_2^0.$$

Полагая

$$u + iv = (x+iy)^2/2, \qquad u = (x^2-y^2)/2, \qquad v = xy,$$

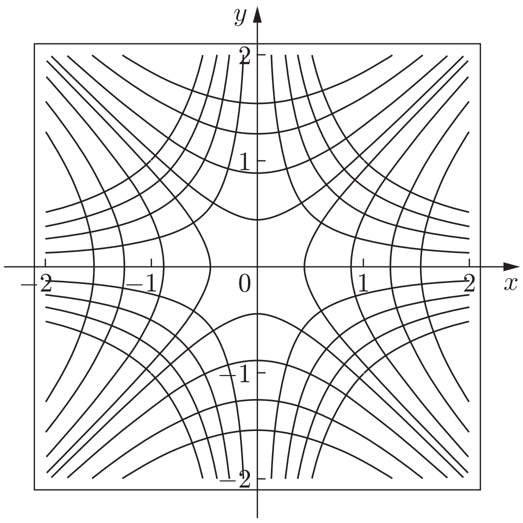

Рис. 3. Гиперболические структуры армирования

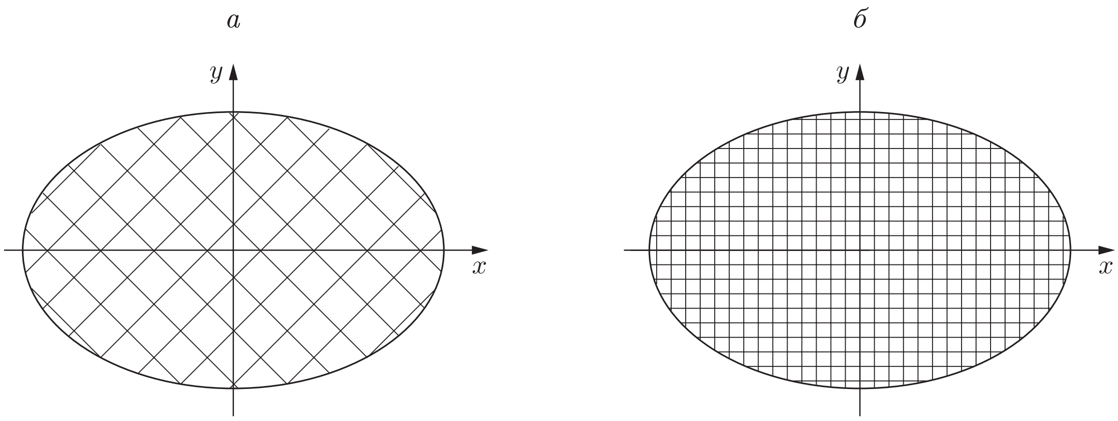

Рис. 4. Прямолинейные структуры армирования:
а — косоугольные структуры, *б* — прямоугольные структуры

получаем структуру армирования в виде семейства равносторонних гипербол (рис. 3). Для такой структуры плотности армирования волокнами постоянного поперечного сечения определяются равенствами

$$\omega_1(x,y) = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2|xy|}}\,\omega_1^0, \qquad \omega_2(x,y) = \sqrt{\frac{x^2+y^2}{|x^2-y^2|}}\,\omega_2^0.$$

При армировании пластин в прямоугольной системе координат прямолинейными волокнами с постоянным сечением (рис. 4) углы и плотности армирования сохраняют постоянное значение.

Разнообразные структуры армирования можно описать в полярной системе координат. Такие структуры применяются в кольцевых пластинах. При использовании волокон с постоянным поперечным сечением в кольцевых пластинах с осесимметричными условиями нагружения, закрепления и армирования получаем, в частности, следующие зависимости плотности ω и угла μ армирования от координаты r [4]:

1) спирали Архимеда

$$\omega(r) = \frac{\omega_0\sqrt{r_0^2 + (r\operatorname{tg}\mu)^2}}{r\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\mu}}, \qquad \operatorname{tg}\mu = \frac{r}{r_0}\operatorname{tg}\mu_0;$$

2) логарифмические спирали

$$\omega(r) = \frac{\omega_0 r_0}{r}, \qquad \mu(r) = \mu_0 = \mathrm{const};$$

3) “спицы велосипеда”

$$\omega(r) = \frac{\omega_0 r_0 \cos\mu_0}{\sqrt{r^2 - (r_0\sin\mu_0)^2}}, \qquad \sin\mu = \frac{r_0\sin\mu_0}{r}$$

(ω_0, μ_0 — параметры армирования на внутреннем контуре $r = r_0$).

Могут быть использованы прямолинейные волокна, расположенные в радиальном направлении ($\operatorname{tg}\mu = 0$), и криволинейные окружные волокна ($\operatorname{tg}\mu = \infty$) с постоянной или переменной плотностью укладки в радиальном направлении. В направлении нормали к поверхности пластины в разных слоях могут быть использованы различные комбинации указанных выше структур армирования.

Рассмотрим процесс ползучести гибридных слоисто-волоконных пластин с симметричными относительно срединной плоскости пластины структурами армирования. Для получения единообразных компактных формул для широкого класса разнообразных структур и материалов армирования целесообразно использовать для всех материалов теорию старения в формулировке Ю. Н. Работнова [5, 6] и классические кинематические гипотезы Кирхгофа — Лява для всего пакета слоев. В этом случае на основе уравнения упругопластического изгиба армированных оболочек [7] для изгибающих и крутящих моментов M_x, M_y, M_{xy} в декартовой системе координат получаем выражения

$$M_x = A_1(x,y,t)C^{m_0}(t) + \sum_{i=1}^{m} C^{m_i}(t)D_{1i}(x,y,t)l_{1i}^2,$$

$$M_y = A_2(x,y,t)C^{m_0}(t) + \sum_{i=1}^{m} C^{m_i}(t)D_{1i}(x,y,t)l_{2i}^2,$$

$$M_{xy} = A_3(x,y,t)C^{m_0}(t) + \sum_{i=1}^{m} C^{m_i}(t)D_{1i}(x,y,t)l_{1i}l_{2i},$$

$$A_1 = R(2k_x + k_y), \qquad A_2 = R(2k_y + k_x), \qquad A_3 = 2Rk_{xy},$$

$$R = \frac{2}{3}\,\frac{B_0(t)k_u^{m_0}}{m_0+1}\sum_{i=1}^{n}(h_i^{m_0+1} - h_{i-1}^{m_0+1}), \qquad D_{1i} = 2\sum_{i=1}^{n}\frac{\omega_i B_i(t)}{m_i+1}(h_i^{m_i+1} - h_{i-1}^{m_i+1})k_i^{m_i},$$

$$k_u = (k_x^2 + k_xk_y + k_y^2 + 4k_{xy}^2)^{1/2}, \quad k_i = k_xl_{1i}^2 + k_yl_{2i}^2 + 2k_{xy}l_{1i}l_{2i}, \quad l_{1i} = \cos\varphi_i, \quad l_{2i} = \sin\varphi_i,$$

$$k_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad k_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad k_{xy} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}, \quad \bar{w}(x,y,t) = C(t)w(x,y),$$

где $z = h_i$ — координаты межслойных поверхностей; $\varphi_i(x,y)$, $\omega_i(x,y)$ — углы наклона волокна и плотности армирования в i-м слое; $B_i(t)$, m_i — параметры ползучести волокон i-го семейства $B_0(t)$; m_0 — параметры ползучести материала матрицы; $C(t)$ — искомая функция, определяющая интенсивность ползучести пластины; $w(x,y)$ — функция распределения прогиба, удовлетворяющая условиям закрепления пластины.

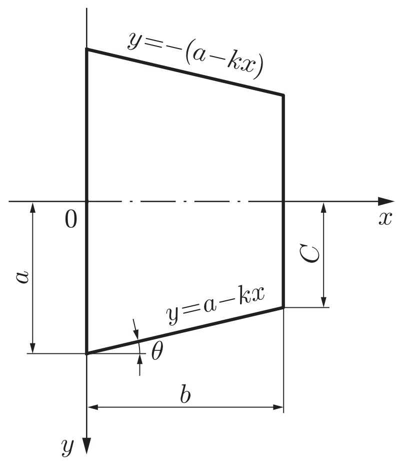

Рис. 5. Трапециевидная защемленная пластина

Для функций $B_0(t)$, $B_i(t)$ обычно используются зависимости вида [8]

$$B_0(t) = \frac{1}{1+\alpha_0 t^{\beta_0}}, \qquad B_i(t) = \frac{1}{1+\alpha_i t^{\beta_i}},$$

где t — время; α_0, β_0, α_i, β_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — параметры, определяемые в экспериментах для соответствующих материалов.

Для рассматриваемых пластин уравнение равновесия в декартовой системе координат имеет вид

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2\,\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - q(x,y) = 0. \tag{1}$$

Для защемленных пластин с различными контурами нетрудно подобрать функции прогибов, удовлетворяющие условиям защемления в контуре

$$w\big|_\Gamma = 0, \qquad \frac{dw}{d\nu}\Big|_\Gamma = 0$$

(ν — координата вдоль нормали к контуру Γ). Например, для односвязных или двусвязных эллиптических пластин с защемленными контурами имеем

$$w(x,y) = \Big(\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} - 1\Big)^2 \quad \text{или} \quad w(x,y) = \Big(\frac{x^2}{a_1^2} + \frac{y^2}{b_1^2} - 1\Big)^2\Big(\frac{x^2}{a_2^2} + \frac{y^2}{b_2^2} - 1\Big)^2. \tag{2}$$

При $a_1 = b_1$ или $a_2 = b_2$ получаем контуры в виде окружностей. Поэтому формулы (2) можно использовать также для круговых пластин с эллиптическим отверстием или эллиптических пластин с круговым отверстием. Для прямоугольных защемленных пластин со сторонами a и b имеем

$$w(x,y) = \sin^2(\pi x/a)\sin^2(\pi y/b).$$

Для защемленной трапециевидной пластины в декартовой системе координат (x, y), выбранной в соответствии с рис. 5, следует принять функцию $w(x,y)$ в форме

$$w(x,y) = x^2(b-x)^2[(a-kx)^2 - y^2]^2.$$

При заданных функциях $w(x,y)$ оценка интенсивности ползучести рассматриваемых пластин сводится к определению функций $C(t)$. Для нахождения функций $C(t)$ можно использовать метод Бубнова — Галеркина. Для пластины заданной формы подставим функцию $w(x,y)$ в формулы M_x, M_y, M_{xy}, а полученные выражения — в уравнение равновесия (1). Далее умножим (1) на $w(x,y)$ и проинтегрируем по поверхности пластины. В результате для функции $C(t)$ получаем уравнение

$$K_0(t)C^{m_0}+\sum_{i=1}^{n}K_i(t)C^{m_i}=Q, \tag{3}$$

где

$$K_0(t)=\iint\limits_s\Big(\frac{\partial^2 A_1}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_2}{\partial y^2}+2\,\frac{\partial^2 A_3}{\partial x\,\partial y}\Big)w(x,y)\,dx\,dy,$$

$$Q=\iint\limits_s q(x,y)w(x,y)\,dx\,dy,$$

$$K_i(t)=\iint\limits_s\Big(\frac{\partial^2(D_{1i}l_{1j}^2)}{\partial x^2}+\frac{\partial^2(D_{1i}l_{2i})}{\partial y^2}+\frac{\partial^2(D_{1i}l_{1i}l_{2i})}{\partial x\,\partial y}\Big)w(x,y)\,dx\,dy.$$

Таким образом, для оценки ползучести пластин, имеющих различную геометрию и разнообразные структуры армирования, получаем алгебраическое уравнение вида (3), которое несложно решить численным методом. Используя это решение, можно определить допустимые времена эксплуатации рассматриваемых пластин для выбора рациональных структур армирования. Время t_*^0 начала разрушения матрицы определяется из условия

$$\max_{(x,y)}\varepsilon_u(x,y,z,t_*^0)=\varepsilon_0^* \quad \text{или} \quad C(t_*^0)=\varepsilon_0^*\big[h_n\max_{(x,y)}k_u\big],$$

время t_i^* начала разрушения волокон i-го семейства — из условия

$$h_iC(t_i^*)\max_{(x,y)}[k_xl_{1i}^2+k_yl_{2i}^2+2k_{xy}l_{1i}l_{2i}]=\varepsilon_i^*,$$

допустимое время эксплуатации рассматриваемых пластин равно

$$t^*=\min(t_0^*,t_1^*,\ldots,t_n^*).$$

При осесимметричном изгибе защемленных кольцевых пластин для прогиба $w(r)$ и изгибающих моментов M_r, M_Θ имеем выражения

$$w(r)=(1-r^2/R_0^2)^2(1-r^2/R_1^2)^2; \tag{4}$$

$$M_r=A_1(r,t)C^{m_0}(t)+\sum_{i=1}^{n}C^{m_i}(t)D_{1i}l_{1i}^2,\quad M_\Theta=A_2(r,t)C^{m_0}(t)+\sum_{i=1}^{n}C^{m_i}(t)D_{1i}l_{2i}^2, \tag{5}$$

где

$$A_1=R(2k_r+k_\Theta),\quad A_2=R(2k_\Theta+k_r),\quad R=\frac{2B_0(t)k_u^{m_0}}{3(m_0+1)}\sum_{i=1}^{n}(1-\omega_i)(h_i^{m_0+1}-h_{i-1}^{m_0+1}),$$

$$D_{1i}=2\sum_{i=1}^{n}\frac{\omega_iB_i(t)}{m_i+1}\,(h_i^{m_i+1}-h_{i-1}^{m_i+1})k_i,\quad k_u=(k_r^2+k_rk_\Theta+k_\Theta^2)^{1/2},\quad k_i=k_rl_{1i}^2+k_\Theta l_{2i}^2,$$

$$l_{1i}=\cos\mu_i,\quad l_{2i}=\sin\mu_i,\quad k_r=-\frac{d^2w}{dr^2},\quad k_\Theta=-\frac{1}{r}\,\frac{dw}{dr},$$

r — текущий радиус; R_0, R_1 — радиусы внутреннего и внешнего контуров.

Уравнение равновесия имеет вид

$$L(M_r, M_\Theta) = \frac{d^2\,(rM_r)}{dr^2} - \frac{dM_\Theta}{dr} - q(r)r = 0,$$

поэтому, учитывая выражения (4), (5), из равенства

$$\int\limits_{R_0}^{R_1} L(M_r, M_\Theta) w(r) r\,dr = 0$$

получаем уравнение для функции $C(t)$, подобное уравнению (3).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Немировский Ю. В.** Математическое моделирование плоских конструкций из армированных волокнистых материалов / Ю. В. Немировский, Н. А. Федорова. Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2010.
2. **Немировский Ю. В., Бушманов С. Б.** Проектирование пластин, армированных равнонапряженными волокнами постоянного поперечного сечения // Механика композит. материалов. 1983. № 2. С. 278–284.
3. **Лаврентьев М. А.** Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. М.: Наука, 1965.
4. **Вохмянин И. Т., Немировский Ю. В.** Особенности продольно-поперечного изгиба трехслойных кольцевых пластин с несимметричными структурами армирования // Краевые задачи и математическое моделирование: Сб. тр. 8-й Всерос. конф., Новокузнецк, 1–3 дек. 2006 г. Новокузнецк: Новокузнецк. филиал Кемер. гос. ун-та, 2006. Т. 1. С. 25–31.
5. **Работнов Ю. Н.** Некоторые вопросы теории ползучести // Вестн. Моск. гос. ун-та. 1948. № 10. С. 81–91.
6. **Работнов Ю. Н.** Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.
7. **Немировский Ю. В.** К теории упругопластического деформирования армированных оболочек // Теория пластин и оболочек. М.: Наука, 1971. С. 192–198.
8. **Работнов Ю. Н.** Расчет деталей машин на ползучесть // Изв. АН СССР. Отд-ние техн. наук. 1948. № 6. С. 789–800.

Поступила в редакцию 22/V 2013 г.