

**КИНЕТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ
ВЫСОКОЧАСТОТНОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ РАЗРЯДА В ГАЗАХ**

*Н. А. Дятко, И. В. Кочетов, А. П. Напартович,
В. Г. Певгов, А. Н. Старостин*

(Москва)

Известно (см., например, [1]), что в плазме газового разряда может возникнуть неустойчивость, обусловленная наличием падающего участка в зависимости скорости дрейфа электронов от приложенного электрического поля. Эта неустойчивость аналогична эффекту Ганна в полупроводниках [2]. Линейная стадия развития такого рода неустойчивости изучалась в [1, 3, 4]. В зависимости от значения параметра $\nu_u \tau_m = E^2 / (4\pi n_e k T_e)$ скорость развития неустойчивости определяется либо частотой τ_m^{-1} (при $\tau_m \nu_u \gg 1$), либо ν_u ($\tau_m \nu_u \ll 1$) [3] (здесь ν_u — частота неупругих столкновений, определяющая скорость релаксации симметричной части электронной функции распределения, $\tau_m = 1 / (4\pi\sigma)$, σ — проводимость плазмы, E — напряженность электрического поля, n_e — концентрация электронов, T_e — средняя энергия электронов). Во втором случае развитие неустойчивости не описывается уравнениями переноса, необходимо вычислять функцию распределения электронов.

Чтобы составить представление о роли кинетических эффектов, рассмотрим однородное развитие ганновской неустойчивости, используя модельные интегралы неупругих столкновений.

В данной работе найдены автомодельные решения кинетического уравнения для условий постоянного тока в цепи. Путем численного решения нестационарного кинетического уравнения выяснено, что полное решение за времена порядка нескольких ν_u^{-1} выходит на автомодельное.

В рассматриваемом случае задача сводится к решению уравнения для сферически-симметричной части функции распределения f_0 , которое в пространственно-однородной плазме имеет вид

$$(1) \quad \frac{\partial f_0}{\partial t} = \frac{e^2 E^2}{3m^2} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \frac{v^2}{v_m} \frac{\partial f_0}{\partial v} + \text{St} f_0 = 0,$$

где v — модуль скорости электронов; ν_m — частота упругих столкновений; $\text{St} f_0$ — интеграл неупругих соударений; m — масса электрона. Так как нас интересуют быстрые процессы с характерными частотами порядка ν_u , концентрацию ионов можно считать замороженной, а при условии $\tau_m \nu_u \ll 1$, предполагаемом нами выполненным, можно пренебречь и изменением концентрации электронов, равной с хорошей точностью концентрации ионов. Условие нормировки функции распределения при этом имеет вид

$$(2) \quad \int_0^\infty v^2 f_0 dv = 1.$$

При сделанных предположениях для условий цепи, поддерживающей ток постоянным, можно записать условие постоянства тока в виде

$$(3) \quad W_e = - \frac{eE}{3m} \int_0^\infty \frac{v^3}{v_m} \frac{\partial f_0}{\partial v} dv = \text{const}.$$

Таким образом, задача о развитии ганновской неустойчивости в рассматриваемых условиях сводится к решению уравнений (1)–(3).

Качественное объяснение развития неустойчивости можно дать следующим образом. Пусть, например, возникла флуктуация поля, при которой напряженность поля возросла. Функция распределения начнет релаксировать к новой форме, соответствующей новому полю. При этом значение интеграла в (3) должно уменьшиться, так как скорость дрейфа электронов падает с ростом поля. При $W_e = \text{const}$ уменьшение подвижности приведет к дальнейшему увеличению поля. При этом функция распределения расплывается по оси скоростей. Линейная теория дает аперидическое развитие неустойчивости, направление которого определяется первоначальной флуктуацией поля в сторону уменьшения или увеличения.

Далее выберем интеграл столкновений в дивергентной форме

$$(4) \quad \text{St } f_0 = \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v_u v^3 f_0).$$

Зависимость v_m и v_u от скорости представим в модельном виде

$$(5) \quad v_m = v_0 v^p, \quad v_u = \delta v_m, \quad \delta = \delta_0 v^q,$$

где p, q — действительные числа. Заметим, что $\text{St } f_0$ имеет дивергентный вид, когда пороги неупругих процессов много меньше T_e . Степенное представление зависимости частот от скорости справедливо только в некотором интервале энергий. Для эффекта Ганна в газах эта модель является чисто качественной, для полупроводников область применимости, по-видимому, шире. В частном случае, когда $p = q$, этот интеграл описывает потери энергии при упругих столкновениях. С учетом (4), (5) уравнения (1), (3) преобразуются к виду

$$(6) \quad \frac{\partial f_u}{\partial t} = \frac{c^2 E^2}{3m v_0 v^2} \frac{\partial}{\partial v} v^{2-p} \frac{\partial f_u}{\partial v} + \frac{v_0 \delta_0}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} v^{3+q+p} f_0;$$

$$(7) \quad - \frac{eE}{3m v_0} \int_0^\infty v^{3-p} \frac{\partial}{\partial v} f_0 dv = W_e = \text{const}.$$

В стационарном случае легко находятся функция распределения и соответствующая ей скорость дрейфа:

$$f_{00} = \frac{s!}{\alpha^3 \Gamma\left(\frac{3}{s}\right)} \exp\left[-\left(\frac{v}{\alpha}\right)^s\right], \quad W_{e0} = \frac{eE}{3m v_m(\alpha)} \Gamma\left(\frac{3-p}{s}\right) / \Gamma\left(\frac{3}{s}\right),$$

$$\alpha = \left[\frac{s}{3\delta_0} \left(\frac{eE}{m v_0}\right)^{\frac{1}{s}}\right]^{\frac{1}{s}}, \quad s = 2p + q + 2 > 0.$$

Из приведенных формул видно, что $W_{e0} \sim E^{(q+2)/s}$, и, следовательно, зависимость скорости дрейфа от поля будет падающей при выполнении условия $q + 2 < 0$ (т. е., если потери энергии определяются упругими столкновениями, неустойчивость не развивается). Если неустойчивость развивается, то в рамках выбранной модели поле нарастает (или уменьшается) неограниченно. Функция распределения при нарастании расплывается вдоль оси скоростей.

Таким образом, на нелинейной стадии развития ганновской неустойчивости имеет место убежание электронов. Отсутствие характерных значений скорости или времени позволяет искать автомодельные решения уравнений (1)–(3) в виде

$$(8) \quad f_0 = \Phi_1(t) \Psi(v \Phi_2(t)).$$

Подставляя (8) в условие нормировки (2), получим

$$\Phi_1 \Phi_2^{-3} \int_0^\infty \xi^2 \Psi(\xi) d\xi = 1, \quad \xi = v \Phi_2(t).$$

Без ограничения общности можно положить

$$(9) \quad \int_0^{\infty} \xi^2 \psi(\xi) d\xi = 1.$$

Тогда

$$(10) \quad \varphi_1 = \varphi_2^3.$$

Из условия (7) получим, используя (10):

$$(11) \quad E = \frac{A}{C} \varphi_2^{-p}; \quad A = \frac{W e^{3m\nu_0}}{e};$$

$$(12) \quad C = - \int_0^{\infty} \xi^{3-p} \psi'_\xi d\xi.$$

Подставим f_0 в виде (8) в уравнение (6). Используя (10), (11) и вводя переменную ξ , после несложных преобразований имеем

$$\varphi_2^{-1} (\varphi_2)_t' (\xi^3 \psi)'_\xi = \frac{e^2 A^2}{C^2 3m^2 \nu_0} \varphi_2^{-2-p} (\xi^{2-p} \psi'_\xi)'_\xi + \nu_0 \delta_0 \varphi_2^{-p-q} (\xi^{3+p+q} \psi)'_\xi.$$

Интегрируя по ξ , получим

$$(13) \quad \varphi_2^{-1} (\varphi_2)_t' \xi^3 \psi = \frac{e^2 A^2}{C^2 3m^2 \nu_0} \varphi_2^{-2-p} (\xi^{2-p} \psi'_\xi) + \nu_0 \delta_0 \varphi_2^{-p-q} \xi^{3+p+q} \psi + d(t),$$

$$d(t) = 0, \text{ так как } f_0(v) \rightarrow 0 \text{ при } v \rightarrow \infty.$$

При $q + 2 < 0$ (условие падающей зависимости W_{e0} от E) $\varphi_2 \rightarrow 0$, при $t \rightarrow \infty$ можно пренебречь вторым членом в правой части уравнения (13) (интегралом столкновений) и уравнение (13) записать в виде

$$\varphi_2^{p-3} (\varphi_2)_t' = \frac{e^2 A^2}{C^2 3m^2 \nu_0} \xi^{-p-1} \psi^{-1} \psi'_\xi = -\lambda$$

(знак — введен для удобства), откуда получаем

$$(14) \quad \psi(\xi) = B_1 \exp\left(-\lambda \xi^{p+2} \frac{C^2 3m^2 \nu_0}{e^2 A^2 (p+2)}\right);$$

$$(15) \quad \varphi_2(t) = (-\lambda(p-2)t + B_2)^{1/(p-2)}, \quad p \neq 2;$$

$$(16) \quad \varphi_2(t) = B_3 \exp(-\lambda t), \quad p = 2.$$

Так как $\psi(\xi)$ должна удовлетворять условию (9), то $\lambda > 0$, а из условия $s = 2p + q + 2 > 0$ следует $p > -(q + 2)/2$. Таким образом, полученное решение справедливо для значений p и q :

$$q + 2 < 0, \quad p > -(q + 2)/2.$$

Заметим, что характер стремления $\varphi_2(t)$ к нулю может быть разным. Так, при $p \leq 2$ $\varphi_2 \rightarrow 0$ ($t \rightarrow \infty$), а при $p > 2$ $\varphi_2 \rightarrow 0$ ($t = t_0$), т. е. достигаем нулевого значения за конечное время $t_0 = B_2/(\lambda(p-2))$. Подставляя (15), (16) в (11), получим

$$(17) \quad E = (A/C)(\lambda(2-p)t + B_2)^{p/(2-p)}, \quad p \neq 2;$$

$$(18) \quad E = \frac{A}{C} B_2^{-p} \exp(\lambda p t), \quad p = 2.$$

Из (17), (18) видно, что при $p > 2$ возрастание поля имеет взрывной характер, при $p = 2$ — экспоненциальный, а при $p < 2$ — степенной.

Соответствующие функции распределения имеют вид

$$f_0 = B_1 (\lambda(2-p)t + B_2)^{3/(p-2)} \exp\left(-\lambda \xi^{p+2} \frac{C^2 3m^2 \nu_0}{e^2 A^2 (p+2)}\right),$$

$$\xi = v(\lambda(2-p)t + B_2)^{p-2}, \quad p \neq 2,$$

$$f_0 = B_1 B_3^3 \exp(-3\lambda t) \exp\left(-\lambda \xi^{p+2} \frac{C^2 3m^2 v_0}{e^2 A^2 (p+2)}\right),$$

$$\xi = v B_3 e^{-\lambda t}, \quad p = 2.$$

Из хода решения ясно, что на асимптотической стадии развития ганновской неустойчивости в сторону увеличения электрического поля неупругими соударениями можно пренебречь, что является следствием определенной зависимости частот соударений от скорости. При этом формально зависимость функции распределения от вида сечения неупругих процессов исчезла. Отметим, что при развитии неустойчивости в сторону уменьшения электрического поля упрощенные решения не находятся.

Используя соотношения (9), (12), можно найти связь между константами λ , C , B_1 , B_2 , B_3 . Для случая $p = 2$

$$(19) \quad \lambda = \frac{3v_0 W_e^2}{4} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)}.$$

Для случая $p \neq 2$ определяется коэффициент при t в формуле (17), если переписать (17) в виде

$$(20) \quad E = \left[\left(\frac{A}{C}\right)^{(2-p)/p} \lambda(2-p) + \left(\frac{A}{C}\right)^{(2-p)/p} B_2\right]^{p/(2-p)},$$

$$\left(\frac{A}{C}\right)^{(2-p)/p} \lambda(2-p) = \left[\frac{3m v_0 W_e}{e(p+2)} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{p+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{p+2}\right)}\right]^{(p+2)/p} (4-p^2) \frac{e}{3m^2 v_0}.$$

Рассмотрим более частный случай значений p и q , при которых оказывается возможным найти точное решение. Пусть $p + q = 0$. Тогда уравнение (13) можно преобразовать к виду

$$\frac{\varphi_2^{-1}(\varphi_2)' - v_0 \delta_0}{\varphi_2^{2-p}} = \frac{e^2 A^2}{C^2 3m^2 v_0} \xi^{-1-p} \frac{\psi_\xi'}{\psi} = -\lambda,$$

$$\text{Откуда} \quad \varphi_2 = \left(B_2 \exp((p-2)v_0 \delta_0 t) + \frac{\lambda}{v_0 \delta_0}\right)^{1/(p-2)}.$$

Выражение для $\psi(\xi)$ такое же, как и (14). Так как $q + p = 0$ и $q + 2 < 0$, то решение справедливо при $p > 2$. Согласно (11), имеем

$$(21) \quad E = \left[\left(\frac{A}{C}\right)^{(2-p)/p} B_2 \exp((p-2)v_0 \delta_0 t) + \frac{\lambda}{v_0 \delta_0} \left(\frac{A}{C}\right)^{p/(2-p)}\right]^{p/(2-p)}.$$

Из (9), (12) можно определить

$$(22) \quad \frac{\lambda}{v_0 \delta_0} \left(\frac{A}{C}\right)^{(2-p)/p} = \left[\frac{3m v_0 W_e}{e(p+2)} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{p+2}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{p+2}\right)}\right]^{(p+2)/p} \frac{e^2 (p+2)}{3m^2 v_0^2 \delta_0^2}.$$

Формула (21) описывает как уменьшение поля ($B_2 < 0$), так и увеличение ($B_2 > 0$). В первом случае поле стремится к нулю по экспоненциальному закону (на больших временах), во втором — возрастание поля имеет взрывной характер. Заметим, что при этом решение (21) переходит в решение (17). В этом можно убедиться, разложив в (21) экспоненту в ряд в окрестности точки взрыва t_0 , определяемой равенством $B_2 \exp[(p-2) \times v_0 \delta_0 t_0] + \lambda/(v_0 \delta_0) = 0$.

Чтобы выяснить вопрос о выходе произвольного решения на автомодельный закон, система (1)–(3) решалась численно. Уравнение (1)

p	q	$\Gamma, \text{с}^{-1}$ [3]	\widehat{W}_e	$\Gamma/\sqrt{v_u}$	$\Gamma, \text{с}^{-1}$	$\Delta E/E$
					Численный расчет	
2	-3	$8,13 \cdot 10^7$	0,333	0,38	$1,15 \cdot 10^8$	0,005
2	-2,1	$7,97 \cdot 10^6$	0,024	0,049	$6,56 \cdot 10^6$	0,04
2	-2,02	$1,59 \cdot 10^5$	0,005	0,001	$1,45 \cdot 10^5$	0,16

решалось по неявной схеме методом прогонки [5]. Граничные условия выбирались, как в [6]. На каждом временном шаге производились итерации по полю, чтобы удовлетворить уравнению (3). Начальное состояние выбиралось близким к стационарному. Возмущение определялось заданием значения W_e , слабо отличающегося от стационарного значения. При этом в начальный момент возмущаются E и f_0 . Все численные расчеты проводились для начального значения $E/N = 0,03 \cdot 10^{-20} \text{ В} \cdot \text{м}^2$ (N — число частиц в 1 м^3 газа, равное $2,69 \cdot 10^{25} \text{ м}^{-3}$, что соответствует атмосферному давлению). Значения v_0 и δ_0 выбирались такими, чтобы при энергии 1 эВ сечения, соответствующие частотам ν_m и ν_u , были равны 10^{-20} и $0,5 \times 10^{-23} \text{ м}^2$.

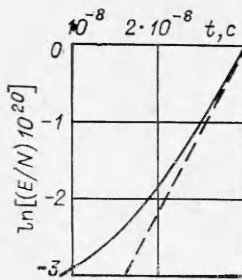
Для проверки правильности работы выбранного способа численного расчета использована аналитическая теория, сравнение с которой проводилось на линейной стадии (на малых временах). Рассчитывался инкремент Γ развития неустойчивости, значения которого сравнивались затем с теоретическими, рассчитанными по формулам [3]. В таблице приведены значения инкремента для некоторых p и q . Аналитическая теория справедлива при выполнении условий $|\widehat{W}_e| \ll 1$ и $|\Gamma/\sqrt{v_u}| \ll 1$ ($\sqrt{v_u} = v_u(\alpha)$, $\widehat{W}_e = d \ln W_e / d \ln E$). Ошибки, вносимые конечностью этих величин, составляют по порядку величины $|\widehat{W}_e|$ и $\Gamma/\sqrt{v_u}$ соответственно. Для того чтобы численный расчет давал инкремент линейной стадии развития неустойчивости, необходимо, чтобы $|\Delta E/E| \ll 1$ (ΔE — начальное возмущение поля). Величина $|\Delta E/E|$ есть вероятная ошибка в расчете инкремента. Таким образом, из таблицы видно, что аналитическая теория и численный расчет находятся в хорошем соответствии в пределах указанных ошибок.

Далее система (1)–(3) решалась численно на больших временах. Результаты расчета представлены на фиг. 1–3.

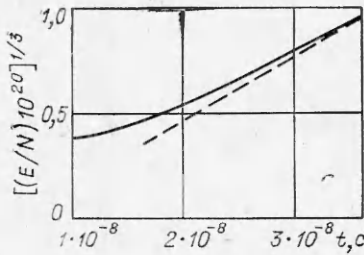
На фиг. 1 показана зависимость напряженности поля от времени в случае возрастания поля для $p = 2$, $q = -3$. Так как, согласно (18), возрастание должно происходить экспоненциально, то для удобства сравнения по оси ординат отложена величина $\ln [(E/N) \cdot 10^{20}]$. При этом автомодельное решение (18) будет представляться прямой линией. Из фиг. 1 видно, что решение, полученное численно (сплошная линия), асимптотически выходит на прямую, наклон которой хорошо согласуется с теоретическим решением (штриховая линия).

На фиг. 2 проведено аналогичное сравнение для $p = 1,5$, $q = -3$ (случай степенного возрастания поля). По оси ординат отложена величина $[(E/N) \cdot 10^{20}]^{1/3}$, так что автомодельное решение (17) представляется прямой линией. Численное решение (сплошная линия) также выходит на прямую, наклон которой хорошо согласуется с теоретическим решением (штриховая линия).

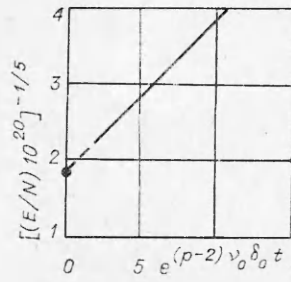
На фиг. 3 показаны результаты расчета для $p = 2,5$, $q = -2,5$ — для случая уменьшения поля. По оси ординат отложена величина $[(E/N) \cdot 10^{20}]^{-1/5}$, а по оси абсцисс — величина $\exp(0,5\nu_0\delta_0 t)$. При этом автомодельное решение (21) будет иметь вид прямой линии, которая пере-



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

секает ось ординат в точке, определяемой выражением (22). Как видно из фиг. 3, численное решение также выходит на прямую, точка пересечения (•) которой с осью ординат совпадает с теоретическим решением (○).

Таким образом, исследовано однородное развитие ганновской неустойчивости в газовой плазме для условий, когда ее развитие лимитируется установлением электронной функции распределения. Найдены приближенные автомодельные решения, к которым стремится полное решение, полученное численно. Когда частота неупругих соударений не зависит от энергии электронов ($p + q = 0$), находится точное автомодельное решение, к которому также стремится полное решение, полученное численно.

Авторы выражают благодарность Н. Л. Александрову за полезное обсуждение результатов работы.

Поступила 13 IV 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Лопанцева Г. ., Паль А. Ф. и др. Неустойчивость несамостоятельного разряда в смесях аргона с молекулярными газами.— Физика плазмы, 1979, т. 5, № 6.
2. Владимиров В. В., Волков А. Ф., Мейлихов Е. З. Плазма полупроводников. М.: Атомиздат, 1979.
3. Александров Н. Л., Напартович А. П., Старостин А. Н. Уравнения переноса в неравновесной слабоионизированной плазме.— Физика плазмы, 1980, т. 6, № 5.
4. Напартович А. П., Старостин А. Н. Механизмы неустойчивости тлеющего разряда повышенного давления.— В кн.: Химия плазмы. Вып. 6. М.: Атомиздат, 1979.
5. Самарский А. А., Николаев Е. С. Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
6. Rockwood S. D. Elastic and inelastic cross sections for electron Hg scattering from Hg transport data.— Phys. Rev. A, 1973, vol. 8, N 5.

УДК 533,951

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ИОНИЗУЮЩЕЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В ОДНОРОДНОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Н. А. Кудряшов
(Москва)

Рассматривается распространение ионизирующей ударной волны из точечного источника в однородное магнитное поле. Получено приближенное решение уравнения, которое описывает поверхность ударной волны. Распространение ионизирующей ударной волны в магнитном поле встречается в ряде областей физики: в астрофизике [1, 2], при лазерном термоядерном синтезе [3], при проведении активных экспериментов в космосе [4, 5] и т. д. В [6] получено автомодельное решение для поверхности фронта ударной волны, распространяющейся из точечного источника в атмосфере. Влияние неоднородности атмосферы при движении ударной волны учтено в [7, 8]. Без учета влияния магнитного поля задача о распространении ионизирующей ударной волны в газе не отличается от рассмотренных в [6—9].

В данной работе учитывается влияние однородного магнитного поля на распространение сильной ударной волны из точечного источника.