

УДК 532.526; 537.86.187

О НЕЛИНЕЙНОМ РАЗВИТИИ ДВУМЕРНОЙ ГИДРОУПРУГОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ В ТУРБУЛЕНТНОМ ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ НА УПРУГОМ ПОКРЫТИИ

В. П. Реутов, Г. В. Рыбушкина

Институт прикладной физики РАН, 603600 Нижний Новгород

Исследуется нелинейное развитие гидроупругой неустойчивости, возникающей при обтекании покрытия из резиноподобного материала турбулентным пограничным слоем потока несжимаемой жидкости. Построено нелинейное дисперсионное уравнение для двумерных квазимонохроматических волн малой амплитуды. Уравнения Прандтля для среднего (по периоду волнистости) течения в пограничном слое решены в приближении локального подобия и с помощью прямого численного интегрирования. Развитие неустойчивых волн во времени изучено на основе уравнения Ландау, которое выводится отдельно для неустойчивости быстрых волн (флаттера) и квазистатической неустойчивости (дивергенции). Проведено сопоставление результатов расчетов с известными экспериментальными данными.

Исследование генерации волн на упругих покрытиях, обтекаемых несжимаемыми потоками жидкости, представляет интерес в связи с использованием этих покрытий для уменьшения сопротивления обтекания, подавления акустических шумов и вибраций [1, 2]. До настоящего времени наибольшее внимание уделялось линейной теории неустойчивостей, возникающих при взаимодействии упругих покрытий различного вида с ламинарным течением (см. обзор литературы в [3]). Задача о возбуждении волн конечной амплитуды также решалась для ламинарного режима обтекания [4, 5].

В ряде работ проводилось экспериментальное исследование генерации волн на упругих покрытиях в турбулентном пограничном слое (ТПС) [1, 6]. При этом обнаружены два основных режима генерации гидроупругих волн — флаттер бегущей волны (ФБВ) и волновая дивергенция. В работе [7] для исследования линейной гидроупругой неустойчивости в ТПС использовалась алгебраическая модель вихревой вязкости, а уравнения для двумерных волновых возмущений в пограничном слое записывались в криволинейных координатах. При этом получено хорошее соответствие расчетных значений критической скорости возникновения ФБВ и волновой дивергенции и экспериментальных данных [1, 6]. В [8] предложена численная модель, позволяющая рассчитать нелинейный отклик ТПС на волнистый прогиб подстилающей поверхности. Как и в работе [9], посвященной изучению взаимодействия волн на воде с атмосферным ТПС, в [8] использовалось квазилинейное приближение, в рамках которого основные нелинейные эффекты связаны с деформацией профиля среднего (по периоду волнистости) течения.

В данной работе, которую следует рассматривать как продолжение [7, 8], изучается нелинейная стадия развития гидроупругой неустойчивости в ТПС на однослойном покрытии. Основным малым параметром задачи является наклон волнистой поверхности: $ka \ll 1$ (k , a — волновое число и амплитуда отклонения поверхности). Другое ограни-

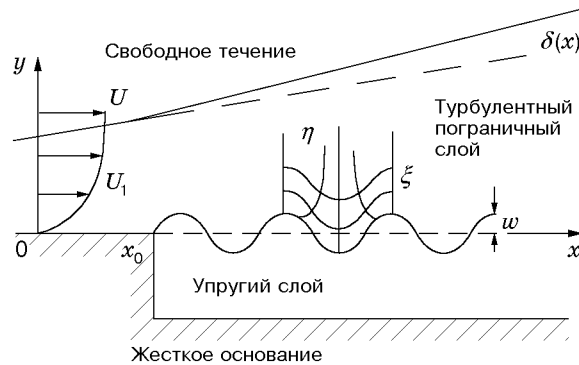


Рис. 1

чение предлагаемой теории состоит в том, что прогиб поверхности имеет вид двумерной квазимонохроматической волны.

В указанных выше экспериментах [1, 6] скорость потока могла превышать критическое значение в несколько раз. При этом наблюдались волны с большими наклонами поверхности. Предлагаемый в данной работе подход позволяет рассмотреть область малых и умеренно малых надкритичностей, при которых генерируются достаточно слабые волны. Отметим, что численное моделирование генерации дивергентных волн с большими наклонами поверхности проводилось в работе [10]. Однако при этом использовалось приближение потенциального потока, в рамках которого не учитывается влияние ТПС.

1. Нелинейное дисперсионное уравнение для гидроупругих волн малой амплитуды. Следуя [8], для описания течения в ТПС воспользуемся полуэмпирической гипотезой турбулентной вязкости, формулируя уравнения движения в криволинейных координатах ξ, η , в которых одна из координатных линий совпадает с профилем волнистой поверхности. Оси x и y декартовой системы координат направлены вдоль потока и по нормали к невозмущенной поверхности. Пространственное развитие ТПС над волнистой поверхностью, начинающейся в сечении $x = x_0$, схематически показано на рис. 1 ($\delta(x)$ — толщина ТПС, штриховая линия — ее поведение в отсутствие волнистости; $U_1(y)$ — профиль продольной скорости в ТПС над гладкой поверхностью, U — скорость свободного течения; ξ и η — координатные линии системы ортогональных криволинейных координат на периоде волнистости). Разделение течения на среднюю и осциллирующую составляющие производится вдоль горизонтальных координатных линий ($\eta = \text{const}$). Среднее течение предполагается квазипараллельным, т. е. масштаб расширения ТПС $L = \delta / (d\delta/dx)$ значительно превышает толщину ТПС δ и масштаб волнистости ($L/\delta \gg 1, kL \gg 1$). Рассматриваются волнистые прогибы с малым наклоном ($ka \ll 1$). Упругое покрытие из несжимаемого резиноподобного материала, который характеризуется плотностью ρ_s и модулем сдвига G , имеет толщину d . Скорость распространения поперечных волн в материале покрытия $c_t = \sqrt{G/\rho_s}$.

Если пренебречь влиянием тангенциальных поверхностных напряжений [1], определение отклика ТПС на волнистый прогиб поверхности $w(x, t)$ сводится к определению возмущений поверхностного давления $p(x, t)$, порождаемых этим прогибом (рис. 1). Гидродинамическая часть задачи рассматривается более подробно в п. 2. На данном этапе построения дисперсионного уравнения для гидроупругих волн достаточно учесть, что нелинейный отклик ТПС можно найти в квазилинейном приближении. Уравнения и граничные условия для осциллирующей (волновой) составляющей течения в ТПС такие же, как в линейной задаче, однако характеристики среднего течения находятся с учетом влияния квадратичных по амплитуде волновых напряжений. Условия применимости квазилинейного приближе-

ния обсуждались в работах [8, 9]. Другое важное свойство нелинейного отклика состоит в том, что его можно определять без учета предыстории расширения ТПС.

Главный член разложения по $ka \ll 1$ для смещения поверхности и возмущений поверхностного давления представим в виде

$$(w, p) = (1/2)(\hat{w}, \hat{p}) \exp(ik(x - ct)) + \text{к.с.}, \quad (1)$$

где c — фазовая скорость; $|\hat{w}| = a$ — амплитуда прогиба; символом “ \wedge ” обозначена комплексная амплитуда волнового возмущения; к.с. — комплексно-сопряженное выражение. Отклик ТПС на волнистый прогиб поверхности будем характеризовать комплексной упругостью потока $K_A(c, k) = \hat{p}/\hat{w}$, которая в квазилинейном приближении является функцией $(ka)^2$ и может рассматриваться также в качестве присоединенной упругости [7]. При малых ka для безразмерной упругости потока получим

$$Y = \frac{K_A}{\rho_0 k U^2} \simeq Y_0 + (ka)^2 Y_1, \quad (2)$$

где ρ_0 — плотность жидкости. Главный член разложения в правой части (2) Y_0 совпадает с линейной упругостью потока, вычисленной в [7], коэффициент Y_1 характеризует нелинейные свойства отклика ТПС. Согласно [8] условием применимости квазилинейного приближения является наличие в (2) численно большого коэффициента при $(ka)^2$: $|Y_1|/|Y_0| \gg 1$, где в качестве $|Y_1|$ и $|Y_0|$ берутся характерные значения величин.

Деформацию поверхности упругого покрытия при внешнем воздействии на него можно характеризовать комплексной упругостью $K_0 = -\hat{p}/\hat{w}$. В работе [7] предложена мембранная модель отклика однослойного покрытия, в которой безразмерная упругость $\bar{K}_0 = K_0 d / (\rho_s c_t^2)$ представляется в виде

$$\bar{K}_0 \approx \bar{m} \alpha^2 (\bar{c}_0^2 - c^2) - i \gamma_t b_0 \alpha \bar{c}, \quad (3)$$

где $\alpha = kd$ — безразмерное волновое число; $\bar{c} = c/c_t$ — безразмерная фазовая скорость; \bar{m} , \bar{c}_0 и b_0 — функции α , имеющие смысл параметров эффективной мембраны; γ_t — параметр потерь в покрытии (коэффициент b_0 не зависит от γ_t и связан с введенным в [7] коэффициентом \bar{b} соотношением $b_0 = \bar{b}/\gamma_t$).

Определение нелинейного отклика упругого слоя является трудоемкой задачей, при решении которой необходимо учитывать нелинейность тензора деформаций и вторую гармонику упругих полей. Поскольку нелинейность тензора деформаций характеризуется параметром $ka \ll 1$, можно предположить, что она будет играть второстепенную роль по сравнению с “большой” (в указанном выше смысле) нелинейностью отклика ТПС. Поэтому ограничимся оценкой деформационной нелинейности покрытия, подтверждающей эти соображения.

Заменим покрытие пластиной, прикрепленной к распределенному пружинному основанию [3]. Используя приближение тонкой пластины, для периодического прогиба такого модельного покрытия можно записать уравнение Кармана (см., например, [10])

$$m w_{tt} - T w_{xx} + B w_{xxxx} + K_E w - \left[\frac{6B}{d^2 \lambda} \int_x^{x+\lambda} (w_{x'})^2 dx' \right] w_{xx} + b w_t = -p, \quad (4)$$

где $m = \rho_s d$ — поверхностная плотность пластины; T — коэффициент натяжения; $B = G d^3 / [6(1 - \mu)]$ — изгибная жесткость ($\mu \approx 0,5$ — коэффициент Пуассона); K_E — упругость пружинного основания; b — коэффициент поглощения; $\lambda = 2\pi/k$ — период прогиба.

Подставляя в (4) поверхностное давление (1) и определяя w как разложение по степеням $ka \ll 1$, нетрудно найти главный нелинейный член этого разложения и убедиться,

что он не зависит от присутствия в выражении для p второй гармоники, если она является величиной $O[(ka)^2]$. В этом случае выражение для нелинейной упругости пластины (4) с точностью до членов порядка $(ka)^2$ записывается в форме, аналогичной (2):

$$\bar{K}_{NL} = -\hat{p}/\hat{w} \approx \bar{K}_0 + \bar{K}_1(ka)^2, \quad (5)$$

где $\bar{K}_1 = (kd)^2/[2(1-\mu)]$ — коэффициент нелинейности. При этом \bar{K}_0 в разложении (5) заменяется выражением (3).

Используя определения Y и \bar{K}_{NL} , нелинейное дисперсионное соотношение для гидроупругих волн можно представить в виде

$$\bar{K}_0(\bar{c}, \alpha) + \alpha q V^2 Y_0(\bar{c}, \alpha; V) + [\bar{K}_1(\bar{c}, \alpha) + \alpha q V^2 Y_1(\bar{c}, \alpha; V)](ka)^2 = 0, \quad (6)$$

где $q = \rho_0/\rho_s$ — отношение плотностей движущейся жидкости и упругого слоя; $V = U/c_t$ — безразмерная скорость потока. Уравнение (6) является обобщением дисперсионного соотношения линейной теории [7] на случай слабонелинейных гидроупругих волн.

2. Расчет нелинейной комплексной упругости пограничного слоя. Для вычисления нелинейной упругости потока Y воспользуемся результатами работы [8]. В рамках приближений, о которых сказано в п. 1, в [8] получена система уравнений Прандтля для функции тока и завихренности среднего (по периоду волнистости) течения в ТПС, содержащая волновые напряжения второго порядка по малому наклону поверхности $ka \ll 1$. При этом квазилинейная система уравнений для комплексных профилей первых гармоник функции тока и завихренности совпадает с полученной в [9] для параллельного течения в атмосферном ТПС. Для решения уравнений Прандтля в [8] предложено использовать двухмасштабный подход (приближение “локального подобия”), в рамках которого возникает краевая задача в обыкновенных производных, определяющая локальную структуру ТПС в произвольном сечении по x . Среднее течение в ТПС характеризуется динамической скоростью u_* , толщиной вытеснения δ^* , локальным числом Рейнольдса $Re = U\delta^*/\nu_0$ (ν_0 — кинематическая молекулярная вязкость жидкости) и безразмерным градиентом давления $\beta_1 = (\delta^*/(\rho_0 U^2))dP/dx$ (P — давление во внешнем потоке).

Задача о гидроупругой неустойчивости обычно ставится для мелкомасштабной волнистости ($k\delta \gg 1$). Проведенные в [8] вычисления показали, что воздействие такой волнистости на среднее течение локализуется в основном в пристеночной области ($\eta \ll \delta$). Поэтому автомодельное среднее течение во внешней области ТПС (области следа) остается автомодельным при появлении волнистости. В пристеночной области среднее течение является локально-параллельным и описывается уравнениями для параллельного течения, полученными в [9]. Это согласуется с классическими представлениями о влиянии шероховатости, согласно которым в ее присутствии изменяется постоянная логарифмического закона стенки, что в конечном счете ведет к изменению коэффициента сопротивления.

Предложенная в [8] численная процедура решения краевой задачи позволяет по известным “входным” параметрам Re , β_1 , $k\delta^*$ и c/U определить “выходные” параметры: u_*/U , $d\delta^*/dx$, коэффициент сопротивления и Y . Отметим, что в соответствии с теорией ТПС на плоской поверхности [11] автомодельное течение в следе существует только при не слишком больших по абсолютной величине отрицательных градиентах давления: $\beta_1 \geq -0,5(u_*/U)^2$.

Реализованный в [8] подход позволяет рассчитать нелинейный отклик ТПС при фиксированном значении Re . Однако при введении волнистости значения δ^* и Re не остаются постоянными при $x = \text{const}$ и зависят от предыстории расширения ТПС (рис. 1). Вопрос о влиянии приращения δ^* на величину Y важен также в связи с тем, что в реальных условиях амплитуда волнистости может изменяться вдоль x .

Для оценки влияния приращения δ^* проводилось выборочное прямое решение полной системы уравнений Прандтля в частных производных. Переход к нормированным переменным производился так же, как в [8], однако в уравнениях сохранялись производные по x .

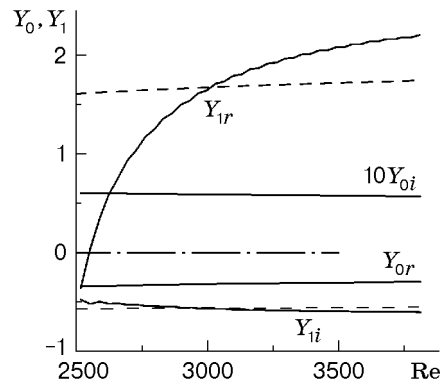


Рис. 2

Решение находилось методом линий [11]. Схема дискретизации по x взята из работы [12]. Краевая задача в обыкновенных производных, возникающая на каждом шаге по x , решалась методом итераций, однако в отличие от [12] использовался метод дифференциальной прогонки, позволяющий значительно уменьшить шаг дискретизации вдоль x .

На рис. 2 показано поведение коэффициентов разложения упругости потока (2) $Y_0 = Y_{0r} + iY_{0i}$ и $Y_1 = Y_{1r} + iY_{1i}$, рассчитанных в рамках локального подхода и с помощью прямого численного решения уравнений Прандтля (сплошные кривые — прямое решение уравнений Прандтля для среднего течения при $Re(x_0) = 2500$; штриховые — расчет в рамках локальной теории; $c/U = 0$, $k\delta^*(x_0) = 0,67$). Задача в частных производных решалась при условии, что с плоской поверхности на волнистость набегают ТПС, имеющий автономную область следа: в сечении $x = x_0$ для примера, показанного на рис. 2, $Re = 2500$, $u_*/U = 0,0418$, $\delta/\delta^* = 6,35$, $d\delta^*/dx = 0,0025$. При этом локальное число Рейнольдса нарастает вниз по потоку почти по линейному закону:

$$Re(x) - Re(x_0) \simeq \mu_1(x - x_0)/\delta^*(x_0), \quad (7)$$

где $\mu_1 \approx 5,43$. Максимальное значение $x - x_0$ для интервала по Re , показанного на рис. 2, составляет приблизительно $40\delta(x_0)$, что соответствует длине упругой вставки в экспериментах [1, 6]. Толщина ТПС увеличивается на этом интервале в 1,5 раза.

Как показано на рис. 2, мнимые части нелинейного коэффициента Y_1 , полученные в рамках локального подхода и при прямом решении уравнений Прандтля, практически одинаковы. Объяснение состоит в том, что Y_{1i} определяется в основном профилем скорости локально-параллельного среднего течения в буферной области ТПС. Действительная часть Y_1 в большей степени зависит от течения во внешней области. Однако и в этом случае на расстояниях $x - x_0 \approx 15\delta(x_0)$ коэффициент Y_{1r} , рассчитанный при прямом численном решении, оказывается близким к его значению, полученному в рамках локальной теории. Фактически проведенный расчет подтверждает гипотезу о слабом влиянии приращений δ^* на квадратичную по ka составляющую Y_r . В рамках локальной теории этот результат можно объяснить слабой зависимостью Y_r от числа Рейнольдса Re . Линейная упругость Y_0 определяется одинаково при прямом интегрировании уравнений Прандтля и при использовании локальной теории. Данные на рис. 2 относятся к медленным (дивергентным) волнам, для которых характерны фазовые скорости $c \leq 0,05U$ [6]. Аналогичные результаты получены для быстрых волн, имеющих фазовую скорость $c \approx (0,3 \div 0,4)U$ [1].

Таким образом, члены второго порядка малости разложения упругости потока по наклону поверхности, полученные в рамках локального подхода, незначительно отличаются от истинных значений, поэтому основные расчеты Y_0 , Y_1 проводились в рамках локального подхода. Установлено, что Y_0 и Y_1 слабо зависят от введения отрицательного градиента

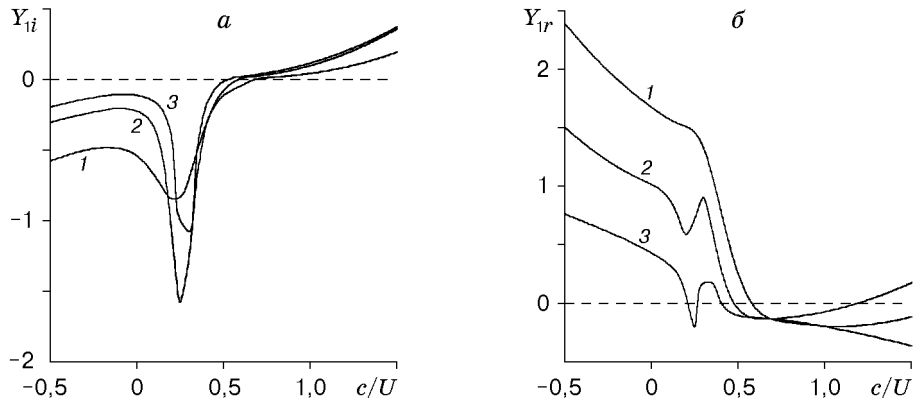


Рис. 3

давления $\beta_1 < 0$, характерного для экспериментов в гидроканалах. Такая зависимость становится существенной только для β_1 , близких к предельному значению, указанному выше. Приводимые далее результаты относятся к случаю $\beta_1 = 0$.

Для линейной части упругости Y_0 в [7] предложена квазипотенциальная аппроксимация вида

$$Y_0 \simeq -\left(\frac{c}{U} - f\right)^2 + \delta Y_0, \quad (8)$$

где $f < 1$ — параметр редукции статической упругости потенциального течения. В [7] даны аналитические аппроксимации зависимости f от $k\delta^*$ и Re , а также приведены результаты вычисления диссипативной составляющей упругости δY_0 .

На рис. 3, *a, б* представлены расчетные зависимости мнимой и действительной частей нелинейного параметра Y_1 от безразмерной фазовой скорости возмущения при $Re = 3000$ (кривые 1–3 соответствуют $k\delta^* = 1, 3, 6$). Видно, что нелинейность увеличивает действительную часть упругости потока ($Y_{1r} > 0$ при достаточно малых c) и уменьшает положительную мнимую часть упругости, определяющую приток энергии из ТПС к волнистой поверхности ($Y_{1i} < 0$ при $Y_{0i} > 0$).

3. Нелинейная стабилизация неустойчивости. Исследование генерации квазимонохроматических волн конечной амплитуды будем проводить на основе эволюционного уравнения Ландау, которое позволяет описывать нелинейную стадию развития слабых неустойчивостей.

Используя соотношения (3) и (8), нелинейное дисперсионное уравнение (6) представим в виде

$$\begin{aligned} D(\Omega, \alpha; V) - \alpha^2 [\bar{K}_1(\Omega, \alpha) + \alpha q V^2 Y_1(\Omega, \alpha; V)] A^2 &= 0, \\ D = \bar{m}(\Omega^2 - \alpha^2 \bar{c}_0^2) + \frac{q}{\alpha} (\Omega - fV\alpha)^2 + i\gamma_t b_0 \Omega - \alpha q V^2 \delta Y_0, \end{aligned} \quad (9)$$

где $\Omega = \alpha \bar{c}$ — безразмерная частота; $A = a/d$ — безразмерная амплитуда волны. Как и в линейной теории [7], в (9) неявно содержатся два безразмерных параметра $Re_t = c_t \delta^* / \nu_0$ и d/δ^* .

Теория малой надкритичности. Гидроупругая неустойчивость возникает, когда скорость потока V превышает критическое значение V_c . При этом в системе поток — покрытие возбуждаются волны с частотой Ω_c и волновым числом α_c . Проведенные в [7] расчеты показали, что дисперсионное уравнение линейной задачи, которое получается из (9) при $A = 0$, описывает переход от ФБВ к волновой дивергенции при увеличении потерь в покрытии γ_t . Получим уравнение Ландау в рамках асимптотической теории, которая строится по малому параметру $\varepsilon = (V - V_c)/V_c \ll 1$.

Введем безразмерные координату $x_1 = x/d$, время $t_1 = ct/d$, умножим правую и левую части уравнения (9) на $w(x_1, t_1)$; перейдем от Ω к спектральному оператору $\hat{\Omega} = id/dt_1$ и введем $\delta\hat{\Omega} = \hat{\Omega} - \Omega_c$. Положим в (9) $D(\Omega, \alpha; V) = D_r + iD_i$ и произведем разложение D_r, D_i в окрестности критической точки по малым $\delta\hat{\Omega} \sim \varepsilon$ и $V - V_c \sim \varepsilon$. Считая, что $A = O(\varepsilon^{1/2})$, будем искать решение полученного уравнения в виде ряда по степеням ε с главной частью вида

$$w(x_1, t_1) = (1/2)\hat{w}(t_1) \exp(i\alpha_c x_1 - i\Omega_c t_1) + \text{к.с.} \quad (10)$$

Из условия ограниченности члена порядка ε в разложении w получим уравнение Ландау для комплексной амплитуды \hat{w} . С помощью стандартных преобразований перейдем к уравнению Ландау для A

$$\frac{dA}{dt_1} = (\lambda_1 - \lambda_3 A^2)A, \quad (11)$$

где коэффициенты имеют вид

$$\lambda_1 = \varepsilon \frac{D'_{rV} D'_{i\Omega} - D'_{r\Omega} D'_{iV}}{(D'_{r\Omega})^2 + (D'_{i\Omega})^2} V_c \Big|_c, \quad \lambda_3 = \alpha^2 \frac{(\bar{K}_1 + \alpha q V^2 Y_{1r}) D'_{i\Omega} - \alpha q V^2 Y_{1i} D'_{r\Omega}}{(D'_{r\Omega})^2 + (D'_{i\Omega})^2} \Big|_c \quad (12)$$

(штрихами обозначены производные по V и Ω , а индекс c показывает, что выражение вычисляется при $\alpha = \alpha_c, \Omega = \Omega_c$).

Расчеты нелинейного коэффициента λ_3 в (11) проводились при различных γ_t . При этом использовались параметры критических волн, приведенные в [7, рис. 8]. Функция $\lambda_3(\gamma_t)$ имеет “полочку” при малых γ_t , небольшой подъем при $\gamma_t \sim 0,5$ и монотонно стремится к нулю при $\gamma_t \rightarrow \infty$. Расчеты показали, что нелинейность упругости покрытия \bar{K}_1 дает малый вклад в λ_3 по сравнению с гидродинамической нелинейностью. Важный результат проведенных вычислений состоит в том, что λ_3 является положительной величиной во всем диапазоне по γ_t . Таким образом, как для быстрых волн (флаттера), так и для медленных (дивергенции) в пределах применимости квазилинейной теории реализуется мягкий режим возбуждения. При этом устанавливается стационарная генерация бегущей волны с амплитудой

$$A_* = \sqrt{\lambda_1/\lambda_3}. \quad (13)$$

Теория малой надкритичности применима при малой ширине полосы неустойчивости по волновым числам: $|\alpha - \alpha_c| \ll \alpha_c$. При этом значения амплитуд стационарных волн (13) оказываются значительно меньше реально наблюдаемых в экспериментах. Для описания более интенсивных волн необходимо отказаться от разложения по малой надкритичности ε .

Волновая дивергенция на вязкоупругом покрытии. Гидроупругая неустойчивость медленных волн наблюдается на вязкоупругих покрытиях, которые характеризуются большими потерями: $\gamma_t = 1 \div 100$ и $\gamma_t b_0 = 6 \div 600$ [7]. Это позволяет построить эволюционное уравнение, используя асимптотические разложения по малому параметру $\varepsilon_0 = 1/(\gamma_t b_0) \ll 1$ подобно тому, как это сделано в [7] при нахождении дисперсионных ветвей линейной задачи.

Разделим дисперсионное уравнение (9) на $\gamma_t b_0$, умножим его правую и левую части на $w(x_1, t_1)$ и произведем замену $\Omega \rightarrow \hat{\Omega}$. Решение будем искать в виде разложения по малому параметру ε_0 с главной частью вида

$$w(x_1, t_1) = (1/2)\hat{w}(t_1) \exp(i\alpha x_1) + \text{к.с.} \quad (14)$$

В данном случае распространение волны описывается медленным изменением комплексной амплитуды \hat{w} , а разложение коэффициентов дисперсионного уравнения производится

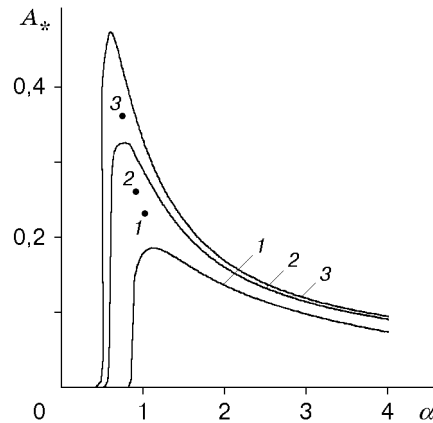


Рис. 4

по $\hat{\Omega} \sim \varepsilon_0$. Из условия ограниченности члена порядка ε_0 в разложении w получим эволюционное уравнение для комплексной амплитуды $\hat{w}(t_1)$, из которого следует уравнение Ландау для A в виде (11), но с другими коэффициентами:

$$\lambda_1 = \alpha \varepsilon_0 (q f^2 V^2 - \alpha \bar{m} \bar{c}_0^2) \Big|_{\Omega=0}, \quad \lambda_3 = \varepsilon_0 \alpha^2 (\bar{K}_1 + \alpha q V^2 Y_{1r}) \Big|_{\Omega=0}. \quad (15)$$

В (15) учтено, что $\delta Y_{0r} \approx 0 \Big|_{\Omega=0}$. Выражение для фазовой скорости медленных волн имеет вид

$$\delta \bar{c}_{NL} = \tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_3 A^2, \quad (16)$$

где $\tilde{\lambda}_1 = \varepsilon_0 q V^2 \delta Y_{0i} \Big|_{\Omega=0}$, $\tilde{\lambda}_3 = \varepsilon_0 \alpha^2 q V^2 Y_{1i} \Big|_{\Omega=0}$. Отметим, что предложенная схема вывода эволюционного уравнения применима при произвольной нелинейности отклика ТПС, так как в данном случае нелинейность должна быть малой только в связи с использованием разложения (2).

Из выражения для коэффициента λ_1 следует, что при больших потерях в покрытии возникновение неустойчивости связано с тем, что абсолютное значение действительной части упругости потока превышает статическую упругость покрытия. Нелинейное приращение упругости потока и нелинейная поправка к упругости покрытия оказывают стабилизирующее влияние на эту неустойчивость, так как $Y_{1r} > 0$ (рис. 3, б) и $\bar{K}_1 > 0$. Такая неустойчивость не зависит от мнимой части упругости потока Y_i , определяющей поток энергии из ТПС к волне [8]. Энергетическая трактовка механизма неустойчивости в данном случае неприменима, так как основной вклад в динамический отклик покрытия при больших потерях дает диссипативная составляющая его упругости (слагаемое $-i\gamma_t b_0 \alpha \bar{c}$ в (3)). При этом рост потерь не приводит к исчезновению неустойчивости, а только замедляет ее развитие. Такую неустойчивость можно характеризовать как реактивно-резистивную [7].

Критическая скорость потока находится из условия $\lambda_1 = 0$ и в данном приближении не зависит от потерь в покрытии. Поскольку $Y_{1r} > 0 \Big|_{\Omega=0}$ (рис. 3, б), при $V > V_c$ устанавливается стационарная волна с амплитудой (13). Результаты вычисления амплитуды установившихся волн в зависимости от их волнового числа представлены на рис. 4 ($d = 0,32$ см, $\delta^* = 0,45$ см, $\text{Re}_t = 350$, $q = 1$; кривые 1–3 соответствуют значениям $V = 7, 9, 11$). Вычисления показали, что основной вклад в A_* дает нелинейная часть упругости ТПС (вклад \bar{K}_1 мал).

Значения параметров ТПС и покрытия на рис. 4 соответствуют оценкам работы [7], полученным для условий экспериментов [6], в которых исследовалось возбуждение дивергентных волн. Условие малости наклонов поверхности выполнялось в [6] для двух-трех

точек на начальном участке экспериментальных зависимостей амплитуды волны от скорости потока. Экспериментальные точки 1–3 на рис. 4 получены с использованием зависимостей длины волны и ее амплитуды от скорости потока, представленных в [6, рис. 12, 15] для покрытия с модулем сдвига $G = 5 \text{ Н/м}^2$, и соответствуют тем же значениям безразмерной скорости потока V , при которых построены кривые 1–3.

Как показано на рис. 4, наблюдаемые в экспериментах амплитуды волн достигаются при умеренно малых надкритичностях, когда полоса неустойчивости (совпадающая с полосой возбуждения) становится широкой. Сравнение теории и эксперимента позволяет заключить, что экспериментальные точки располагаются вблизи максимумов зависимостей $A_*(\alpha)$. Несмотря на большую ширину полосы возбуждения, в экспериментах наблюдались когерентные волны с четко выраженным периодом. Установление таких волн можно объяснить наличием процессов нелинейного взаимодействия и конкуренции гармоник, нарастающих в полосе неустойчивости, описание которых выходит за рамки уравнения Ландау (11). Из анализа данных, представленных на рис. 4, следует, что в результате конкуренции и взаимодействия гармоник волнового пакета “выживает” квазигармоническая волна, амплитуда которой близка к максимальной в полосе неустойчивости.

Для семейства кривых 1–3 на рис. 4 критические параметры $V_c = 5,25$, $\alpha_c = 2,4$ ($A_* \rightarrow 0$ при $V \rightarrow V_c$). При увеличении скорости потока V максимум инкремента сдвигается в сторону увеличения α ($\alpha_{\max} = 2,6; 2,7; 2,8$ при $V = 7, 9, 11$ соответственно). В то же время в экспериментах [6] критическое волновое число фактически определялось как волновое число наблюдаемой волны с наименьшей амплитудой (точка 1 на рис. 4). Из представленных данных следует, что в этом случае оно оказывается приблизительно в два раза меньше значения α_c , полученного в линейной задаче. Это обстоятельство отмечалось в [7] и не находило объяснения в рамках линейной теории. Таким образом, сопоставление теории и эксперимента позволяет решить проблему “отбора” возмущений по волновому числу.

Нелинейный флаттер на покрытии с малыми потерями. При малых потерях в покрытии эффекты диссипации и нелинейности можно учесть как малые возмущения. Соответствующий малый параметр $\varepsilon_1 \ll 1$ для дисперсионного уравнения (9) можно ввести в виде отношения наибольшей из величин $\gamma_t b_0 \alpha \bar{c}_0$, $\alpha q V^2 |\delta Y_0|$, $\alpha^2 |\bar{K}_1| A^2$ и $\alpha^3 q V^2 |Y_1| A^2$ к характерному для D значению $\bar{m} \alpha^2 \bar{c}_0^2$. Необходимым условием существования такого малого параметра является малость потерь в покрытии ($\gamma_t b_0 \ll 1$). Предполагая, что малый параметр ε_1 существует, для краткости не будем выделять его в (9) в явном виде.

Обозначим через D_0 функцию D при $\delta Y_0 = 0$ и $\gamma_t = 0$. Дисперсионное уравнение $D_0(\Omega, \alpha) = 0$ определяет два семейства волн линейной консервативной задачи

$$\Omega_{1,2} = \frac{\alpha}{\bar{m}\alpha + q} \left[qVf \pm \sqrt{(\alpha\bar{m} + q)\alpha\bar{m}\bar{c}_0^2 - \alpha q\bar{m}f^2V^2} \right]. \quad (17)$$

Как показано в [7], для ТПС над покрытием с малыми потерями наименьшую критическую скорость потока имеет неустойчивость быстрых волн, находящихся на ветви $\Omega_1(\alpha)$.

Для того чтобы получить эволюционное уравнение для ФБВ, введем $\delta\hat{\Omega} = \hat{\Omega} - \Omega_0$, где $\Omega_0 = \Omega_1(\alpha)$. В данном случае в (9) производится разложение по $\delta\hat{\Omega} \sim \varepsilon_1$ в окрестности $\hat{\Omega} = \Omega_0$. Решение для w ищется в виде разложения по степеням ε_1 с главной частью вида

$$w(x_1, t_1) = (1/2)\hat{w}(t_1) \exp(i\alpha x_1 - i\Omega_0 t_1) + \text{к.с.} \quad (18)$$

В результате получим уравнение Ландау для A в форме (11) с коэффициентами

$$\lambda_1 = (\alpha q V^2 \delta Y_{0i} - \gamma_t b_0 \Omega_0) / D'_{0\Omega} \Big|_{\Omega=\Omega_0}, \quad \lambda_3 = -\alpha^3 q V^2 Y_{1i} / D'_{0\Omega} \Big|_{\Omega=\Omega_0}, \quad (19)$$

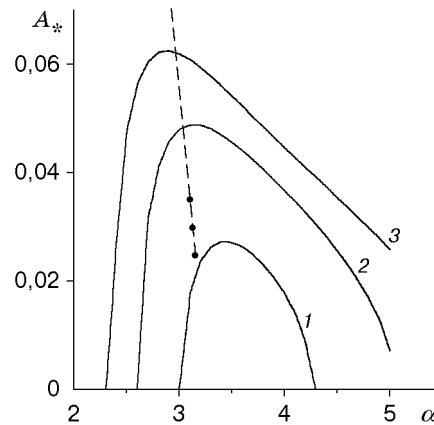


Рис. 5

где $D'_{0\Omega} = 2\Omega_0(\bar{m} + q/\alpha) - 2qfV$ — производная D_0 по Ω . Поправка к фазовой скорости консервативных волн имеет вид (16), где $\tilde{\lambda}_1 = qV^2\delta Y_r/D'_{0\Omega}|_{\Omega=\Omega_0}$, $\tilde{\lambda}_3 = \alpha(\bar{K}_1 + \alpha qV^2 Y_{1r})/D'_{0\Omega}|_{\Omega=\Omega_0}$.

Можно показать, что знак энергии волн в консервативной задаче (17) совпадает со знаком $\Omega_0 D'_{0\Omega}$. Так как для быстрых волн $D'_{0\Omega} > 0$ и $\Omega_0 > 0$, их энергия положительна. Из выражения (19) для λ_1 следует, что дестабилизация быстрых волн возможна при $Y_{0i} > 0$, т. е. при наличии потока энергии к волне от среднего течения в ТПС (механизм Майлса). Как показано в [7], знак Y_{0i} становится положительным при увеличении скорости течения. Поскольку нелинейность оказывает стабилизирующее действие на эту неустойчивость: $\lambda_3 > 0$ при $Y_{1i} < 0$ (см. рис. 3,а), возникает стационарная волна с амплитудой (13). Заметим, что критическая скорость потока и параметры быстрых волн на пороге неустойчивости, найденные в рамках приближенного уравнения (11) с коэффициентами (19), при малых потерях близки к полученным численно в [7].

Результаты вычисления зависимости амплитуды установившихся волн от их волнового числа показаны на рис. 5 при $d = 0,32$ см, $\delta^* = 0,41$ см, $Re_t = 1113$, $\gamma_t = 0,014$, $q = 1$ (кривые 1–3 соответствуют значениям $V = 2,8; 2,9; 3,0$). Возникновение ФБВ на покрытии в ТПС изучалось экспериментально в [1]. В данном случае при сравнении теории с экспериментом из-за более сильного разброса экспериментальных точек для ФБВ использованы сглаженные зависимости амплитуды и длины волны от скорости потока, приведенные в [1, рис. 13, 14] для покрытия с $G = 74$ Н/м². С учетом этих зависимостей построена усредненная кривая экспериментальных данных (штриховая линия на рис. 5). На нее наносились точки, соответствующие значениям $V = 2,8; 2,9; 3,0$ (рис. 5). Параметр потерь γ_t выбирался так, чтобы приблизить к теоретической кривой экспериментальную точку, которая соответствует наименьшему значению V .

На рис. 5 кривая экспериментальных данных располагается вблизи максимумов теоретических зависимостей $A_*(\alpha)$. В данном случае $V_c = 2,77$, $\alpha_c = 3,6$. Волновое число в максимуме инкремента линейной неустойчивости увеличивается с ростом V ($\alpha_{max} = 3,6; 3,8; 4,0$ при $V = 2,8; 2,9; 3,0$ соответственно). Как следует из представленных данных, сдвиг по волновому числу между максимумом инкремента и экспериментальной точкой с наименьшим значением A_* в данном случае незначителен, поэтому критическое волновое число для ФБВ, измеренное в экспериментах, согласуется с расчетом в рамках линейной теории [7]. Сопоставляя теоретические и экспериментальные данные для ФБВ, можно предположить, что, как и в случае медленных волн, нелинейные процессы конкуренции и взаимодействия гармоник пакета приводят к “выживанию” гармоники, амплитуда кото-

рой близка к максимальной в полосе неустойчивости. Как показано на рис. 5, для ФБВ расчетная амплитуда растет быстрее при увеличении скорости потока. Возможной причиной такого расхождения могут быть неучтенные демпфирующие факторы (например, влияние второй гармоники прогиба).

Отметим, что амплитуды стационарных волн могут быть определены непосредственно из нелинейного дисперсионного уравнения (9). Численное решение уравнения (9) относительно Ω и A приводит к амплитудным зависимостям, которые близки к представленным на рис. 4, 5. Использованный выше переход к уравнению Ландау (11) позволил искать решение нелинейной задачи с учетом известных результатов линейной теории и выяснить механизмы стабилизации гидроупругой неустойчивости. Кроме того, предложенная схема вывода уравнения Ландау для покрытий с малыми и большими потерями в дальнейшем может быть обобщена на случай многоволнового прогиба поверхности (возбуждения волновых пакетов).

Заключение. В данной работе развита нелинейная теория генерации слабых квази-монохроматических волн на поверхности упругого покрытия в турбулентном пограничном слое потока несжимаемой жидкости. Нелинейное дисперсионное уравнение сформулировано в терминах комплексной упругости потока и покрытия, что позволяет максимально использовать результаты решения линейной задачи, рассмотренной в предыдущей работе авторов [7]. Показано, что при малых наклонах поверхности ($ka \ll 1$) ограничение гидроупругой неустойчивости определяется гидродинамической нелинейностью, возникающей в результате деформации профиля скорости среднего (по периоду волнистости) течения в пограничном слое под действием волнистости.

Сопоставление построенной слабонелинейной теории с известными экспериментальными данными позволяет сделать вывод о “выживании” волн с максимально возможной амплитудой в полосе неустойчивости при данной скорости потока. При этом находит объяснение тот факт, что критическое волновое число дивергентных волн в эксперименте значительно (приблизительно в два раза) меньше его теоретического значения, полученного в рамках линейной теории, тогда как для ФБВ такое различие мало.

В то же время остается неясным, почему в экспериментах после потери устойчивости наблюдались волны, амплитуды которых имели некоторое конечное значение (фактически на графиках отсутствует область очень малых надкритичностей). Отметим также, что в случае волновой дивергенции при возрастании скорости потока быстро становится непригодным приближение квазимонохроматической волны, поскольку в полосу неустойчивости попадают резонансные кратные гармоники первичного возмущения.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Gad-el-Hak M.** Boundary layer interactions with compliant coatings. An overview // *Appl. Mech. Rev.* 1986. V. 39, N 4. P. 511–523.
2. **Кулик В. М., Погуда И. С., Семенов Б. Н.** Экспериментальное исследование воздействия однослойных вязкоупругих покрытий на турбулентное течение и пульсации давления на стенке // *Инж.-физ. журн.* 1984. Т. 47, № 2. С. 189–196.
3. **Carpenter P. W., Garrad A. D.** The hydrodynamic stability of flow over Kramer-type compliant surfaces. Pt 2. Flow induced surface instabilities // *J. Fluid Mech.* 1986. V. 170. P. 199–231.
4. **Pierce R.** The Ginzburg — Landay equation for interfacial instabilities // *Phys. Fluids A.* 1992. V. 4, N 11. P. 2486–2494.
5. **Rotenberry J. M.** Finite-amplitude shear waves in a channel with compliant boundaries // *Phys. Fluids A.* 1992. V. 4, N 2. P. 270–276.

6. **Gad-el-Hak M., Blackwelder R. F., Riley J. J.** On the interaction of the compliant coatings with boundary layer flows // J. Fluid Mech. 1984. V. 140. P. 257–280.
7. **Reutov V. P., Rybushkina G. V.** Hydroelastic instability threshold in a turbulent boundary layer over compliant coating // Phys. Fluids. 1998. V. 10, N 2. P. 417–425.
8. **Реутов В. П.** Нелинейные характеристики взаимодействия турбулентного пограничного слоя с волнистой поверхностью // ПМТФ. 1998. Т. 39, № 6. С. 72–84.
9. **Реутов В. П., Троицкая Ю. И.** О нелинейных эффектах при взаимодействии волн на воде с турбулентным ветром // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1995. Т. 36, № 6. С. 825–834.
10. **Lucey A. D., Carpenter P. W.** A numerical simulation of the interaction of a compliant wall and inviscid flow // J. Fluid Mech. 1992. V. 234. P. 121–146.
11. **Федяевский К. К., Гиневский А. С., Колесников А. В.** Расчет турбулентного пограничного слоя несжимаемой жидкости. Л.: Судостроение, 1973.
12. **Меллор Дж. Л.** Несжимаемый турбулентный пограничный слой при произвольном градиенте давления с расходящимся или сходящимся поперечным протеканием // Ракет. техника и космонавтика. 1967. Т. 5, № 9. С. 43–53.

*Поступила в редакцию 2/III 1999 г.,
в окончательном варианте — 16/VI 1999 г.*
