УДК 532.582.7 + 532.516.5

ДВИЖЕНИЕ СФЕРИЧЕСКОЙ ТВЕРДОЙ ЧАСТИЦЫ В НЕОДНОРОДНОМ ПОТОКЕ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

В. С. Купцов

(*Воронеж*)

Изучено влияние частицы на основной поток и построены уравнения движения частицы. Задача решена в приближении Стокса с точностью до куба отношения радиуса сферы к расстоянию от центра сферы до особенностей основного потока. Аналогичная задача о движении сферы в неоднородном потоке идеальной жидкости рассмотрена в работе [1]. Отметим, что известно решение в случае обтекания двух сфер медленным равномерным потоком вязкой несжимаемой жидкости [2], а также работы по движению малой частицы в круглой трубе [3,4].

Рассмотрим медленное течение (без частицы) вязкой несжимаемой жидкости. Пусть y_i — неподвижная система координат, тогда скорость и давление этого течения будут удовлетворять уравнениям

$$\mu \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial^2 u_i^0}{\partial y_j^2} = \frac{\partial p^0}{\partial y_i}; \quad \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial u_i^0}{\partial y_i} = 0, \tag{1}$$

где u_i^0 — проекции вектора скорости на оси координат y_i; p^0 — гидродинамическое давление; μ — динамический коэффициент вязкости; $i = 1, 2, 3$.

Введем новую систему координат x_i, координаты центра которой в системе координат y_i равны q_i. Связь между координатами имеет вид

$$y_i = x_i + q_i.$$

Решение (1) будем считать заданным в системе координат x_i в виде

$$u_i^0 = u_i + u_i', \quad p^0 = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{\partial^m p^0}{\partial y_j \ldots \partial y_k} (\mathbf{q})\, x_j \ldots x_k, \tag{2}$$

где u_i — общее решение однородных уравнений (1); u_i' — частное решение (1). Используя результаты работы [5], их можно представить в форме

$$u_i = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)!} \left\{ \frac{\partial^m u_s}{\partial y_j \ldots \partial y_k} (\mathbf{q}) \frac{\partial}{\partial x_i} [(x_s + q_s)\, x_j \ldots x_k] + \right. \tag{3}$$
$$\left. + m \frac{\partial^m \chi^0}{\partial y_j \ldots \partial y_k} (\mathbf{q}) [x_\alpha \delta_{j\beta} - x_\beta \delta_{j\alpha}]\, x_\gamma \ldots x_k \right\};$$

$$u_i' = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\mu m!} \frac{\partial^m p^0}{\partial y_j \ldots \partial y_k} (\mathbf{q}) \left[\frac{r^2}{2(2m+1)} \frac{\partial}{\partial x_i} (x_j \ldots x_k) + \right. \tag{4}$$
$$\left. + \frac{m r^{2m+3}}{(m+1)(2m+1)(2m+3)} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{x_j \ldots x_k}{r^{2m+1}} \right) \right],$$

где $\alpha \neq \beta \neq i$, $j + \ldots + k = m$, $\gamma + \ldots + k = m - 1$, а также принимается суммирование по повторным индексам; δ_{ij} — тензор Кронекера; $\mathbf{q} = \{q_1, q_2, q_3\}$; $r^2 = x_s x_s$.

Функция χ^0 удовлетворяет соотношению

$$\frac{\partial\chi^0}{\partial y_i} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial y_\beta} - \frac{\partial u_\beta}{\partial y_\alpha}. \tag{5}$$

В выражениях (3) — (5) χ^0, u_i, p^0 — гармонические функции.

Поместим в точку $y_i = q_i$ центр сферы. Предполагая, что возмущенное сферой течение вновь описывается уравнениями вида (1), решение для обтекания сферы неоднородным потоком можно искать с помощью формул, подобных (2) — (4). Представим

$$v_i = u_i^0 + v_i' + v_i''; \quad p = p^0 + p', \tag{6}$$

где функции v_i', v_i'', p' дают добавок к основному потоку за счет введения в него сферы, и они должны быть выбраны так, чтобы на больших расстояниях от сферы их влияние было очень малым в отношении величин v_i, p.

На сфере выполняется условие прилипания

$$v_i|_{r=a} = 0, \tag{7}$$

где a — радиус сферической частицы.

Представим v_i', v_i'', p' в виде

$$v_i' = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)!}\left[\frac{\partial^m u_s}{\partial y_j \ldots \partial y_k}(\mathbf{q})\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{c_m a^{2m+3}}{r^{2m+3}} x_s x_j \ldots x_k + \right.\right. \tag{8}$$

$$\left.\left. + \frac{c_m' a^{2m+1} q_s}{r^{2m+1}} x_j \ldots x_k\right) + \frac{m c_m'' a^{2m+1}(x_\alpha \delta_{j\beta} - x_\beta \delta_{j\alpha})}{r^{2m+1}} \frac{\partial^m \chi^0}{\partial y_j \ldots \partial y_k}(\mathbf{q}) x_\gamma \ldots x_k\right];$$

$$v_i'' = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m a^{2m+3}}{\mu m!} \frac{\partial^m u_s}{\partial y_j \ldots \partial y_k}(\mathbf{q})\left[\frac{(m+2) r^{-2m-1}}{(m+1)(2m+1)(2m+3)} \frac{\partial}{\partial x_i} \times \right. \tag{9}$$

$$\left. \times (x_s x_j \ldots x_k) - \frac{r^2}{2(2m+3)} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{x_s x_j \ldots x_k}{r^{2m+3}}\right)\right];$$

$$p' = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m a^{2m+3}}{m! r^{2m+3}} \frac{\partial^m u_s}{\partial y_j \ldots \partial y_k}(\mathbf{q}) x_s x_j \ldots x_k, \tag{10}$$

где c_m, c_m', c_m'', b_m — неизвестные постоянные, соответствующие конкретному набору произведений $x_j \ldots x_k$.

Подставим выражения (8), (9) в (6) и, используя условия (7), получим систему уравнений для определения неизвестных постоянных

$$\begin{gathered} c_m A_i^m + A_0^m c_{m+1}' - B_0^m c_m'' + b_m L_i^m = D_i^m; \\ c_m A_l^m + A_0^m c_{m+1}' - b_m N^m = T^m, \end{gathered} \tag{11}$$

где $i = 1, 2, 3$; $\quad A_0^m = \dfrac{q_s}{(m+2)} \dfrac{\partial^{m+1} u_s}{\partial y_l \partial y_j \ldots \partial y_k}(\mathbf{q})$;

$$A_i^m = \frac{\partial^m u_i}{\partial y_j \ldots \partial y_k}(\mathbf{q}); \quad L_i^m = -\frac{a^2(2m^2 + m - 3)}{2(2m+1)(2m+3)\mu} A_i^m;$$

$$B_0^m = \frac{m}{m+1}\left[\frac{\partial^m \chi^0}{\partial y_\alpha \partial y_j \ldots \partial y_k}(\mathbf{q}) \delta_{\beta j} - \frac{\partial^m \chi^0}{\partial y_\beta \partial y_j \ldots \partial y_k}(\mathbf{q}) \delta_{\alpha j}\right];$$

$$D_i^m = -\frac{a^2(2m^2+11m+12)}{2\mu(m+2)(2m+3)(2m+5)}\frac{\partial^{m+1}p^0}{\partial y_i \partial y_j \ldots \partial y_k}(\mathbf{q}) - A_i^m - A_0^m + B_0^m;$$

$$N^m = \frac{a^2(m+1)}{2\mu(2m+3)}A_l^m; \quad T^m = -\frac{a^2(m+1)}{(m+2)(2m+3)(2m+5)\mu}\frac{\partial^{m+1}p^0}{\partial y_l \partial y_j \ldots \partial y_k}(\mathbf{q}).$$

Из краевых условий (7) следует, что $c_0' = 0$. Без ограничения общности удобно положить $c_m' = -1$ при $m = 1,2\ldots$

Разрешая систему (11), определим c_m, c_m'', b_m

$$c_m = -\frac{a^2(2m^2+m-3)\left(T^m - D_l^m\right)}{2\mu(2m+1)(2m+3)\left(L_l^m + N^m\right)} + \frac{D_l^m - A_0 C_{m+1}' + B_0^m C_m''}{A_l^m};$$

$$b_m = -\frac{T^m - D_l^m}{L_l^m + N^m}; \quad c_m'' = \frac{b_m L_1^m + c_m A_1^m - A_0^m - D_1^m}{B_0^m}.$$

Из последнего выражения для c_m'' следует, что $B_0^m \neq 0$. Если $B_0^m = 0$, то, согласно (8), c_m'' необходимо положить равным нулю. Подставляя найденные значения b_m, c_m, c_m', c_m'' в (8) — (10), из выражений (6) получим соотношения для определения поля скоростей и давления. Краевые условия для основного гидродинамического потока в построенном решении выполнимы в силу (8) — (10) с точностью до $(a/L)^3$, где L — расстояние от центра сферы до границ основного потока.

Определим силу, действующую на сферическую частицу,

$$F_l = \int_{s_a} \sigma_{il} n_i ds, \tag{12}$$

где $\sigma_{il} = -p\delta_{il} + \mu(\partial v_i/\partial x_l + \partial v_l/\partial x_i)$; s_a — площадь поверхности сферы; n_i — компоненты внешней нормали к сфере.

При вычислении силового воздействия на сферу по формуле (12) использовались соотношения для скорости и давления, при этом, пренебрегая членами порядка выше $(a/L)^3$, получим интегралы типа $\int_{s_a} n_i ds$, $\int_{s_a} x_l n_i ds$, $\int_{s_a} x_j x_k n_i ds$, $\int_{s_a} x_k x_j x_m n_i ds$, которые вычисляются согласно [1].

Окончательно выражение для силы, действующей на сферическую частицу, удерживаемую в состоянии покоя, получаем в виде

$$F_l = 6\pi\mu a u_l(\mathbf{q}) + 3\pi\mu a q_s(\partial u_s/\partial y_l)(\mathbf{q}) + \pi a^3 \times (\partial p^0/\partial y_l)(\mathbf{q}). \tag{13}$$

Из формулы (13) можно получить силовое воздействие на сферу, помещенную в равномерный поток, т. е.

$$u_l(\mathbf{q}) = u_l = \text{const}, \; p^0 = \text{const}, \; F_l = 6\pi\mu a u_l.$$

Формула (13) согласуется с результатами работ [3, 4] о движении малой сферической частицы в круглой трубе.

В силу линейности системы уравнений (1) можно сложить силовые воздействия на сферу, которые получаются при обтекании сферы неоднородным потоком, а также при движении сферы в покоящейся жидкости. Сумма силовых воздействий при этом должна равняться нулю

$$F_l + F_l' = 0, \tag{14}$$

где $F_l' = -6\pi\mu a dq_l/dt$ — формула Стокса для определения силового воздействия на движущуюся сферу в покоящейся жидкости. Согласно формулам (13) и (14), получим

$$dq_l/dt = u_l(\mathbf{q}) + (1/2)q_s(\partial u_s/\partial y_l)(\mathbf{q}) + (a^2/6\mu) \times \times (\partial p^0/\partial y_l)(\mathbf{q}), \tag{15}$$

где t — время.

Полученные уравнения (15) описывают движение центра частицы в неоднородном потоке вязкой несжимаемой жидкости.

Поступила 6 X 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. **Воинов О. В.** О силе, действующей на сферу в неоднородном потоке идеальной несжимаемой жидкости.— ПМТФ, 1973, № 4.
2. **Wakiva Shoichi.** Slow motions of a viscous fluid around two spheres.— «J. Phys. Soc. Lapan», 1967, vol. 22, №4.
3. **Greenstein T., Happel J.** Theoretical study of the slow motion of a sphere and a fluid in a cylindrical tube.— «J. Fluid mech.», 1968, vol. 34, N 4.
4. **Brenner H.** Hydrodynamic resistance of particles at small Reynolds numbers.— In: Advances in Chemical Engineerino Vol. 6. N. Y., Academic Press, 1966.
5. **Ламб Г.** Гидродинамика. Л., ГИТТЛ, 1947.

УДК 532.517.4

К ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕМЕШИВАНИЯ ГРАНИЦЫ РАЗДЕЛА ЖИДКОСТЕЙ В ПОЛЕ ТЯЖЕСТИ

В. Е Неуважаев, В. Г. Яковлев

(*Челябинск*)

Теория турбулентного перемешивания границы раздела двух сред, движущихся ускоренно, построена в работе [1], для несжимаемых жидкостей дано приближенное решение; в уравнении баланса кинетической энергии турбулентного движения пренебрежено изменением кинетической энергии во времени.

В работе [2] проведено усреднение характерной турбулентной скорости по области перемешивания. Это позволило проинтегрировать исходные уравнения с учетом изменения кинетической энергии во времени. Оказалось, что найденный профиль плотности примерно совпал с профилем работы [1] в широком диапазоне изменения начального перепада плотностей.

В данной работе изучаются уравнения для перемешивания несжимаемых жидкостей в полной постановке. Установлено, что решения [1, 2] имеют ограниченную область применения, справедливую при малых отношениях плотностей. Проведен качественный анализ полученного решения и показано, что градиент плотности на фронте перемешивания имеет разрыв. Исследована зависимость решения от двух эмпирических постоянных. На основании теоретических соображений [2, 3] и сравнения с решением [1] сделан приближенный выбор значений этих постоянных. Найдена численная зависимость несимметрии перемешивания от начального перепада плотностей. Количественные характеристики решения иллюстрируются на графиках.

1. Постановка задачи. Для описания турбулентного перемешивания двух веществ постоянной плотности ρ_1 и ρ_2, находящихся в поле тяжести g_0, строится полуэмпирическая теория. Вводится характерная турбу-