

контакта приводит к значительному уменьшению максимума предельной скорости и оптимальной массы; 3) для корректного расчета температурного поля в области металлического контакта необходимо учитывать перенос энергии за счет теплопроводности; 4) увеличение проводимости рельсов по сравнению с проводимостью тела ведет к росту максимума предельной скорости, и при $\sigma_r \rightarrow \infty$ результаты будут совпадать со случаем индукционного ускорения.

ЛИТЕРАТУРА

1. Кнопфель Г. Сверхсильные импульсные магнитные поля. — М.: Мир, 1972.
2. Cowan M. Ultimate velocity for induction launchers // 6th IEEE Pulsed Power Conf., Arlington, 1987. — P. 634—638.
3. Drake P.A., Rathmann C.E. Two dimensional current diffusion an EML rail with constant properties // 3rd Sympos. on Electromagnetic Launch Technology, Austin, 1986: Proc. — N.Y., 1986. — P. 49—52.
4. Long J.C., Weldon W.F. Limits to the velocity of solid armature in railgun // IEEE Trans. on Magnetics. — 1989. — V. 25, N 1. — P. 347—352.
5. Базилевский В.П., Заятдинов Р.М., Кареев Ю.А. Кризис электропроводности высокоскоростного металлического контакта // Материалы II Всесоюз. семинара по динамике силовых дуговых разрядов в магнитном поле, Новосибирск, 4—6 декабря 1991 г. — Новосибирск: ИТ СО РАН, 1992. — С. 285—304.
6. Глинов А.П., Колядин Н.М., Полтанов А.Е. и др. Исследование кризиса металлического контакта в РЭУ с переходом к электродуговому замыканию тока // Там же. — С. 315—339.

г. Новосибирск

Поступила 25/X 1993 г.

УДК 533.6.01

А.Н. Богданов

РЕЛАКСАЦИОННЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕРАВНОВЕСНОГО ГАЗА, ЗАПОЛНЯЮЩЕГО КАНАЛ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ

Релаксационные колебания совершенного газа (периодические изменения параметров среды, то медленные, то очень быстрые, близкие к разрывным) в канале переменного сечения рассмотрены в [1]. Такие колебания возникают при близости частоты внешних возмущений (падающих на открытый конец канала или вызываемых колеблющимся у конца канала поршнем) к частоте возможных собственных колебаний газа в канале. Отличительной особенностью этих колебаний служит появление периодических ударных волн. В литературе это явление называется также нелинейными окolorезонансными колебаниями [2—7].

Проведенное ниже исследование включает в себя случай неравновесной (релаксирующей) среды. Процесс установления термодинамического равновесия в газе также носит название релаксации, но не имеет отличительных особенностей релаксационных колебаний (участков быстрого скачкообразного изменения), поскольку происходит плавно. В качестве неравновесного процесса в газе выбран процесс установления термодинамического равновесия между поступательными и колебательными степенями свободы молекул газа (колебательная релаксация). Таким образом, в настоящей работе рассмотрены релаксационные колебания колебательно-релаксирующего газа. Автор надеется, что путаницы схожих по звучанию терминов не произойдет и возникший в этой связи некоторый кризис названий будет преодолен.

1. Нестационарное квазиодномерное течение вязкого теплопроводного газа, допускающего возбуждение колебательных степеней свободы молекул, описывается системой уравнений

© А.Н. Богданов, 1994

$$(1.1) \quad \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = -\rho u \frac{1}{S} \frac{dS}{dx}, \quad \rho \frac{du}{dt} + \frac{\partial p}{\partial x} = \left(\zeta + \frac{4\eta}{3} \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\rho \frac{dh}{dt} = \frac{dp}{dt} + \left(\zeta + \frac{4\eta}{3} \right) \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}, \quad \frac{de_k}{dt} = \frac{1}{\tau} (e_k^* - e_k).$$

Здесь p — давление; ρ — плотность; u — скорость; e_k — энергия колебательных степеней свободы молекул; T — поступательная температура; $h = \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{p}{\rho} + e_k$ — полная энтальпия газа; τ — время колебательной релаксации; S — поперечное сечение канала; κ — коэффициент теплопроводности; η, ζ — коэффициенты вязкости (ζ — вторая вязкость); x — пространственная координата; t — время. Для равновесного значения колебательной энергии e_k^* и τ можно взять формулы [8]

$$e_k^* = \theta_k R / (\exp(\theta_k / T) - 1), \quad \tau = \exp(k_2 T^{-1/3}) \frac{1}{k_1 p},$$

где θ_k — характеристическая колебательная температура; R — газовая постоянная; k_1 — положительные постоянные, характеризующие физические свойства газа. Конкретные значения приведены в [8].

В классической газовой динамике процессами вязкости и теплопроводности пренебрегают, потому что коэффициенты κ, η, ζ в обычных условиях малы. Поскольку проводимое здесь исследование включает в себя ударные волны, в которых процессы вязкого трения и теплопроводности важны, в системе (1.1) выписаны и вязкие члены. Ударные волны введены ниже не как скачки, а как очень быстрые непрерывные изменения параметров состояния газа.

Рассмотрим некоторое стационарное дозвуковое течение релаксирующего газа по каналу, которое можно считать невязким и нетеплопроводным. Пусть такое течение возмущается слабыми периодическими по времени волнами, падающими на вход канала или вызываемыми колеблющимся у конца канала поршнем. Примем, что амплитуда этих возмущений характеризуется малой величиной δ ($\delta \ll 1$). При таком воздействии в канале возникнут колебания малой амплитуды δ_1 , зависящей от δ ($\delta_1 = \delta^N$). Возмущенные значения параметров течения можно искать в виде рядов по δ_1 , например,

$$u = u^0 + u_1 + u_2 + \dots$$

(индексом нуль вверху отмечены параметры невозмущенного течения, u_1 — величина порядка δ_1 , u_2 — порядка δ_1^2 и т.д.).

Приведем систему (1.1) к виду

$$(1.2) \quad \frac{d_{\pm}}{dt} u \pm \frac{1}{\rho a} \frac{d_{\pm}}{dt} p = \mp u a \frac{1}{S} \frac{dS}{dx} \mp \frac{\gamma-1}{\alpha \tau} (e_k^* - e_k) + \varepsilon \frac{1}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \pm$$

$$\pm \varepsilon \frac{\gamma-1}{\rho a} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \bar{\kappa} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right],$$

$$T \frac{d_0}{dt} s = -\frac{1}{\tau} (e_k^* - e_k) + \varepsilon \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \bar{\kappa} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right], \quad \frac{d_0}{dt} e_k = \frac{1}{\tau} (e_k^* - e_k).$$

Здесь s — энтропия;

$$\frac{d_{\pm}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (u \pm a) \frac{\partial}{\partial x}; \quad \frac{d_0}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}; \quad \varepsilon = \zeta + \frac{4}{3} \eta; \quad \bar{\kappa} = \frac{\kappa}{\varepsilon}.$$

Величины $u \pm \int \frac{dp}{\rho a}$ называются инвариантами Римана. При $\tau \rightarrow \infty$ (обычная газовая динамика) изучение поведения возмущений параметров

течения газа в канале можно заменить изучением поведения возмущений инвариантов Римана. В неравновесной среде к инвариантам Римана J_1, J_2 , описывающим течения обычного (совершенного) газа, добавятся еще величины, характеризующие неравновесные процессы в газе: изменение энтропии и колебательная релаксация. Соответственно к возмущениям акустического типа добавятся энтропийная и релаксационная волны. Возмущения этого типа переносятся частицами газа, траектории их распространения — линии тока.

Введем обозначения:

$$J_1 = u + \int \frac{dp}{\rho a} - u^0 - \left(\int \frac{dp}{\rho a} \right)^0, \quad J_2 = u - \int \frac{dp}{\rho a} - u^0 + \left(\int \frac{dp}{\rho a} \right)^0.$$

Граничные условия можно сформулировать следующим образом:

$$(1.3) \quad \begin{aligned} x = 0, \quad J_2 &= KJ_1 + \delta \sin(\omega t), \\ x = L, \quad J_2 &= NJ_1 \end{aligned}$$

(L — длина канала). Действительно, в случае открытого конца канала обычное граничное условие имеет вид $p = p^0$ (постоянство статического давления) или в инвариантах Римана $J_2 - J_1 = 0$, в этом случае $N = K = 1$. Распространение в канале энтропийных и релаксационных волн никак не сказывается на возмущениях давления и скорости, поэтому, если у концов канала выставляются условия на давление или скорость, коэффициенты отражения не изменяют своих значений, вычисленных для обычного (совершенного) газа. В этом случае можно считать, что энтропийно-релаксационных волн нет вообще. В качестве примера граничных условий, когда энтропийная волна будет порождаться акустическими волнами, укажем наличие ударной волны у входа в канал. Коэффициенты отражения для этого случая вычислены в [9].

Вопрос о корректной постановке граничных условий для открытого конца канала обсуждался в литературе (см., например, [10]). Выяснено, что при низких частотах колебаний газа и малых скоростях сносящего потока в качестве граничного условия можно выбирать условие постоянства статического давления. Если скорость сносящего потока велика, то более точным граничным условием является условие постоянства полного давления $p + \frac{1}{2} \rho u^2$. При высоких частотах колебаний необходимо вводить так называемые поправки на открытый конец. Коэффициенты отражения в этом случае имеют весьма громоздкий вид, и для их вычисления приходится использовать ЭВМ. Графики и некоторые приближенные формулы приведены в [10].

Раскладывая параметры возмущенного течения в канале по δ_1 , из системы (1.2) в первом приближении по δ_1 получим

$$(1.4) \quad \begin{aligned} \frac{d_{\pm}}{dt} u_{\pm} \pm \frac{1}{\rho^0 a^0} \frac{d_{\pm}}{dt} p_1 &= \mp (ua)_1 \frac{1}{S} \frac{dS}{dx} \mp \left(\frac{u \pm a}{\rho a} \right)_1 \frac{dp^0}{dx} - (u \pm a)_1 \frac{du^0}{dx} \pm \\ &\pm \frac{\gamma - 1}{a^0 \tau^0} \left[\left(\frac{a_1}{a^0} + \frac{\tau_1}{\tau^0} \right) (e_k^* - e_k)^0 - (e_{k1}^* - e_{k1}) \right], \\ \frac{d_0}{dt} s_1 &= - \left(\frac{u^0}{T^0} T_1 + u_1 \right) \frac{ds^0}{dx} + \frac{1}{T^0} \tau_1 \frac{(e_k^* - e_k)^0}{\tau^0} - \frac{1}{T^0} \frac{e_{k1}^* - e_{k1}}{\tau^0}, \\ \frac{d_0}{dt} e_{k1} &= - \frac{1}{u^0} u_1 \frac{(e_k^* - e_k)^0}{\tau^0} - \tau_1 \frac{(e_k^* - e_k)^0}{\tau^0} + \frac{e_{k1}^* - e_{k1}}{\tau^0}, \end{aligned}$$

$$\text{где } e_{k1}^* = \gamma \exp \frac{\theta_k}{T^0} \frac{T_1}{T^0} \left(\frac{e_k^*}{a^0} \right)^2; \quad \tau_1 = -\tau^0 \left(\frac{p_1}{p^0} + \frac{k_2}{3T^0} \frac{T_1}{T^0} \right).$$

Для членов второго порядка малости по δ_1 из (1.2) имеем

$$\begin{aligned}
 (1.5) \quad \frac{d_{\pm}}{dt} u_2 \pm \frac{1}{\rho^0 a^0} \frac{d_{\pm}}{dt} p_2 &= \mp (ua)_2 \frac{1}{S} \frac{dS}{dx} \mp \left(\frac{u \pm a}{\rho a} \right)_2 \frac{dp^0}{dx} - (u \pm a)_2 \frac{du^0}{dx} \pm \\
 &\pm \frac{\gamma - 1}{a^0 \tau^0} \left[\left(\frac{a_2}{a^0} \mp \frac{\tau_2}{\tau^0} \right) (e_k^* - e_k)^0 - (e_{k2}^* - e_{k2}) \right] \mp \frac{u^0 \pm a^0}{(\rho^0 a^0)^2} \frac{dp^0}{dx} \rho_1 a_1 + \\
 &+ \frac{\varepsilon}{\delta_1} \frac{1}{\rho^0} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} u_1 \pm \frac{\gamma - 1}{a^0} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \bar{\kappa} \frac{\partial^2 T^0}{\partial x^2} \right]_1 - \frac{\rho_1}{\rho^0} \frac{d^2 u^0}{dx^2} \right) - \\
 &- (u \pm a)_1 \frac{\partial}{\partial x} u_1 \mp u_1 a_1 \frac{1}{S} \frac{dS}{dx} \mp \left(\frac{1}{\rho a} \right)_1 \left(\frac{d_{\pm}}{dt} p_1 + (u \pm a)_1 \frac{d}{dx} p^0 \right) \mp \\
 &\mp \frac{1}{\rho^0 a^0} (u \pm a)_1 \frac{\partial}{\partial x} p_1 \pm \frac{\gamma - 1}{a^0 \tau^0} (e_k^* - e_k)_1 \left(\frac{a_1}{a^0} \mp \frac{\tau_1}{\tau^0} \right) \mp \\
 &\mp \frac{\gamma - 1}{(a^0 \tau^0)^2} a_1 \tau_1 (e_k^* - e_k)^0 \pm \frac{\varepsilon}{\delta_1} (\gamma - 1) \left(\frac{1}{\rho a} \right)_1 \left[\frac{d}{dx} \left(u^0 \frac{du^0}{dx} \right) + \bar{\kappa} \frac{d^2 T^0}{dx^2} \right], \\
 \frac{d_0}{dt} s_2 &= - \left(\frac{u^0}{T^0} T_2 + u_2 \right) \frac{ds^0}{dx} + \frac{1}{\tau^0 T^0} \left(\tau_2 \frac{(e_k^* - e_k)^0}{\tau^0} - e_{k2}^* + e_{k2} \right) - u_1 \frac{\partial}{\partial x} s_1 - \\
 &- \frac{(e_k^* - e_k)^0}{(\tau^0 T^0)^2} \tau_1 T_1 + \frac{1}{\tau^0 T^0} (e_k^* - e_k)_1 \left(\frac{T_1}{T^0} + \frac{\tau_1}{\tau^0} \right) + \frac{\varepsilon}{\delta_1} \frac{1}{\rho^0 T^0} \left(\left[\frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \bar{\kappa} \frac{\partial^2 T^0}{\partial x^2} \right]_1 - \right. \\
 &\quad \left. - \left(\frac{\rho_1}{\rho^0} + \frac{T_1}{T^0} \right) \left[\frac{d}{dx} \left(u^0 \frac{du^0}{dx} \right) + \bar{\kappa} \frac{d^2 T^0}{dx^2} \right] \right), \\
 \frac{d_0}{dt} \varepsilon_{k2} &= - \frac{(e_k^* - e_k)^0}{\tau^0} \left(\frac{1}{u^0} u_2 + \frac{1}{\tau^0} \tau_2 \right) + \frac{e_{k2}^* - e_{k2}}{\tau^0} - \tau_1 \frac{e_{k1}^* - e_{k1}}{\tau^0{}^2}.
 \end{aligned}$$

Введем обозначения: $J_{1m} = u_m + \frac{p_m}{(\rho a)^0}$, $J_{2m} = u_m - \frac{p_m}{(\rho a)^0}$, $J_{3m} = s_m$, $J_{4m} = e_{km}$, $m = 1, 2$. Перепишем системы (1.1), (1.2) в виде

$$(1.6) \quad \frac{d}{dt} J_{11} = a_{11} J_{11} + a_{12} J_{21} + a_{14} J_{41}, \quad \frac{dx}{dt} = u^0 + a^0,$$

$$\frac{d}{dt} J_{21} = a_{21} J_{11} + a_{22} J_{21} + a_{24} J_{41}, \quad \frac{dx}{dt} = u^0 - a^0,$$

$$\frac{d}{dt} J_{31} = a_{31} J_{11} + a_{32} J_{21} + a_{34} J_{41}, \quad \frac{dx}{dt} = u^0,$$

$$\frac{d}{dt} J_{41} = a_{41} J_{11} + a_{42} J_{21} + a_{44} J_{41}, \quad \frac{dx}{dt} = u^0;$$

$$(1.7) \quad \frac{d}{dt} J_{12} = a_{11} J_{12} + a_{12} J_{22} + a_{14} J_{42} + a_{10}, \quad \frac{dx}{dt} = u^0 + a^0,$$

$$\frac{d}{dt} J_{22} = a_{21} J_{12} + a_{22} J_{22} + a_{24} J_{42} + a_{20}, \quad \frac{dx}{dt} = u^0 - a^0,$$

$$\frac{d}{dt} J_{32} = a_{31} J_{12} + a_{32} J_{22} + a_{34} J_{42} + a_{30}, \quad \frac{dx}{dt} = u^0,$$

$$\frac{d}{dt} J_{42} = a_{41} J_{12} + a_{42} J_{22} + a_{44} J_{42} + a_{40}, \quad \frac{dx}{dt} = u^0$$

(коэффициенты a_{ij} можно вычислить, используя системы (1.4), (1.5)).

Параметры невозмущенного стационарного течения в канале определяются из системы обыкновенных дифференциальных уравнений, следующих из (1.1) после пренебрежения зависимостью от времени, вязким трением и теплопроводностью:

$$(1.8) \quad u^0 \frac{d\rho^0}{dx} + \rho^0 \frac{du^0}{dx} = -\rho^0 \frac{1}{S} \frac{dS}{dx}, \quad \rho^0 \frac{du^0}{dx} + \frac{dp^0}{dx} = 0,$$

$$\rho^0 u^0 \frac{dh^0}{dx} = u^0 \frac{dp^0}{dx}, \quad u^0 \frac{de_k^0}{dx} = (e_k^* - e_k^0) / \tau^0, \quad h^0 = \frac{\gamma}{\gamma - 1} p^0 / \rho^0 + e_k^0.$$

В случае высокочастотных колебаний для решения полученных уравнений можно применять эффективный метод геометрической акустики (или оптики) [11] и искать решение в виде рядов по обратным степеням ω ($\omega \gg 1$ — приближение геометрической акустики):

$$J_{lm} = \exp(i\omega(\sigma_l(x) - t)) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{j_{ln}(x)}{(i\omega)^n}.$$

При использовании такого приближения для решения уравнений систем (1.6), (1.7) взаимное влияние инвариантов Римана в этих уравнениях для каждого члена разложения оказывается величиной, учитываемой членами более высокого порядка малости по $1/\omega$. Физически это означает, что время взаимодействия волн, распространяющихся вдоль характеристик различных семейств, очень мало и в этом смысле такое приближение аналогично приближению "коротких волн" [12].

Решение уравнений системы (1.6) проводится аналогично случаю обычной газовой динамики [1] (волны возмущений энтропии и релаксационные волны не учитываются в связи с замечанием о граничных условиях, см. (1.3)). На концах канала имеем

$$(1.9) \quad J_{1l}(t, 0) = C_l(\omega t), \quad J_{1l}(t, L) = C_l(\omega(t - \sigma_1(L))) \exp\left(\int_0^L \frac{\hat{a}_{ll}}{u^0 \pm a^0} d\xi\right) +$$

$$+ \frac{1}{\omega} [A_{lm}(L) F_m(\omega(t - \sigma_m(L))) -$$

$$- A_{lm}(0) F_m(\omega(t - \sigma_l(L)))] \exp\left(\int_0^L \frac{a_{ll}}{u^0 \pm a^0} d\xi\right),$$

причем $F'_m = C_m$, $A_{lm} = \frac{a_{lm}}{u^0 \pm a^0} \exp\left(\int_0^x \left(\frac{a_{mm}}{u^0 \mp a^0} - \frac{a_{ll}}{u^0 \pm a^0}\right) d\xi\right) [(\sigma_l - \sigma_m)^{-1}]'$,
 $l \neq m$, $\sigma_l(x) = \int_0^x \frac{d\xi}{u^0 \pm a^0}$, штрихом отмечено дифференцирование функции по ее аргументу, индексом -1 — обратная функция;

$$(1.10) \quad J_{l2}(t, 0) = 0, \quad J_{l2}(t, L) = \varepsilon b_{l1}(L) C_l'' + b_{l2}(L) C_l' C_l,$$

$$b_{lm}(x) = \int_0^x \frac{\hat{a}_{lm}}{u^0 \pm a^0} \exp\left(-\int_0^\xi \frac{\hat{a}_{ll}}{u^0 \pm a^0} d\xi\right) d\xi \exp\left(\int_0^x \frac{a_{ll}}{u^0 \pm a^0} d\xi\right)$$

(\hat{a}_{lm} — коэффициенты в разложении $a_{l0} = \varepsilon \hat{a}_{l1} C_l'' + \hat{a}_{l2} C_l' C_l$, $l, m = 1, 2$, верхний знак соответствует $l = 1$, нижний $l = 2$).

Решения (1.9), (1.10) подставим в граничные условия (1.3) и, исключая C_2 , получим ~

$$\begin{aligned}
 (1.11) \quad & KC_1(\omega(t - \sigma_2(L))) + \\
 & + \frac{1}{\omega} \exp\left(-\int_0^L \frac{\tilde{a}_{22}}{u^0 - a^0} d\xi\right) [\beta_{11}F_1(\omega(t - \sigma_1(L))) + \\
 & + \beta_{21}F_1(\omega(t - \sigma_2(L)))] + \varepsilon \exp\left(-\int_0^L \frac{\tilde{a}_{22}}{u^0 - a^0} d\xi\right) b_{21}KC_1''(\omega(t - \sigma_2(L))) + \\
 & + \exp\left(-\int_0^L \frac{a_{22}}{u^0 - a^0} d\xi\right) b_{22}K^2C_1'(\omega(t - \sigma_2(L)))C_1(\omega(t - \sigma_2(L))) = \\
 & = N \exp\left(-\int_0^L \frac{a_{22}}{u^0 - a^0} d\xi\right) \left\{ C_1(\omega(t - \sigma_1(L))) \exp\left(\int_0^L \frac{a_{11}}{u^0 + a^0} d\xi\right) + \right. \\
 & + \frac{1}{\omega} K [\beta_{12}F_1(\omega(t - \sigma_2(L))) + \beta_{22}F_1(\omega(t - \sigma_1(L)))] + \varepsilon b_{11}C_1''(\omega(t - \sigma_1(L))) + \\
 & \left. + b_{12}C_1'(\omega(t - \sigma_1(L)))C_1(\omega(t - \sigma_1(L))) \right\} - \delta \sin(\omega(t - \sigma_2(L))), \\
 & \beta_{12} = A_{12}(L) \exp\left(\int_0^L \frac{a_{11}}{u^0 + a^0} d\xi\right), \quad \beta_{11} = A_{21}(L) \exp\left(\int_0^L \frac{a_{22}}{u^0 - a^0} d\xi\right), \\
 & \beta_{22} = -A_{12}(0) \exp\left(\int_0^L \frac{a_{11}}{u^0 + a^0} d\xi\right), \quad \beta_{21} = -A_{21}(0) \exp\left(\int_0^L \frac{a_{22}}{u^0 - a^0} d\xi\right).
 \end{aligned}$$

Введем обозначения:

$$T = \sigma_1(L) - \sigma_2(L), \quad \eta = \omega(t - \sigma_1(L)),$$

$$N_1 = N \exp\left(\int_0^L \left(\frac{a_{11}}{u^0 + a^0} - \frac{a_{22}}{u^0 - a^0}\right) d\xi\right).$$

Как показано в [1], $K = N_1$ является необходимым условием резонанса. В случае околорезонансных колебаний $K = N_1 - k$, где $k \ll 1$. Кроме того, $\omega T = 2\pi n + \Delta$, $\Delta \ll 1$, и можно использовать разложение

$$C_1(\eta + \omega T) = C_1(\eta + 2\pi n + \Delta) = C_1(\eta) + \Delta C_1'(\eta).$$

Примем $C_1(\eta) = J(\eta)$ и перепишем полученное из (1.11) в результате преобразований уравнение в виде

$$(1.12) \quad \varepsilon \bar{a}_0 J'' + a_1 J J' + a_2 J' + a_3 J + a_4 F = \delta \sin \eta,$$

где

$$\begin{aligned}
 \bar{a}_0 &= (\tilde{b}_{11} \tilde{N} - b_{21} K) \exp\left(-\int_0^L \frac{\tilde{a}_{22}}{u^0 - a^0} d\xi\right); \\
 a_1 &= (b_{12} N - b_{22} K^2) \exp\left(-\int_0^L \frac{\tilde{a}_{22}}{u^0 - a^0} d\xi\right); \\
 a_2 &= -K \Delta; \quad a_3 = -K + N_1 = k; \\
 a_4 &= \exp\left(-\int_0^L \frac{\tilde{a}_{22}}{u^0 - a^0} d\xi\right) \frac{1}{\omega} (KN(\beta_{12} + \beta_{22}) - \beta_{11} - \beta_{21}).
 \end{aligned}$$

Газ	Pr	γ
Аргон, гелий	0,9	1,666
Неон	1,3	1,666
Воздух	1,4	1,4
Водород	20	1,4

Качественный анализ уравнения (1.12) с коэффициентами общего вида проведен в [1].

2. Коэффициенты уравнения (1.12) в явном виде для течения обычного совершенного газа в канале с постоянным поперечным сечением ($dS/dx \equiv 0$) при свободном втекании и вытекании газа на концах канала ($K = N = 1$) есть

$$(2.1) \quad \bar{a}_0 = - \frac{L\omega^2}{2\delta \rho_0 a_0^3} \left[\frac{(\gamma - 1)M_0 - 1 - \frac{\bar{\kappa}}{\gamma R} (\gamma - 1)^2}{(1 - M_0)^3} - \frac{(\gamma - 1)M_0 + 1 + \frac{\bar{\kappa}}{\gamma R} (\gamma - 1)^2}{(M_0 + 1)^3} \right],$$

$$a_1 = - \frac{L\omega(\gamma + 1)}{4a_0^2} \left(\frac{1}{(M_0 - 1)^2} - \frac{1}{(M_0 + 1)^2} \right), \quad a_2 = -\Delta, \quad a_3 = a_4 = 0.$$

Параметры невозмущенного постоянного течения в канале отмечены индексом нуль внизу.

Отношение коэффициентов вязкости и теплопроводности определяется числом Прандтля. В нашем случае выражение

$$\frac{\bar{\kappa}(\gamma - 1)}{\gamma R} = \frac{1}{Pr}$$

можно рассматривать как обратное число Прандтля, вычисленное по коэффициенту продольной вязкости $\epsilon = \frac{4}{3} \eta + \zeta$. Значения Pr для различных газов приведены в таблице [13]. Поскольку течение в канале всюду дозвуковое $M_0 < 1$, коэффициент \bar{a}_0 положителен, a_1 отрицателен. Заметим, что $a_1 \rightarrow 0$, $M_0 \rightarrow 0$.

Примем $\Delta > 0$ (вообще смена знака коэффициента a_2 не принципиальна, поскольку при $a_2 \rightarrow -a_2$ поле интегральных кривых уравнения (1.12) с $a_4 = 0$ переходит в себя при замене $J \rightarrow -J(-\eta)$). Таким образом, имеем вырожденный случай: $\bar{a}_0 > 0$, $a_1 < 0$, $a_2 < 0$, $a_3 = a_4 = 0$.

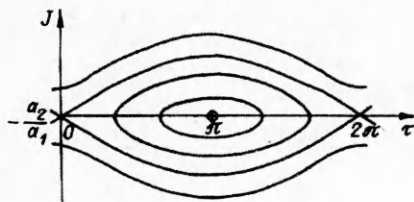
В этом случае устанавливающиеся в канале колебания не содержат скачков уплотнения (ударных волн). Действительно, часть решения, соответствующую участку быстрого (близкого к разрывному) изменения, можно определить приближенно в виде ряда по малому параметру ϵ [14]:

$$J = y_0(\eta^*) + \epsilon y_1(\eta^*) + \dots$$

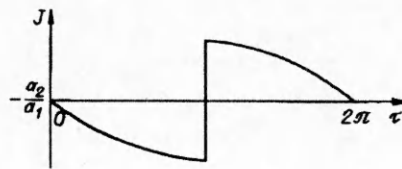
($\eta^* = \eta/\epsilon$). Подстановкой этого разложения в (1.12) в первом приближении по ϵ находим

$$(2.2) \quad a_0 y_0' + (a_1 y_0 + a_2) y_0' = 0.$$

Знак произведения $\bar{a}_0 a_1$ оказывается определяющим при выяснении направления перехода в скачках. Пусть y_{01} отвечает состоянию перед скачком, а y_{02} — за скачком. Оказывается, если $\bar{a}_0 a_1 < 0$ у (2.2) имеются решения,



Р и с. 1



Р и с. 2

соответствующие колебаниям, при которых $y_{01} > y_{02}$ (скачки разрежения). Действительно, уравнение (2.2) можно переписать в виде

$$(2.3) \quad y''_0 = -\frac{1}{a_0} (a_1 y_0 + a_2) y'_0.$$

Необходимо, чтобы знаки y''_0 и y'_0 в начале быстрого колебания (скачка) совпадали, а в конце различались. По (2.3) видно, что переход через линию $y_0 = -a_2/a_1$, соответствующий скачку, сопровождается изменением знака коэффициента при y'_0 (но не знака самой y'_0). Следовательно, происходит изменение знака y''_0 . Итак, при $\bar{a}_0 a_1 < 0$ можно построить решение, содержащее скачок разрежения, выбирая $y'_0 < 0$, $a_1 y_{01} + a_2 > 0$, $a_1 y_{02} + a_2 < 0$, т.е. $y_{01} > y_{02}$.

Решения со скачками разрежения в рассматриваемой задаче не реализуются. Действительно, решения уравнения (1.12) представляют собой суммарное (вызванное пришедшей и отраженной волнами возмущений) изменение инварианта Римана J_1 на конце канала $x = L$. Если конец канала открыт, то пришедшая ударная волна отражается от него в виде скачка разрежения. Однако суммарное изменение инварианта есть скачок уплотнения: хотя скачок давления на выходе из канала равен нулю, происходит истечение газа из канала во внешнее пространство [15].

Таким образом, устанавливающиеся в канале колебания описываются уравнением, следующим из (1.12), если положить $\bar{a}_0 = a_3 = a_4 = 0$ (равенство $\bar{a}_0 = 0$ формально означает, что в канале нет скачков):

$$(2.4) \quad (a_2 J + a_2) J' = \delta \sin \eta.$$

Уравнение (2.4) интегрируется и позволяет получить (q^* — константа интегрирования)

$$(2.5) \quad J = \frac{1}{a_1} (-a_2 \pm \sqrt{a_2^2 - 2a_1(\delta \cos \eta + q^*)}).$$

Поле интегральных кривых (2.5) приведено на рис. 1.

Если один конец канала закрыт твердой стенкой, а на другом поршнем вызываются слабые колебания, то невозмущенное состояние газа в канале можно считать покоем, а коэффициенты отражения возмущений на концах канала есть $K = N = -1$. Тогда

$$(2.6) \quad \bar{a}_0 = -\frac{L\omega^2}{\delta \rho_0 a_0^3} \left[1 + \frac{\bar{\kappa}(\gamma - 1)^2}{\gamma R} \right], \quad a_1 = -\frac{L\omega(\gamma + 1)}{2a_0^2},$$

$$a_2 = \Delta, \quad a_4 = a_3 = 0.$$

В этом случае $\bar{a}_0 a_1 > 0$ и можно построить решения, соответствующие устанавливающимся в канале релаксационным (содержащим ударные волны) колебаниям [1] (рис. 2).

3. Рассмотрим ситуацию, когда поперечное сечение канала монотонно изменяется, что вызывает переменность параметров течения в канале. Коэффициент a_3 , учитывая, что $K = N = 1$, можно переписать в виде

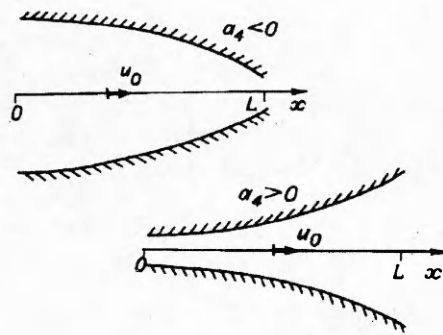


Рис. 3

$$a_3 = \exp \left(\int_0^L \frac{2 + (\gamma - 1)M_0^2}{a_0(M_0^2 - 1)} \frac{du^0}{dx} dx \right) - 1.$$

Как указывалось выше, необходимым условием существования околорезонансных колебаний в канале является условие $k \ll 1$, а следовательно, малость коэффициента a_3 . Выполнение этого условия возможно, когда экспоненциальный член в выражении для a_3 мало отличается от единицы, и, значит, аргумент экспоненты — малая величина. Удовлетворить таким требованиям можно, если производная $\frac{du}{dx}$ либо сама есть малая величина, либо изменяет знак таким образом, что интеграл в аргументе экспоненты оказывается малым.

Решение системы (1.8) можно искать в виде

$$(3.1) \quad \rho^0 = \rho_0(1 - \bar{\epsilon}\gamma\rho_{10}), \quad \rho^0 = \rho_0(1 - \bar{\epsilon}\rho_{10}), \quad u^0 = u_0(1 + \bar{\epsilon}u_{10}),$$

где $\bar{\epsilon}$ — дополнительный малый параметр, например, для канала с монотонно меняющимся поперечным сечением

$$(3.2) \quad \bar{\epsilon}_4 = \left| \ln \frac{S(L)}{S(0)} \right|.$$

Тогда

$$a_3 = \frac{\gamma - 1}{a_0} \frac{M_0^2 + 2}{(M_0^2 - 1)} (u(L) - u(0)).$$

В расширяющемся канале $u(L) < u(0)$, поэтому $a_3 > 0$. В сужающемся канале $u(L) > u(0)$, а $a_3 < 0$.

Для a_4 имеем выражение

$$a_4 = \frac{1}{\omega} \frac{a_0 M_0}{1 - M_0^2} \left(\frac{1}{S(L)} \frac{dS}{dx}(L) - \frac{1}{S(0)} \frac{dS}{dx}(0) \right) \left(1 - \frac{\gamma - 1}{2} M_0^2 \right).$$

Поскольку $M_0^2 < 1$, коэффициент a_4 положителен, если

$$(3.3) \quad \frac{1}{S(L)} \frac{dS}{dx}(L) > \frac{1}{S(0)} \frac{dS}{dx}(0).$$

С другой стороны, a_4 будет отрицателен, если

$$(3.4) \quad \frac{1}{S(L)} \frac{dS}{dx}(L) < \frac{1}{S(0)} \frac{dS}{dx}(0).$$

Примеры каналов, удовлетворяющие условиям (3.3) и (3.4), приведены на рис. 3.

Заметим теперь, что, поскольку остались прежними коэффициенты отражения на границах канала и предположение о том, что колебания являются околорезонансными ($\omega T = 2\pi n + \Delta$, $\Delta \ll 1$), коэффициент $a_2 = -K\Delta$ также не изменит своего значения, вычисленного ранее (см. (2.1)).

При использовании разложений вида (3.1) коэффициенты \bar{a}_0 , a_1 получают изменения порядка $\bar{\epsilon}$ по сравнению со случаем постоянного однородного течения в канале. Такие добавки не изменяют знаки этих коэффициентов и слабо изменяют их величину. Пренебрегая этими изменениями, можно использовать (2.1).

Таким образом, влияние слабой переменности поперечного сечения канала учитывается изменением величины и знака коэффициентов a_3 , a_4 . На коэффициенты \bar{a}_0 , a_1 слабое изменение поперечного сечения канала оказывает слабое влияние (незначительно меняя их величину).

4. Рассмотрим случай свободного истечения неравновесного газа из канала. Пусть поперечное сечение канала постоянно ($dS/dx \equiv 0$). Тогда

$$(4.1) \quad \begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{2} \left[M^0(1 - M^0) \frac{\gamma + 1}{2} + \frac{(\gamma - 1)k_2}{3T^{0^{1/3}}} (1 - M^{0^2}) \right] \frac{du^0}{dx} - E^0, \\ a_{22} &= \frac{1}{2} \left[-M^0(1 + M^0) \frac{\gamma + 1}{2} + \frac{(\gamma - 1)k_2}{3T^{0^{1/3}}} (1 - M^{0^2}) \right] \frac{du^0}{dx} - E^0, \\ a_{12} &= -\frac{1}{2} \left[\left(2 + \frac{\gamma + 1}{2} M^0 \right) (M^0 - 1) - \frac{(\gamma - 1)k_2}{3T^{0^{1/3}}} (1 - M^{0^2}) \right] \frac{du^0}{dx} + E^0, \\ a_{21} &= -\frac{1}{2} \left[\left(-2 + \frac{\gamma + 1}{2} M^0 \right) (M^0 + 1) - \frac{(\gamma - 1)k_2}{3T^{0^{1/3}}} (1 - M^{0^2}) \right] \frac{du^0}{dx} + E^0. \end{aligned}$$

Здесь

$$E^0 = \frac{\gamma}{2\tau^0} \left(\gamma - 1 \right) \frac{e_k^{*0}}{a^{0^2}} \exp \frac{\theta_k}{T^0}.$$

Используя полученные выражения, вычислим a_3 :

$$\begin{aligned} a_3 &= \exp \left(\int_0^L \frac{1}{a^0} \left[\left(-\frac{(\gamma + 1)M^{0^2}}{1 - M^{0^2}} + \frac{(\gamma - 1)k_2}{3T^{0^{1/3}}} \right) \frac{du^0}{dx} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\gamma}{M^{0^2} - 1} \frac{1}{\tau^0} \left(\gamma - 1 \right) \frac{e_k^{*0}}{a^{0^2}} \right] \exp \frac{\theta_k}{T^0} dx \right) - 1. \end{aligned}$$

Как отмечалось в п. 1, необходимым условием существования околорезонансных колебаний является малость коэффициента a_3 . Это возможно, если экспоненциальный член в a_3 мало отличается от единицы. Следовательно, аргумент экспоненты должен быть мал. Рассмотрим случай, когда малость данного аргумента обеспечивается малостью обратного времени релаксации $1/\tau^0 \ll 1$.

Это обстоятельство позволяет получить простое приближенное решение системы (1.8), используя разложения для неизвестных параметров невозмущенного течения газа в канале в виде, аналогичном (3.1):

$$(4.2) \quad p^0 = p_0(1 - \bar{\epsilon}\gamma\rho_{10}), \quad \rho^0 = \rho_0(1 - \bar{\epsilon}\rho_{10}),$$

$$u^0 = u_0(1 + \bar{\varepsilon}u_{10}), \quad e_k^0 = a_0^2(\bar{e}_{k0} + \bar{\varepsilon}e_{k10}).$$

Здесь $\bar{\varepsilon}$ — дополнительный малый параметр (безразмерное обратное время релаксации, вычисленное при $x = 0$):

$$(4.3) \quad \bar{\varepsilon} = \frac{1}{\bar{\tau}_0} = \frac{L}{\tau_0 u_0}.$$

Подставляя (4.2) в (4.1) и интегрируя, можно найти

$$a_3 = \frac{L}{M_0^2 - 1} \frac{\gamma - 1}{a_0^3 \tau_0} \left\{ \left(-\frac{(\gamma + 1)M_0^2}{1 - M_0^2} + \frac{(\gamma - 1)k_2}{3T_0^{1/3}} \right) (e_k^* - e_k)_0 + \right. \\ \left. + (\gamma - 1)\gamma \left(\frac{e_{k0}^*}{a_0} \right)^2 \exp \frac{\theta_k}{T_0} \right\}.$$

Полученное выражение показывает, что в равновесном газе ($e_k^* = e_k$) $a_3 < 0$. Для малых M_0 достаточно сильное возбуждение колебательных степеней свободы молекул газа приводит к положительности коэффициента a_3 . При больших дозвуковых скоростях ситуация обратная и $a_3 < 0$.

Перейдем к вычислению коэффициента a_4 . Поскольку коэффициенты a_{km} , согласно (4.1), (4.2), есть в рассматриваемом приближении величины порядка $\bar{\varepsilon}$, то

$$a_4 = \frac{1}{2\omega} [(a_{12}(L) - a_{12}(0))(1 - M_0) - (a_{21}(L) - a_{21}(0))(1 + M_0)]$$

и коэффициент a_4 оказывается величиной второго порядка малости по $\bar{\varepsilon}$. В рассматриваемом приближении можно положить $a_4 = 0$.

В п. 3 указывалось, что при использовании разложений вида (4.2) коэффициенты \bar{a}_0 , a_1 получают изменения порядка $\bar{\varepsilon}$ по сравнению со случаем постоянного однородного течения в канале. Такие добавки не изменяют знак данных коэффициентов и слабо изменяют их величину. Пренебрегая этими изменениями, можно использовать (2.1).

Таким образом, влияние неравновесных процессов (колебательной релаксации) учитывается изменением величины и знака коэффициента a_3 . На остальные коэффициенты слабая неравновесность оказывает слабое влияние.

Рассмотрим еще вынужденные колебания покоящегося в канале газа, допускающего возбуждение колебательных степеней свободы молекул. Пусть один конец канала закрыт твердой стенкой, а на другом колеблется с малой амплитудой поршень. При этом $K = N = -1$, невозмущенное состояние газа можно считать равновесным с постоянными параметрами. Имеем

$$a_{11} = a_{22} = -E_0, \quad a_{12} = a_{21} = E_0, \\ a_3 = \frac{1}{1 - M_0^2} \frac{L}{\tau_0} \gamma (\gamma - 1)^2 \left(\frac{e_{k0}^*}{a_0^2} \right)^2 \exp \frac{\theta_k}{T_0}, \quad a_4 = 0.$$

Коэффициенты \bar{a}_0 , a_1 , a_2 следует взять из (2.6).

Все отличие от обычной газовой динамики в этом случае в коэффициенте a_3 . Влияние члена с этим коэффициентом на вид решения уравнения (1.12) может оказаться решающим. Действительно, при выполнении критерия

$$\left| \frac{\delta}{a_3} \right| < \left| \frac{a_2}{a_1} \right|$$

решений, соответствующих разрывным колебаниям, не существует [1]. В обычной газовой динамике (в отсутствие релаксации $\tau \rightarrow \infty$) этот критерий не выполняется, поскольку $a_3 = 0$. Таким образом, релаксационный процесс в газе, связанный с возбуждением внутренних степеней свободы, может приводить к исчезновению ударных волн в канале и установлению плавных колебаний.

5. Течение неравновесного газа в канале переменного сечения можно исследовать, комбинируя результаты пп. 3, 4. Формально влияние слабой переменности сечения канала и слабой неравновесности, определяемых малыми добавками (порядка $\bar{\epsilon}$, введенного соответственно формулами (3.2) и (4.3)), ввиду их линейности можно учитывать простым сложением.

Заметим, что в случаях, когда произведение $\bar{a}_0 a_1$ отрицательно, построить решение, соответствующее колебаниям со скачками уплотнения (ударными волнами), невозможно [1]. В этой связи можно сделать вывод о том, что свободные течения колебательно-релаксирующего газа в канале являются безопасными в отношении возникновения ударных волн.

Известно, что в колебательно-возбужденном газе ударные волны ускоренно образуются из-за усиления слабых возмущений [12]. Эти (не связанные с резонансами в каналах) процессы являются источником возникновения ударных волн при течениях неравновесной среды.

Представляет интерес поиск неравновесных сред, при течениях которых выполняются условия $\bar{a}_0 a_1 > 0$, $a_3 < 0$, поскольку при этих условиях в канале возникают релаксационные (содержащие скачки уплотнения) колебания, которые не исчезают даже после прекращения действия вынуждающей силы (т.е. являются автоколебаниями) [1].

Автор выражает благодарность А.Г. Куликовскому и С.А. Егорушкину за обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Богданов А.Н. Моделирование вынужденных релаксационных колебаний газа в канале переменного сечения // Мат. моделирование. — 1993. — Т. 6, № 1.
2. Крайко А.Н., Ни А.Л. О приближении нелинейной акустики в задачах о колебаниях газа в трубах // ПММ. — 1980. — Т. 44, вып. 1.
3. Ни А.Л. Нелинейные резонансные колебания газа в трубе под воздействием периодически изменяющегося давления // ПММ. — 1983. — Т. 47, вып. 4.
4. Ни А.Л. Нелинейные околорезонансные колебания газа в трубе переменного сечения // ПМТФ. — 1985. — № 3.
5. Егорушкин С.А. Околорезонансные колебания газа, движущегося в канале переменного сечения // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1984. — № 4.
6. Jimenez J. Nonlinear gas oscillations in pipes. Pt 1. Theory // J. Fluid Mech. — 1973. — V. 59, pt 1.
7. Sturtevant V. Nonlinear gas oscillations in pipes. Pt 2. Experiment // J. Fluid Mech. — 1974. — V. 63, pt 1.
8. Неравновесные физико-химические процессы в аэродинамике / Под ред. Г.И. Майкапара. — М.: Машиностроение, 1972.
9. Черный Г.Г. Возникновение колебаний при ослаблении волн детонации // ПММ. — 1969. — Т. 33, вып. 3.
10. Шипов Р.А. О граничных условиях при нестационарных процессах в газовых системах // Инж. журн. — 1962. — Т. 2, вып. 4.
11. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977.
12. Богданов А.Н., Куликовский В.А. Распространение нестационарных слабых ударных волн в колебательно-неравновесном газе, подверженном действию внешнего излучения // ПМТФ. — 1990. — № 5.
13. Основы газовой динамики / Под ред. Г. Эммонса. — М.: Мир, 1963.
14. Коул Дж. Методы возмущений в прикладной математике. — М.: Мир, 1972.
15. Черный Г.Г. Газовая динамика. — М.: Наука, 1988.

г. Москва

Поступила 1/VI 1993 г.