

УДК 532.51

ВЛИЯНИЕ НАКЛОННОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ НА НЕУСТОЙЧИВОСТЬ КОНВЕКЦИИ БЕНАРДА — МАРАНГОНИ В ПОРИСТОМ СЛОЕ

А. А. Абдулла, З. З. Рашид*

Университет Умм аль-Кура, 21955 Мекка, Саудовская Аравия

* Университет г. Аль-Жуф, Аль-Жуф, Саудовская Аравия

E-mails: aamohammad@uqu.edu.sa, zz_rashed@hotmail.com

С использованием модели Бринкмана исследуется конвекция Бенарда — Марангони, возникающая в горизонтальном пористом слое, заполненном магнитогидродинамической жидкостью с нелинейной зависимостью магнитной проницаемости от магнитной индукции. Пористый слой, ограниченный снизу жесткой поверхностью, сверху — недеформируемой свободной поверхностью, находится в наклонном магнитном поле. Вычислены критические числа Марангони и Рэлея при различных значениях чисел Дарси, Био, Чандрасекхара, параметра магнитной проницаемости и угла наклона магнитного поля. Рассмотрены случаи стационарной и сверхустойчивой конвекции. Задача определения собственных значений краевой задачи решена с использованием полиномов Чебышева первого рода.

Ключевые слова: течение Бенарда — Марангони, пористая среда, модель Бринкмана, наклонное магнитное поле.

DOI: 10.15372/PMTF20180518

Введение. Неустойчивость течения в подогреваемом снизу горизонтальном слое встречается во многих геофизических, океанических и атмосферных явлениях, а также в различных технологических процессах. Начало систематическим исследованиям неустойчивости такого течения положили экспериментальные исследования Г. Бенарда [1], теоретическое обоснование которым дал Рэлея, объяснив возникновение неустойчивости действием сил плавучести [2]. Однако неустойчивость течения может быть обусловлена действием не только сил плавучести, но и зависящих от температуры поверхностных сил (конвективная неустойчивость Марангони). Этот тип неустойчивости впервые исследован в [3].

Результаты работ [2, 3] обобщены Д. Нилдом [4], исследовавшим влияние сил плавучести и сил поверхностного натяжения на неустойчивость течения (конвективное течение Бенарда — Марангони).

Результаты первого исследования конвекции Бенарда — Марангони в пористых слоях содержатся в работе [5]. В [6–8] приведен обзор работ, посвященных исследованию течений в пористых средах. Несмотря на то что конвективные течения Марангони и Бенарда — Марангони в пористых средах применяются во многих технологических процессах, они менее исследованы, чем конвективные течения Рэлея — Бенарда.

В работе [9] с использованием модели Бринкмана изучалось конвективное течение Бенарда — Марангони в пористой среде. Возникновение конвективного течения Дарси — Бенарда — Марангони в пористой среде, заполненной жидкостью, исследовалось в работе [10] с использованием модели Бринкмана — Форчхаймера — Лепвуда — Дарси. В [11] изучалось конвективное течение Бенарда — Марангони в композитном анизотропном пористом слое.

Авторам не известны работы, посвященные исследованию влияния наклонного магнитного поля на конвективное течение Бенарда — Марангони в пористой среде. Наличие магнитного поля в электропроводящей жидкости, как правило, препятствует развитию неустойчивости течения. В [12] исследовалось конвективное течение Бенарда магнитогидродинамической жидкости в предположении, что зависимость между напряженностью магнитного поля \mathbf{H} и магнитной индукцией \mathbf{B} является линейной. Однако для ряда материалов эта зависимость не является линейной [13]. В [14, 15] конвективное течение изучалось с использованием нелинейной зависимости между \mathbf{H} и \mathbf{B} , предложенной в [13]. В случае нелинейной зависимости между \mathbf{H} и \mathbf{B} возникает сверхустойчивое конвективное течение, в котором неустойчивость проявляется в виде осциллирующей конвекции.

В настоящей работе с использованием модели Бринкмана исследуется устойчивость конвективного течения Бенарда — Марангони в горизонтальном пористом слое при наличии наклонного магнитного поля с нелинейной зависимостью магнитной проницаемости от магнитной индукции. Пористый слой снизу ограничен жесткой поверхностью, сверху — деформируемой свободной поверхностью. Задача определения собственных значений краевой задачи решается с использованием полиномов Чебышева первого рода.

1. Математическая формулировка задачи. Рассматривается пористый слой, заполненный несжимаемой электропроводящей вязкой жидкостью. При описании пористого слоя используется модель Бринкмана. Слой находится в постоянном поле силы тяжести, действующем в отрицательном направлении оси x_3 и в магнитном поле постоянной напряженности \mathbf{H} (вектор \mathbf{H} составляет угол ω с положительным направлением оси x_3). Нижняя граница слоя $x_3 = 0$ полагается жесткой, верхняя граница $x_3 = d$ — недеформируемой свободной поверхностью, на которой действуют зависящие от температуры поверхностные силы. Температуры на поверхностях $x_3 = 0$ и $x_3 = d$ равны T_0 и $T_0 - T_u$ соответственно.

Принимается аппроксимация Буссинеска

$$\rho = \rho_0(1 - \alpha(T - T_0)),$$

где ρ — плотность жидкости; ρ_0 — плотность жидкости при температуре T_0 ; T — температура жидкости; α — коэффициент объемного расширения. Компоненты векторов B_i , H_i связаны нелинейной зависимостью [14]

$$H_i = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial B} \frac{\partial B}{\partial B_i} = \rho_0 \frac{\partial \psi}{\partial B} \frac{B_i}{B} = \rho_0 \phi B_i,$$

где $\psi = \psi(\rho_0, B)$ — внутренняя энергия; $\phi = B^{-1} \partial \psi / \partial B$ — магнитная проницаемость. Магнитная индукция полагается постоянной: $B_i = B(\sin \omega, 0, \cos \omega)$. С учетом сделанных предположений получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\rho_0}{\varphi} \frac{\partial V_i}{\partial t} &= -P_{,i} - \frac{\mu}{K} V_i + \frac{\mu}{\varphi} \nabla^2 V_i + \rho_0(1 - \alpha(T - T_0))g_i + \rho_0(\phi B_i)_k B_k, & V_{i,i} &= 0, \\ (\rho_0 c)_m \frac{\partial T}{\partial t} &+ (\rho_0 c_p)_f V_i \cdot \nabla T = k \nabla^2 T, & B_{i,i} &= 0, \\ J_i &= e_{ijk}(\rho_0 \phi B_i)_{k,j}, & \frac{\partial B_i}{\partial t} &= V_{i,j} B_j - V_j B_{i,j} - \frac{\rho_0}{\sigma'} e_{ijk} J_{k,j}, \end{aligned} \tag{1}$$

где V_i — компоненты вектора скорости; φ — пористость; P — гидростатическое давление; K — проницаемость пористой среды; μ — динамическая вязкость; g_i — ускорение свободного падения; k — теплопроводность; c_p — удельная теплоемкость; $(\rho_0 c_p)_f$, $(\rho_0 c)_m$ — теплоемкости единицы объема жидкости и пористой среды соответственно; J_i — плотность тока; σ' — электропроводность.

На ограничивающих жидкость плоскостях $x_3 = 0$ и $x_3 = d$ задаются следующие краевые условия:

— $x_3 = d$:

$$V_3 = 0, \quad k \nabla T \cdot \mathbf{n} + qT = 0, \quad J_3 = 0, \quad B_{3,3} = 0, \quad 2\rho_0 \frac{\nu}{\varphi} D_{nt} = \frac{\partial \gamma}{\partial T} \nabla T \cdot \mathbf{t}; \quad (2)$$

— $x_3 = 0$:

$$V_3 = 0, \quad V_{3,3} = 0, \quad T = 0, \quad J_{3,3} = 0, \quad B_3 = 0. \quad (3)$$

Здесь q — коэффициент теплообмена; ν — кинематическая вязкость; \mathbf{n} , \mathbf{t} — единичный вектор нормали и единичный вектор касательной к верхней поверхности соответственно; γ — поверхностное натяжение, являющееся линейной функцией температуры: $\gamma = \gamma_0 - \tau(T - T_0)$; γ_0 — поверхностное натяжение при температуре T_0 ; τ — градиент поверхностного натяжения.

Система уравнений (1) имеет стационарное решение

$$\mathbf{V} = \mathbf{0}, \quad -\nabla P + \rho \mathbf{g} = 0, \quad T = T_0 - \beta x_3, \quad \phi = \phi(B), \\ \mathbf{B} = B(\sin \omega, 0, \cos \omega), \quad \mathbf{J} = \mathbf{0}, \quad B = \text{const}$$

(β — обратный градиент температуры). Пусть линейное возмущение стационарного решения имеет вид

$$\mathbf{V} = \mathbf{0} + \mathbf{V}, \quad P = P(x_3) + p, \quad \mathbf{B} = B(\sin \omega, 0, \cos \omega) + (b_1, b_2, b_3), \\ T = T_0 - \beta x_3 + \theta, \quad \phi = \phi(B) + (b_1 \sin \omega, 0, b_3 \cos \omega) \phi_{,B}, \quad \mathbf{J} = \mathbf{0} + \mathbf{J}.$$

Из (1) для возмущений получаем систему уравнений

$$\frac{1}{\varphi} \frac{\partial V_i}{\partial t} = -\nabla \left(\frac{p}{\rho_0} \right) - \frac{\nu}{K} V_i + \frac{\nu}{\varphi} \nabla^2 V_i + \alpha \theta g \delta_{i3} + \phi_{,B} B^2 G_i G_r G_j b_{r,j} + \phi B G_j b_{i,j}, \quad V_{i,i} = 0, \\ G_m \frac{\partial \theta}{\partial t} - V_3 \beta = \lambda_m \nabla^2 \theta, \quad b_{i,i} = 0, \quad (4)$$

$$J_i = \varepsilon_{ijk} (\rho_0 \phi b_k + \rho_0 \phi_{,B} B (\mathbf{b} \cdot \mathbf{G}) G_k)_{,j}, \quad \frac{\partial b_i}{\partial t} = B G_j V_{i,j} - \frac{1}{\sigma'} \varepsilon_{ijk} J_{k,j},$$

где $G_m = (\rho_0 c)_m / (\rho_0 c_p)_f$; $\lambda_m = k / (\rho_0 c_p)_f$ — коэффициент тепловой диффузии; $\mathbf{G} = (\sin \omega, 0, \cos \omega)$. Из краевых условий (2), (3) следует

$$V_3 = 0, \quad k \frac{\partial \theta}{\partial x_3} + q\theta = 0, \quad J_3 = 0, \quad \frac{\partial b_3}{\partial x_3} = 0, \quad \rho_0 \frac{\nu}{\varphi} \left(\frac{\partial^2 V_3}{\partial x_3^2} \right) - \tau \nabla_h^2 \theta = 0; \quad (5)$$

$$V_3 = 0, \quad V_{3,3} = 0, \quad \theta = 0, \quad J_{3,3} = 0, \quad b_3 = 0. \quad (6)$$

Вводя безразмерные переменные

$$x_i = d \hat{x}_i, \quad t = \frac{d^2}{\lambda_m} \hat{t}, \quad V_i = \frac{\lambda_m}{d} \hat{V}_i, \quad p = \frac{\mu \lambda_m}{K} \hat{p}, \quad b_i = B \cos \omega \hat{b}_i, \\ J_i = B \frac{(\rho_0 \phi)}{d} \cos \omega \hat{J}_i, \quad \theta = |T_0 - T_u| \hat{\theta}, \quad (7)$$

уравнение (4) запишем в виде

$$\begin{aligned} \frac{\text{Da}_{eff}}{\text{Pr}_r} \frac{\partial V_i}{\partial t} &= -p_{,i} - V_i + \text{Da}_{eff} \nabla^2 V_i + \text{Ra} \theta \delta_{i3} + \frac{Q \text{Pr}_m}{\cos \omega} (G_j b_{i,j} + \varepsilon G_i G_r G_j b_{r,j}), \quad V_{i,i} = 0, \\ G_m \frac{\partial \theta}{\partial t} + H' V_3 &= \nabla^2 \theta, \quad b_{i,i} = 0, \\ J_i &= e_{ijk} (b_i + \varepsilon (\mathbf{b} \cdot \mathbf{G}) \mathbf{G})_{k,j}, \quad \frac{\partial b_i}{\partial t} = \frac{G_j}{\cos \omega} V_{i,j} - \text{Pr}_m e_{ijk} J_{k,j}, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} \text{Pr}_r &= \frac{\nu}{\lambda_m}, \quad \text{Pr}_m = \frac{\eta}{\lambda_m}, \quad \text{Ra} = \frac{\alpha g d K |T_0 - T_u|}{\lambda_m \nu}, \quad Q = \frac{(\rho_0 \phi) B^2 \cos^2 \omega K}{\rho_0 \nu \eta}, \\ \text{Da}_{eff} &= \frac{K}{d^2 \varphi}, \quad \varepsilon = \frac{B \phi_{,B}}{\phi}, \quad \eta = \frac{\rho_0 \phi}{\sigma'}, \quad H' = -\frac{T_0 - T_u}{|T_0 - T_u|}, \end{aligned}$$

$H' = 1$ при нагреве сверху, $H' = -1$ при нагреве снизу; Pr_r , Pr_m , Ra , Q , Da_{eff} — “вязкое” и “магнитное” числа Прандтля, число Рэлея пористого слоя, число Чандрасекхара, эффективное число Дарси соответственно; ε — коэффициент в нелинейной зависимости между напряженностью магнитного поля и индукцией; η — удельное электросопротивление. Краевые условия (5), (6) в безразмерных переменных записываются следующим образом:

$$V_3 = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial x_3} + \text{Bi} \theta = 0, \quad \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} V_3 - \text{M}_{eff} \nabla_h^2 \theta = 0, \quad J_3 = 0, \quad b_{3,3} = 0; \quad (9)$$

$$V_3 = 0, \quad V_{3,3} = 0, \quad \theta = 0, \quad J_{3,3} = 0, \quad b_3 = 0 \quad (10)$$

($\text{Bi} = qd/k$ — число Био; $\text{M}_{eff} = \tau \beta \varphi d^2 / (\rho_0 \nu \lambda_m)$ — эффективное число Марангони). Будем искать решение в виде

$$\Psi(t, x_i) = \Psi(x_3) e^{\sigma t} e^{i(a_1 x_1 + a_2 x_2)}.$$

Здесь $\Psi = \{w, \xi, \theta, J, b\}$; w, ξ, θ, J, b — третья компонента скорости, завихренность, температура, плотность тока и индукция магнитного поля соответственно, являющиеся функциями переменной x_3 ; a_1, a_2 — волновые числа; σ — показатель скорости роста величин. После преобразований уравнения (8) принимают вид

$$\begin{aligned} \frac{\text{Da}_{eff}}{\text{Pr}_r} \sigma \xi &= -\xi + \text{Da}_{eff} (D^2 - a^2) \xi + Q \text{Pr}_m (D + iC) J, \\ \frac{\text{Da}_{eff} \sigma}{\text{Pr}_r} (D^2 - a^2) w &= -(D^2 - a^2) w + \\ &+ \text{Da}_{eff} (D^2 - a^2)^2 w - \text{Ra} a^2 \theta - Q (D + iC)^2 w + \sigma Q (D + iC) b, \\ G_m \sigma \theta + H' w &= (D^2 - a^2) \theta, \\ \sigma [a^2 J + ia_2 \varepsilon \sin \omega \cos \omega (a^2 + iCD) b] &= [(D + iC) \xi + \text{Pr}_m (D^2 - a^2) J] (a^2 + \varepsilon a_2^2 \sin^2 \omega), \\ \sigma b &= (D + iC) w + \text{Pr}_m (D^2 - a^2) b - \\ &- \varepsilon \text{Pr}_m \cos \omega (a^2 + iCD) \frac{ia_2 \sin \omega J + ia_1 \sin \omega D b + a^2 \cos \omega b}{a^2 + \varepsilon a_2^2 \sin^2 \omega}. \end{aligned} \quad (11)$$

Граничные условия (9), (10) записываются в виде

$$w = 0, \quad D\theta + \text{Bi}\theta = 0, \quad D^2w + a^2 M_{eff} \theta = 0, \quad D\xi = 0, \quad J = 0, \quad Db = 0; \quad (12)$$

$$w = 0, \quad Dw = 0, \quad \theta = 0, \quad \xi = 0, \quad DJ = 0, \quad b = 0 \quad (13)$$

($a^2 = a_1^2 + a_2^2$; $D = \partial/\partial x_3$; $C = a_1 \text{tg } \omega$). Уравнения (11) и краевые условия (12), (13) представляют собой задачу определения собственных чисел и собственных функций краевой задачи для системы дифференциальных уравнений 12-го порядка. Данная задача решается численно с использованием разложений по полиномам Чебышева. Критические числа Рэлея и Марангони определяются в результате минимизации решения по параметрам a_1 и a_2 при различных значениях параметров задачи. Во всех случаях критические значения числа Рэлея соответствуют значению $a_1 = 0$. Таким образом, если магнитное поле и поле силы тяжести не параллельны, то неустойчивость возникает сначала в виде продольных роллов. В случае наклонного магнитного поля (поле образует угол с полем силы тяжести) наличие четных и нечетных производных не позволяет найти точные собственные функции, удовлетворяющие краевым условиям. Из численных решений следует, что стационарное течение возможно во всех случаях, однако сверхустойчивое течение возможно только при достаточно больших значениях Pr_m , например при некоторых значениях угла ω , когда $\text{Pr}_m > \text{Pr}_r(1 + \varepsilon)$.

2. Результаты исследования и их обсуждение. Система уравнений (11) с краевыми условиями (12), (13) решалась численно с использованием спектрального метода Чебышева для случая, когда слой жидкости нагревается снизу ($H' = -1$).

Ниже рассматривается влияние различных сил.

2.1. Влияние сил плавучести. Рассмотрим случай, когда учитываются только силы плавучести и не учитываются силы поверхностного натяжения ($M_{eff} = 0$).

На рис. 1–3 представлены зависимости критического числа Рэлея Ra от числа Чандрасекхара Q при числе Био $\text{Bi} = 0$ и различных значениях эффективного числа Дарси Da_{eff} , параметра ε и угла ω в случае стационарной и сверхустойчивой конвекции. Если неустойчивость возникает в виде продольных роллов, при $\varepsilon = 0$ изменение угла ω не оказывает влияния на значение критического числа Рэлея как в случае стационарной конвекции, так и в случае сверхустойчивой. Полученные результаты совпадают с результатами для случая воздействия вертикального магнитного поля. При $\varepsilon = 1$ с увеличением угла ω критическое число Рэлея уменьшается только в случае сверхустойчивой конвекции (см. рис. 1). Это означает, что величина угла ω оказывает дестабилизирующее воздействие на критическое число Рэлея, а параметр нелинейности ε существенно влияет на сверхустойчивую конвекцию и не влияет на стационарную конвекцию. Более того, с увеличением числа Дарси Da_{eff} и стационарная, и сверхустойчивая конвекция возникают позднее.

В случае если неустойчивость возникает в виде поперечных роллов, с увеличением угла ω критическое число Рэлея увеличивается как при стационарной конвекции, так и при сверхустойчивой. Это означает, что величина угла ω оказывает стабилизирующее влияние.

Проводилось сравнение результатов для случаев возникновения неустойчивости в виде продольных и поперечных роллов при $\text{Da}_{eff} = 0,001$ и различных значениях ω , Q , ε . Изменение величины угла ω не оказывает влияния на стационарную конвекцию, если неустойчивость возникает в виде продольных роллов, и существенно влияет, если неустойчивость возникает в виде поперечных роллов (см. рис. 2). При сверхустойчивой конвекции изменение величины угла ω оказывает существенное влияние в обоих рассматриваемых случаях (см. рис. 3). Очевидно, что критическое число Рэлея в случае продольных роллов меньше критического числа Рэлея в случае поперечных роллов.

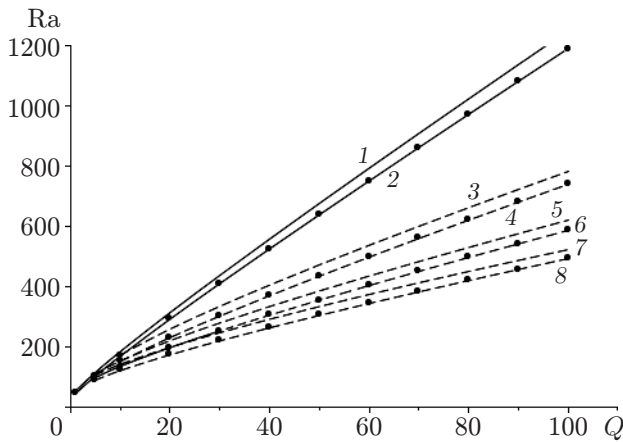


Рис. 1

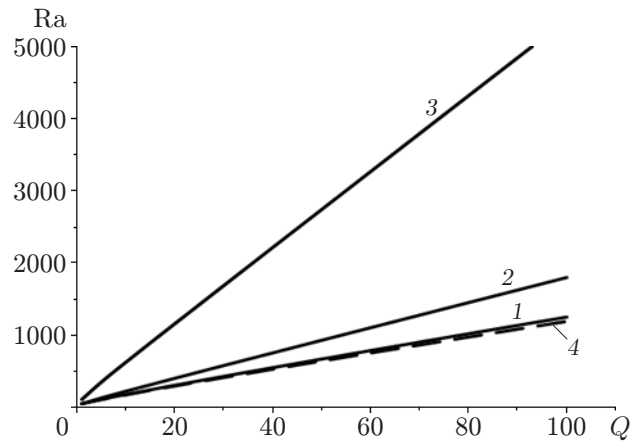


Рис. 2

Рис. 1. Зависимость критического числа Рэлея от числа Чандрасекхара в случае неустойчивости в виде продольных роллов при стационарной (сплошные линии) и сверхустойчивой (штриховые линии) конвекции, $Bi = 0$, $G_m = 1$, $\varepsilon = 1$ и различных значениях эффективного числа Дарси Da_{eff} и угла ω :
 1, 3, 5, 7 — $Da_{eff} = 0,01$, 2, 4, 6, 8 — $Da_{eff} = 0,001$; 3, 4 — $\omega = 15^\circ$, 5, 6 — $\omega = 45^\circ$, 7, 8 — $\omega = 75^\circ$

Рис. 2. Зависимость критического числа Рэлея от числа Чандрасекхара в случае стационарной конвекции при $Bi = 0$, $G_m = 1$, $Da_{eff} = 0,001$ и различной величине угла ω : сплошные линии — неустойчивость в виде поперечных роллов, штриховая — в виде продольных роллов; 1 — $\omega = 15^\circ$, 2 — $\omega = 45^\circ$, 3 — $\omega = 75^\circ$, 4 — $\omega = 15, 45, 75^\circ$

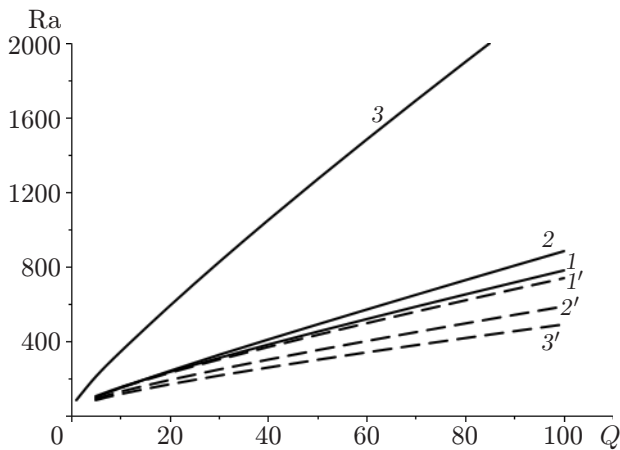


Рис. 3. Зависимость критического числа Рэлея от числа Чандрасекхара в случае сверхустойчивой конвекции при $Da_{eff} = 0,001$, $Bi = 0$, $G_m = 1$, $\varepsilon = 1$ и различной величине угла ω : сплошные линии — неустойчивость в виде поперечных роллов, штриховые — в виде продольных роллов; 1, 1' — $\omega = 15^\circ$, 2, 2' — $\omega = 45^\circ$, 3, 3' — $\omega = 75^\circ$

С увеличением числа Био при сверхустойчивой конвекции число Рэлея увеличивается при возникновении неустойчивости и в виде продольных, и в виде поперечных роллов. Таким образом, с увеличением числа Био конвекция возникает позднее. Это может быть обусловлено тем, что с увеличением числа Био свободная поверхность становится плохим проводником, и как следствие увеличиваются критические параметры устойчивости.

2.2. *Влияние сил поверхностного натяжения.* Рассмотрим влияние сил поверхностного натяжения в предположении, что силы плавучести отсутствуют ($Ra = 0$). На рис. 4–6 приведены зависимости критического числа Марангони Me_{eff} от числа Чандрасекхара Q при $Bi = 0$ и различных значениях эффективного числа Дарси Da_{eff} , параметра ε и угла ω для случаев установившейся и сверхустойчивой конвекции.

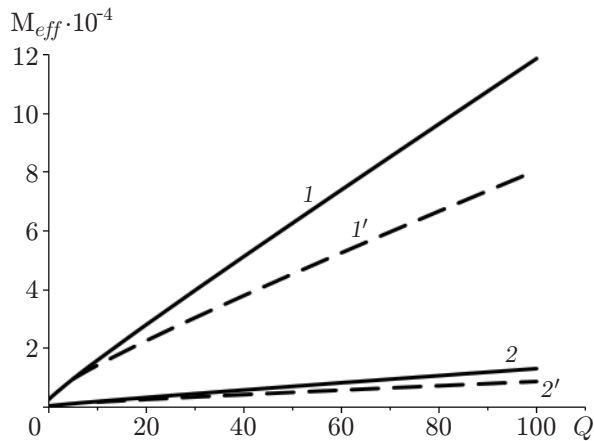


Рис. 4

Рис. 4. Зависимость критического числа Марангони от числа Chandrasekхара в случае неустойчивости в виде продольных роллов при $Bi = 0$, $G_m = 1$, $\varepsilon = 1$ и различных значениях эффективного числа Дарси:

сплошные линии — стационарная конвекция, штриховые — сверхустойчивая конвекция; 1, 1' — $Da_{eff} = 0,001$, 2, 2' — $Da_{eff} = 0,01$

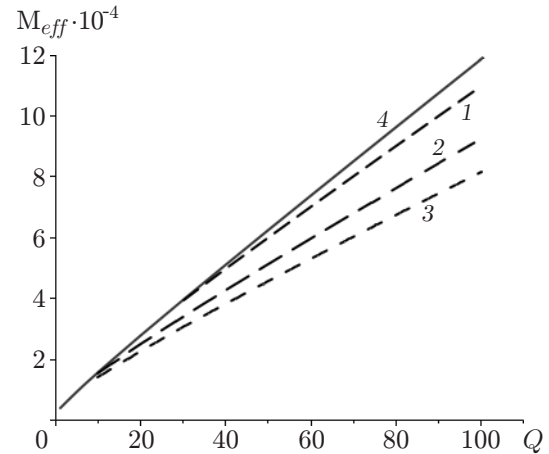


Рис. 5

Рис. 5. Зависимость критического числа Марангони от числа Chandrasekхара в случае неустойчивости в виде поперечных роллов при $Da_{eff} = 0,001$, $\varepsilon = 1$, $G_m = 1$, $Bi = 0$ и различной величине угла ω :

сплошная линия — стационарная конвекция, штриховые — сверхустойчивая конвекция; 1 — $\omega = 15^\circ$, 2 — $\omega = 45^\circ$, 3 — $\omega = 75^\circ$

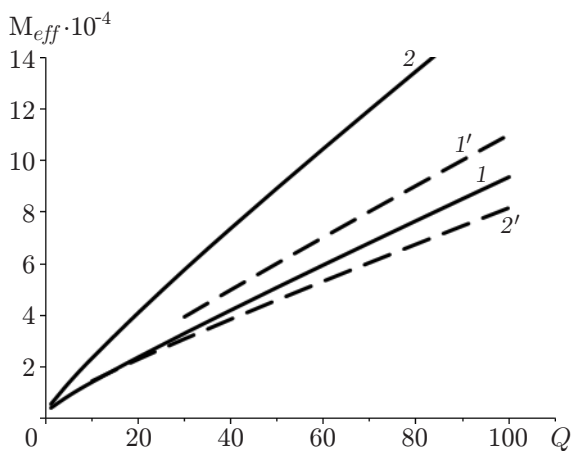


Рис. 6. Зависимость критического числа Марангони от числа Chandrasekхара в случае сверхустойчивой конвекции при $Da_{eff} = 0,001$, $Bi = 0$, $G_m = 1$, $\varepsilon = 1$ и различной величине угла ω :

сплошные линии — неустойчивость в виде поперечных роллов, штриховые — в виде продольных роллов; 1, 1' — $\omega = 15^\circ$, 2, 2' — $\omega = 75^\circ$

При $\varepsilon = 0$ и неустойчивости в виде продольных роллов как в случае стационарной конвекции, так и в случае сверхустойчивой с уменьшением числа Дарси Da_{eff} время, при котором возникает конвекция Марангони, увеличивается (см. рис. 4), величина угла ω не влияет на значение критического числа Me_{eff} . Полученные результаты совпадают с результатами для случая воздействия вертикального магнитного поля.

При $\varepsilon = 1$ с увеличением угла ω критическое число Me_{eff} уменьшается только в случае сверхустойчивой конвекции (см. рис. 5), т. е. величина угла ω оказывает дестабилизирующее влияние на критическое число Me_{eff} , а параметр нелинейности ε оказывает стабилизирующее влияние на сверхустойчивую конвекцию и не оказывает влияния на стационарную конвекцию.

В случае если неустойчивость возникает в виде поперечных волн, с увеличением угла ω критическое число Марангони Me_{eff} увеличивается только при сверхустойчивой конвекции. Это означает, что величина угла ω оказывает стабилизирующее воздействие. Критическое число Марангони Me_{eff} в случае продольных роллов меньше, чем в случае поперечных роллов (см. рис. 6).

2.3. Влияние сил поверхностного натяжения и сил плавучести. На рис. 7–9 приведены зависимости критического числа Марангони Me_{eff} от чисел Чандрасекхара Q и Рэлея Ra при различных значениях других параметров задачи в случае стационарной и сверхустойчивой конвекции.

В случае если неустойчивость возникает в виде продольных роллов, при $\varepsilon = 1$ с увеличением числа Рэлея критическое число Марангони уменьшается как при стационарной конвекции, так и при сверхустойчивой. Это означает, что силы плавучести оказывают дестабилизирующее воздействие на конвекцию Марангони. При увеличении угла ω число Марангони уменьшается только в случае сверхустойчивой конвекции (см. рис. 7), т. е. величина угла ω оказывает дестабилизирующее воздействие на критическое число Me_{eff} при любых значениях числа Рэлея. Параметр нелинейности ε оказывает стабилизирующее влияние в случае сверхустойчивой конвекции и не оказывает влияния в случае стационарной конвекции.

На рис. 8, где показана зависимость критического числа Марангони от числа Рэлея при различных значениях ε и ω , видно, что с увеличением сил плавучести влияние сил поверхностного натяжения уменьшается в случае как стационарной, так и сверхустойчивой конвекции. Эта тенденция имеет место при решении линейной и нелинейной задач (см. рис. 8). С увеличением угла ω критическое число Марангони Me_{eff} уменьшается только в случае сверхустойчивой конвекции. При возникновении неустойчивости в виде поперечных роллов как в линейной, так и в нелинейной задаче с увеличением сил плавучести влияние сил поверхностного натяжения уменьшается в случае сверхустойчивой конвекции (см. рис. 9). С увеличением угла ω критическое число Марангони Me_{eff} увеличивается.

Заключение. В работе исследована конвекция Бенарда — Марангони, возникающая в горизонтальном пористом слое, заполненном магнитогидродинамической жидкостью и находящемся в наклонном магнитном поле. Рассмотрены случаи линейной и нелинейной зависимостей магнитной проницаемости от магнитной индукции. Для описания слоя, ограниченного снизу жесткой поверхностью, сверху — недеформируемой свободной поверхностью, используется модель Бринкмана. Исследовано влияние на конвекцию сил плавучести и сил поверхностного натяжения. Задача сведена к задаче определения собственных функций краевой задачи для системы дифференциальных уравнений, которая решается численно с использованием полиномов Чебышева первого рода.

Вычислены критические числа Марангони и Рэлея при различных значениях эффективного числа Дарси, чисел Био, Чандрасекхара, параметра нелинейности и угла наклона магнитного поля. Рассмотрены случаи стационарной и сверхустойчивой конвекции. Уста-

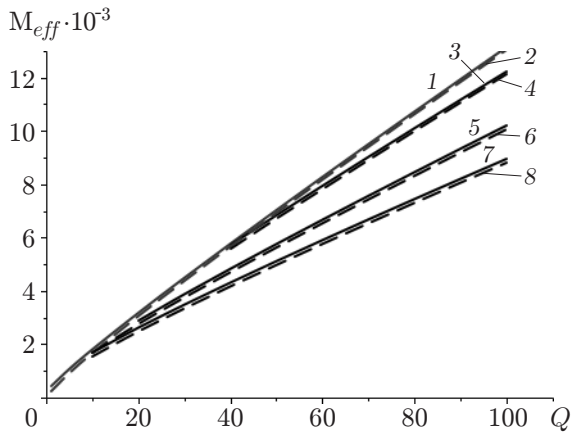


Рис. 7

Рис. 7. Зависимость критического числа Марангони от числа Чандрасекара в случае неустойчивости в виде продольных роллов при $Da_{eff} = 0,01$, $Bi = 0$, $G_m = 1$, $\varepsilon = 1$ и различных значениях числа Рэлея и угла ω :

1, 2 — стационарная конвекция, 3–8 — сверхустойчивая конвекция (3, 4 — $\omega = 15^\circ$, 5, 6 — $\omega = 45^\circ$, 7, 8 — $\omega = 75^\circ$); сплошные линии — $Ra = 10$, штриховые — $Ra = 30$

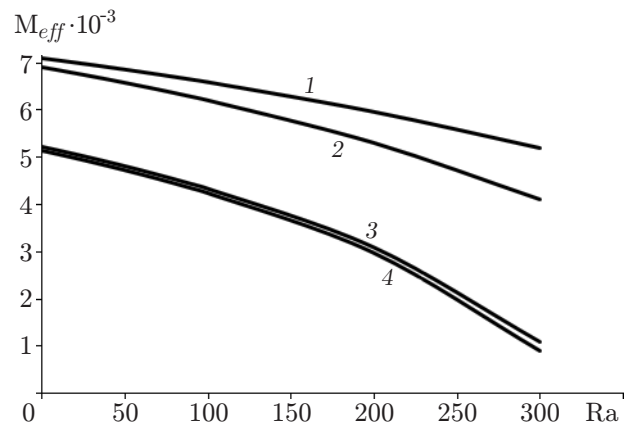


Рис. 8

Рис. 8. Зависимость критического числа Марангони от числа Рэлея в случае неустойчивости в виде продольных роллов при $Q = 50$, $Bi = 0$, $G_m = 1$, $Da_{eff} = 0,01$ и различных значениях параметра ε и угла ω :

1 — стационарная конвекция, 2–4 — сверхустойчивая конвекция (2 — $\varepsilon = 1$, $\omega = 15^\circ$, 3 — $\varepsilon = 1$, $\omega = 75^\circ$, 4 — $\varepsilon = 0$, $\omega = 15^\circ, 75^\circ$)

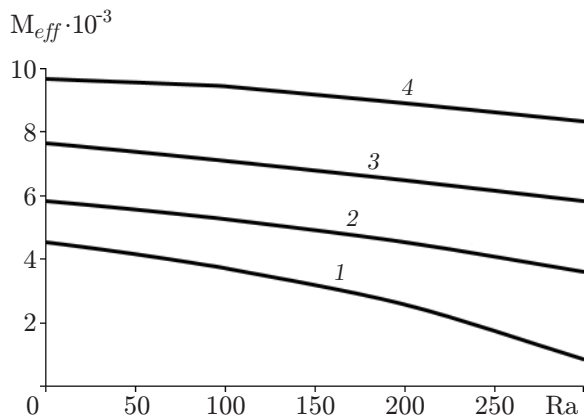


Рис. 9. Зависимость критического числа Марангони от числа Рэлея в случае неустойчивости в виде поперечных роллов и сверхустойчивой конвекции при $Q = 50$, $Bi = 0$, $G_m = 1$, $Da_{eff} = 0,01$ и различных значениях параметра ε и угла ω :

1 — $\varepsilon = 0$, $\omega = 15^\circ$, 2 — $\varepsilon = 1$, $\omega = 15^\circ$, 3 — $\varepsilon = 0$, $\omega = 75^\circ$, 4 — $\varepsilon = 1$, $\omega = 75^\circ$

новлено, что с уменьшением эффективного числа Дарси возникновение конвективных течений Рэлея и Марангони задерживается. Также конвективные течения Рэлея и Марангони возникают позднее при увеличении числа Био. Нелинейность магнитной проницаемости не оказывает влияния на стационарную конвекцию, однако существенно влияет на сверхустойчивую конвекцию.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Benard H.** Les tourbillons cellulaires dans une nappe liquid // Rev. Gén. Sci. Pures Appl. 1900. V. 11. P. 1261–1328.

2. **Rayleigh**. On convection currents in a horizontal layer of fluid when the temperature is on the under side // *Philos. Mag.* 1916. V. 32. P. 529–547.
3. **Pearson J.** On convection cells induced by surface tension // *J. Fluid Mech.* 1958. V. 4. P. 489–500.
4. **Nield D.** Surface tension and buoyancy effects in cellular convection // *J. Fluid Mech.* 1964. V. 19. P. 341–352.
5. **Horton C., Rogers F.** Convection currents in a porous medium // *J. Appl. Phys.* 1945. V. 16. P. 367–370.
6. **Vafai K.** Handbook of porous media. Boca Raton: Taylor and Francis, 2005.
7. **Nield D.** Convection in porous media / D. Nield, A. Bejan. N. Y.: Springer, 2006.
8. **Rajagopal K., Saccomandi G., Vergori L.** Stability analysis of Rayleigh — Benard convection in a porous medium // *Z. angew. Math. Phys.* 2011. Bd 62. S. 149–160.
9. **Hennenberg M., Saghier M., Rednikov A., Legros J.** Porous media and the Benard — Marangoni problem // *Transport Porous Media.* 1997. V. 27. P. 327–335.
10. **Shivakumara I., Nanjundappa C., Chavaraddi K.** Darcy — Benard — Marangoni convection in porous media // *Intern. J. Heat Mass Transfer.* 2009. V. 52. P. 2815–2823.
11. **Gangadharaiah Y.** Onset of Benard — Marangoni convection in a composite layer with anisotropic porous material // *J. Appl. Fluid Mech.* 2016. V. 9. P. 1551–1558.
12. **Thompson W.** Thermal convection in a magnetic field // *Philos. Mag. Ser. 7.* 1951. V. 42. P. 1417–1432.
13. **Roberts P.** Equilibria and stability of a fluid type II superconductor // *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 1981. V. 34, N 3. P. 327–343.
14. **Abdullah A., Lindsay K.** Benard convection in a non-linear magnetic fluid // *Acta Mech.* 1990. V. 85. P. 27–42.
15. **Banjer H., Abdullah A.** Thermal instability in superposed porous and fluid layers in the presence of a magnetic field using Brinkman model // *J. Porous Media.* 2012. V. 15, N 1. P. 1–10.

*Поступила в редакцию 21/IX 2017 г.,
в окончательном варианте — 22/V 2018 г.*
