Теплофизика и аэромеханика, том 6, № 2, 1999 г.

УДК 533.601.15

МОДЕЛЬ МАХОВСКОЙ КОНФИГУРАЦИИ СТАЦИОНАРНЫХ УДАРНЫХ ВОЛН В ПЛОСКОМ СУЖАЮЩЕМСЯ КАНАЛЕ

А.Е. МЕДВЕДЕВ, В.М. ФОМИН

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, Новосибирск

Предложена математическая модель для расчета параметров стационарного течения газа внутри плоского сужающегося канала, образованного двумя симметрично расположенными клиньями. Модель описывает течение с нерегулярным (маховским) отражением падающей ударной волны. При некоторых предположениях решение задачи сводится к системе нелинейных алгебраических и интегральных уравнений. Представленная модель течения газа описывает следующие структуры течения: нерегулярное отражение ударных волн, кривизну ударных волн и контактного разрыва, волну разрежения и звуковую линию. Сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными показывает, что данная модель позволяет рассчитывать высоту "ножки" Маха и длину дозвуковой области течения.

Исследования нерегулярного (маховского) отражения ударных волн имеют давнюю историю — начиная с работ Э. Маха в конце прошлого века до настоящего времени [1 – 11]. Однако до сих пор не известно, существует ли аналитическое решение для маховского отражения плоских ударных волн [12] (с. 321). Не касаясь вопроса выбора критического угла клина (далее считается, что таковой больше критического) и связанных с этим проблем [2 – 6], отметим, что пока не ясна качественная картина течения с маховским отражением в канале. Инженерный подход [7, 8] дает заниженные значения высоты "ножки" Маха и длины дозвуковой области. В работе [9] на основе модели [7, 8] учитывается влияние условий вниз по потоку (донное давление на задней кромке клина) на параметры течения. При этом считается, что область влияния ограничивается не последней характеристикой волны разрежения, а некоторой промежуточной (лежащей между первой и последней). В работе [10] предложена модель течения с кривой отраженной ударной волной и непостоянным течением в области над контактным разрывом. Замыкание решения проводилось по первой характеристике волны разрежения (без учета донного давления).

Рассмотрим плоский канал, образованный двумя симметрично расположенными клиньями. Газ со сверхзвуковой скоростью натекает слева. В силу симметричности задачи будем рассматривать только верхнюю полуплоскость с клином ABG и осью симметрии ON (рис. 1). На рисунке приняты следующие обозначения: T — тройная точка; AT — присоединенная ударная волна; TO' — криволинейная ударная волна ("ножка" Маха); TF — отраженная ударная волна; TE — контактный разрыв; GF', GF и GF'' — первая и промежу-

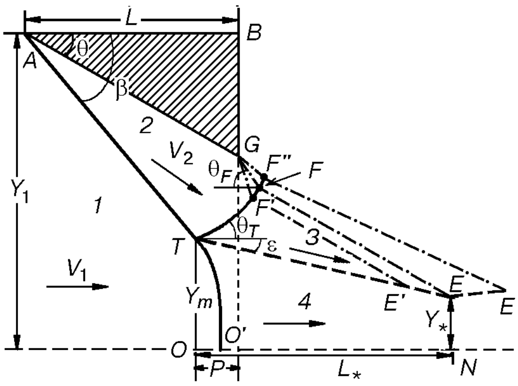

Рис. 1. Схема маховской конфигурации.

точные характеристики веера волн разрежения; FE, $F'E'$ и $F''E''$ — продолжения соответствующих характеристик за ударной волной TF''; EN — звуковая линия. Линейные размеры области течения: Y_1 — входная полувысота канала; Y_m — высота "ножки" Маха; L — длина клина; Y_* — расстояние от оси симметрии до контактного разрыва в звуковом сечении EN; L_* — длина области дозвукового течения, образованной осью симметрии и контактным разрывом; P — расстояние между точкой O и задней кромкой клина BG ($P > 0$, если точка O расположена вниз по потоку от задней кромки клина; $P < 0$ — в противном случае); θ — угол клина; β — угол присоединенной ударной волны; ε — угол наклона контактного разрыва в точке T; θ_T — угол наклона ударной волны TF в точке T; θ_F — угол наклона характеристики GF.

В соответствии с обозначениями на рис. 1 расчетная модель основана на следующих предположениях.

1. Угол клина больше критического ($\beta > \beta_N$), и реализуется конфигурация с тройной точкой T. Критический угол β_N определяется из уравнения [13]

$$\mathrm{ctg}^4 \beta_N - \frac{\gamma\mu^2\left(\xi+\mu^2\right)+\left(1-\xi\right)^2}{\left(\xi+\mu^2\right)\left(1+\xi\mu^2\right)}\mathrm{ctg}^2\beta_N - \frac{\gamma\left(\xi+\mu^2\right)}{\left(1+\xi\mu^2\right)^2} = 0,$$

где $\mu^2 = (\gamma-1)/(\gamma+1)$, $\xi = P_1/P_2$, γ – показатель политропы газа, P_1 и P_2 — давление перед и за косой ударной волной AT соответственно.

2. Клин достаточно короток, и его длина L такова, что ударная волна TF не попадает на сторону клина AG.

3. Некоторая промежуточная характеристика волны разрежения FE пересекается с контактным разрывом TE в точке E звуковой линии EN. Как показали эксперименты [14] и численные расчеты [15], давление за клином (за линией BG на рис. 1) не влияет на высоту "ножки" Маха. Поэтому выбор характеристики $GF''E''$ не влияет на решение, если точка E'' расположена правее звуковой точки E (см. рис. 1).

Пусть заданы параметры клина (длина L, угол θ и полувысота канала Y_1) и параметры набегающего потока (давление P_1, скорость V_1 и число Маха M_1). Решение в области *2* находится аналитически по известным соотношениям [13]. Угол наклона присоединенной ударной волны β определяется из уравнения

$$\operatorname{ctg}\theta = \left[\frac{(\gamma+1)\,\mathrm{M}_1^2}{2\left(\mathrm{M}_1^2 \sin^2\beta - 1\right)} - 1 \right] \operatorname{tg}\beta \,. \qquad (1)$$

Число Маха M_2 и давление P_2 имеют вид

$$\mathrm{M}_2 = \sqrt{\frac{2+(\gamma-1)\,\mathrm{M}_1^2}{2\gamma\,\mathrm{M}_1^2 \sin^2\beta - (\gamma-1)} + \frac{2\mathrm{M}_1^2 \cos^2\beta}{(\gamma-1)\,\mathrm{M}_1^2 \sin^2\beta + 2}}\,,$$

$$P_2 = \left[\frac{2\gamma}{\gamma+1}\left(\mathrm{M}_1^2 \sin^2\beta - 1\right) + 1 \right] P_1 \,. \qquad (2)$$

Ударная волна TO' — “ножка” Маха — криволинейная, так как в точке O' она перпендикулярна оси симметрии, а в точке T угол ударной волны TO' меньше прямого. Для нахождения решения в области *4* в рамках модели одномерного течения с переменным сечением канала необходимо осреднить по высоте канала параметры течения за ударной волной TO'. При этом потребуем выполнения интегральных законов сохранения (по длине l кривой TO'):

1) закон сохранения массы

$$\rho_1 V_1 = \frac{1}{L}\oint_L \rho V dl \,,$$

2) закон сохранения импульса

$$\rho_1 V_1^2 + P_1 = \frac{1}{L}\oint_L \left(\rho V^2 + P\right) dl \,,$$

3) закон сохранения энергии

$$c_p T_1 + V_1^2/2 = c_p\, T + V^2/2 \,,$$

который выполняется локально, так как течение изоэнтропично по обе стороны ударной волны. После этого определим среднее давление P_{40} и среднее число Маха M_{40} за ударной волной TO':

$$P_{40} = \frac{1}{L}\oint_L P dl, \quad \mathrm{M}_{40} = \frac{1}{L}\oint_L \mathrm{M} dl \,,$$

где P — локальное давление, M — локальное число Маха за ударной волной TO'.

Для нахождения угла ε примем условие равенства давлений по обе стороны контактного разрыва: $P_{30} = P_{40}$, где $P_{30} = \left[\frac{2\gamma}{\gamma+1}\left(\mathrm{M}_2^2 \sin^2\beta_{23} - 1\right) + 1 \right] P_2$ — давление за ударной волной TF в точке T. Отсюда найдем угол β_{23} между ударной волной TF и вектором скорости V_2 в точке T:

$$\beta_{23} = \arcsin\left\{\frac{1}{M_2}\sqrt{\frac{\gamma+1}{2\gamma}\left(\frac{P_{40}}{P_2}-1\right)+1}\right\}. \tag{3}$$

Тогда

$$\varepsilon = \theta - \mathrm{arctg}\left\{\left[\frac{(\gamma+1)\mathrm{M}_2^2}{2\left(\mathrm{M}_2^2\sin^2\beta_{23}-1\right)}-1\right]\mathrm{tg}\beta_{23}\right\}. \tag{4}$$

Угол θ_T наклона TF к оси x (в точке T) и угол θ_F между характеристикой GF волны разрежения и осью x имеют вид

$$\theta_T = \beta_{23} - \theta, \quad \theta_F = \arcsin(1/\mathrm{M}_2) + \theta - \varepsilon_F, \tag{5}$$

где

$$\varepsilon_F = \sqrt{\frac{\gamma+1}{\gamma-1}}\left[\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\sqrt{\mathrm{M}_F^2-1}\right)-\mathrm{arctg}\left(\sqrt{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}}\sqrt{\mathrm{M}_2^2-1}\right)\right],$$

$$\mathrm{M}_F = \frac{2}{\gamma-1}\left[\left(1+\frac{\gamma-1}{2}\mathrm{M}_2^2\right)\left(\frac{P_2}{P_F}\right)^{(\gamma-1)/\gamma}-1\right],$$

где P_F – давление на характеристике GF.

Область *4* течения газа $TO'EN$ (см. рис.1) рассмотрим в рамках модели одномерного течения газа в “канале” переменного сечения, которая дает следующую систему уравнений:

высота ножки Маха

$$\frac{Y_m}{L} = \frac{1}{\mathrm{M}_{40}}\left[\frac{2}{\gamma+1}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}\mathrm{M}_{40}^2\right)\right]^{(1/2)(\gamma+1)/(\gamma-1)}\frac{Y_*}{L}, \tag{6}$$

длина “канала”

$$\frac{L_*}{L} = \left(\frac{Y_m}{L}-\frac{Y'_*}{L}\right)\mathrm{ctg}\varepsilon + X_{E'E}, \tag{7}$$

где $X_{E'E}$ — проекция кривой $E'E$ на ось x, Y'_* — расстояние от оси симметрии до точки E'.

После нахождения высоты Y_m/L определим величину P/L, как и в [8], из уравнения

$$\frac{P}{L} = \frac{[(Y_t/L)-(Y_m/L)]+(\mathrm{tg}\,\theta-\mathrm{tg}\,\beta)}{\mathrm{tg}\,\beta}, \tag{8}$$

где $Y_t/L = Y_1/L - \operatorname{tg}\theta$, Y_t — расстояние от точки *G* до оси симметрии.
Из решения в области *4* найдем:

координаты контактного разрыва *TE*:

$$\tilde{y}(x)/L = \begin{cases} Y_m/L - (x/L)\operatorname{tg}\varepsilon, & 0 \le x \le X_{E'}, \\ Y_{E'E}(x), & X_{E'} < x \le L_*, \end{cases} \tag{9}$$

где x — расстояние от точки *O* вдоль оси симметрии, $X_{E'}$ — координата точки E', $Y_{E'E}(x)$ — проекция кривой $E'E$ на ось x;

давление на *TE*:

$$\tilde{p}(x) = p^* \left[\frac{2}{\gamma+1}\left(1 + \frac{\gamma-1}{2}\tilde{\mathrm{M}}_4^2(x)\right)\right]^{-\gamma/(\gamma-1)}, \tag{10}$$

где $p^* = P_{40}\left[\frac{2}{\gamma+1}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}\mathrm{M}_{40}^2\right)\right]^{\gamma/(\gamma-1)}$ — давление на звуковой линии *EN*; число Маха $\tilde{\mathrm{M}}_4(x)$ в области *4* находится из уравнения

$$\frac{\tilde{y}(x)}{L} = \frac{1}{\tilde{\mathrm{M}}_4(x)}\left[\frac{2}{\gamma+1}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}\tilde{\mathrm{M}}_4^2(x)\right)\right]^{(1/2)(\gamma+1)/(\gamma-1)}\frac{Y_*}{L}, \tag{11}$$

число Маха на *TE* со стороны области *3*

$$\tilde{\mathrm{M}}_3^2(x) = \frac{2}{\gamma-1}\left[\left(\frac{\tilde{p}(x)}{p_n}\right)^{(\gamma-1)/\gamma} - 1\right]. \tag{12}$$

Здесь
$$p_n = P_{30}\left(1+\frac{\gamma-1}{2}\mathrm{M}_{30}^2\right)^{\gamma/(\gamma-1)},$$

$$\mathrm{M}_{30} = \sqrt{\frac{2+(\gamma-1)\mathrm{M}_2^2}{2\gamma\,\mathrm{M}_2^2\sin^2\beta_{23} - (\gamma-1)} + \frac{2\mathrm{M}_2^2\cos^2\beta_{23}}{(\gamma-1)\mathrm{M}_2^2\sin^2\beta_{23} + 2}}$$

есть число Маха за ударной волной *TF* в точке *T*.

Течение газа за линией *TF* в области *3* является сверхзвуковым. В области *2* течение газа безвихревое, тогда, согласно [16,17], за ударной волной *TF* (при малой кривизне *TF*, что будет показано ниже) в области *3* течение остается безвихревым, т. е. потенциальным. Для такого течения, когда заданы условия на характеристике *FE* и контактной границе *TE*, известно приближенное аналитическое решение [18], основанное на аппроксимации Христиановича [19] для функции Чаплыгина.

В области *3* введем характеристические переменные ξ и η:

$$\xi = (\tau + \vartheta)/2\ , \quad \eta = (\tau - \vartheta)/2\ ,$$

где τ = 1 – $h$arctg(z/h) + arctg$z$, $z = \sqrt{(\lambda^2 - 1)/(1 - \lambda^2/h^2)}$, $h = \sqrt{(\gamma+1)/(\gamma-1)}$, $\lambda = \sqrt{0{,}5(\gamma+1)}\,\mathrm{M}\Big/\sqrt{1+0{,}5(\gamma-1)\mathrm{M}^2}$, ϑ — угол наклона вектора скорости к оси x.

Рассмотрим характеристический треугольник TKE (рис. 2), образованный характеристиками TK ($\xi = \xi_1 = \left\{\tau\left(\widetilde{\mathrm{M}}_3(0)\right) + \varepsilon\right\}/2 = \mathrm{const}$) и KFE ($\eta = \eta_1 = \left\{\tau\left(\widetilde{\mathrm{M}}_3(x_*)\right) - \varepsilon\right\}/2 = \mathrm{const}$). На линии TE из уравнений (9) – (11) определяются функции $\eta = \omega_1(\xi) = \left\{\tau\left(\widetilde{\mathrm{M}}_3(x)\right) - \varepsilon\right\}/2$ и $\xi = \omega_2(\eta) = \left\{\tau\left(\widetilde{\mathrm{M}}_3(x)\right) + \varepsilon\right\}/2$; тогда уравнение контактного разрыва TE можно получить в виде

$$x = x_1(\xi) = x_2(\eta)\,,\ y = y_1(\xi) = y_2(\eta)\,, \tag{13}$$

где $y_1(\xi) = Y_m/L - x_1(\xi)\,\mathrm{tg}\varepsilon$, $y_2(\eta) = Y_m/L - x_2(\eta)\,\mathrm{tg}\varepsilon$.

Решение задачи Коши для области $TKEF$, ограниченной характеристиками TK, KFE и линией тока TE (контактным разрывом), дается формулами [18]

$$x = \frac{\varphi(\xi) + \psi(\eta)}{\mathrm{tg}2\xi + \mathrm{tg}2\eta}\,,\ y = \frac{-\,\mathrm{tg}2\eta\varphi(\xi) + \mathrm{tg}2\xi\psi(\eta)}{\mathrm{tg}2\xi + \mathrm{tg}2\eta}\,, \tag{14}$$

где

$$\varphi(\xi) = \frac{\left[y_1(\xi) - \mathrm{tg}2\xi\cdot x_1(\xi)\right]\left[\mathrm{tg}2\xi + \mathrm{tg}2\omega_1(\xi)\right]}{-\,\mathrm{tg}2\omega_1(\xi) - \mathrm{tg}2\xi}\,,$$

$$\psi(\eta) = \frac{\left[y_2(\eta) + \mathrm{tg}2\eta\cdot x_2(\eta)\right]\left[\mathrm{tg}2\omega_2(\eta) + \mathrm{tg}2\eta\right]}{\mathrm{tg}2\omega_2(\eta) + \mathrm{tg}2\eta}\,.$$

Ударная волна TF (см. рис. 2) строится из условия совместимости решений в областях *2* и *3*. По известному полю скорости газа в области *3* и начальному углу наклона ударной волны в точке T θ_T определяется положение криволинейной ударной волны TF. Построение кривой ударной волны TF осуществляется методом характеристик. При этом проводятся итерации по высоте ножки Маха Y_m/L до тех пор, пока характеристика FE не попадет в звуковую точку E. За кривой ударной волной TF течение вихревое. Определим среднюю кривизну $\overline{K}_{TF}$ ударной волны TF как $\overline{K}_{TF} = L_{TF}/\left(2\pi\overline{R}_{TF}\right)$. Здесь L_{TF} — длина кривой TF, $\overline{R}_{TF}$ — средний (по длине кривой TF) радиус окружностей, имеющих в каждой точке TF касание с кривой TF не ниже

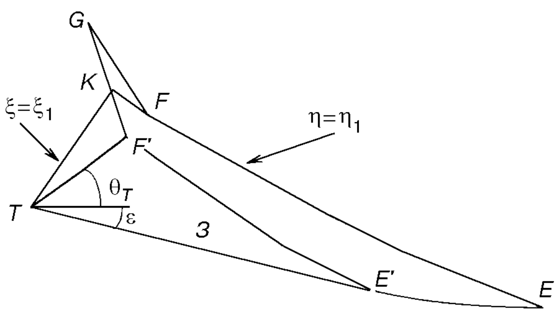

Рис. 2. Характеристический треугольник в области *3*.

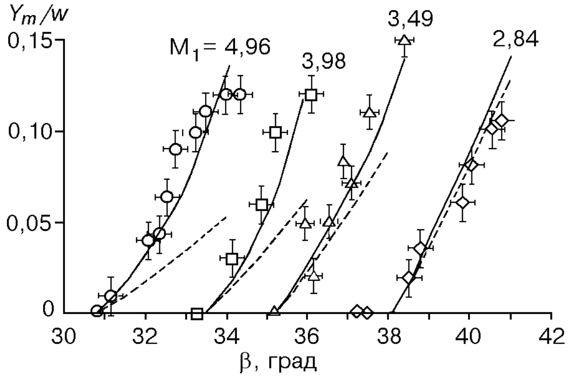

Рис. 3. Зависимость высоты ножки Маха от угла β ($w = L/\cos\theta$).

второго порядка (для прямой $\overline{K} = 0$, для окружности $\overline{K} = 1$).

При малой кривизне скачка и слабой ударной волне, согласно [20], завихренность течения за скачком является величиной третьего порядка малости по сравнению с возмущениями скорости газа. Поэтому с достаточной степенью точности течение в области *3* можно считать потенциальным.

Система нелинейных уравнений (1) − (14) дает решение задачи об определении параметров течения с маховской конфигурацией ударных волн, показанной на рис. 1.

Результаты прямого численного моделирования течения [3] в рассматриваемой геометрии (см. рис.1) показали, что длина L_*/L больше рассчитанной по модели [8] и близка к рассчитанной по предложенной здесь модели.

Сравнение с экспериментальными данными [1] (точки на рис. 3) расчетов по модели [8] (пунктирная линия) и расчетов по данной модели (сплошная линия) показало, что предложенная модель хорошо описывает эксперименты. Эксперименты и расчеты проводились при $\gamma = 1{,}4$ и $Y_1/L = 0{,}37$.

Проведено сравнение с большой серией экспериментальных данных [11]. На рис. 4 показана зависимость безразмерной высоты "ножки" Маха Y_m/w от угла β для различных значений Y_t/w. Эксперименты [11] и расчеты проводились для воздуха с $\gamma = 1{,}4$.

Таким образом, предложенная модель дает описание полной структуры нерегулярного (маховского) отражения ударных волн в плоском сужающемся канале. В модели учтены такие особенности течения, как кривизна "ножки" Маха (ударная волна TO' на рис. 1) и отраженной ударной волны (ударная волна TF на рис. 1); изменение давления вдоль контактного разрыва (линия TE' на

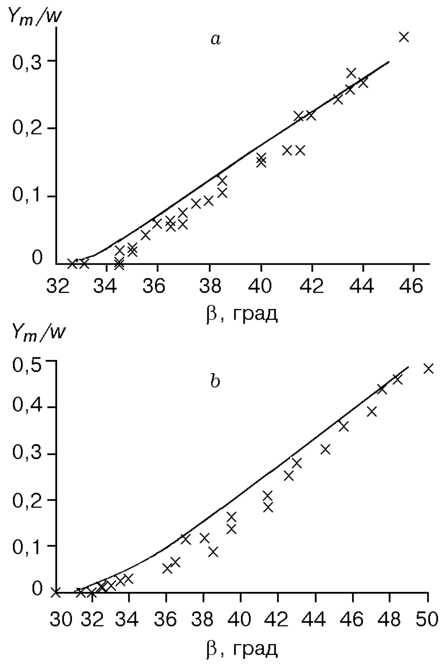

Рис. 4. Сравнение данных, полученных по предлагаемой модели, с экспериментом [11].
a: $M_1 = 4{,}03$, $Y_t/w = 0{,}56$; *b*: $M_1 = 5{,}03$, $Y_t/w = 0{,}55$.
Линия — расчет, точки — эксперимент.

рис. 1) и его влияние на течение газа над контактным разрывом (область *3* на рис. 1); наконец влияние условий вниз по потоку на характеристики нерегулярного отражения. Сравнение с экспериментальными данными показывает, что предложенная модель адекватно описывает характеристики течения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Hornung H.G., Robinson M.L.** Transition from regular to Mach reflection of shock waves. Part 2. The steady-flow criterion // J. Fluid Mech. — 1982. — Vol. 123. — P. 155 – 164.
2. **Chpoun A., Passerel D., Li H., Ben-Dor G.** Reconsideration of oblique shock wave reflections in steady flows. Pt 1. Experimental investigation // Ibid. — 1995. — Vol. 301. — P. 19 – 35.
3. **Ivanov M.S., Gimelshein S.F., Beylich A.E.** Hysteresis effect in stationary reflection of shock waves // Phys. Fluids. — 1995. — Vol. 7, No. 4. — P. 685 – 687.
4. **Ivanov M., Zeitoun D., Vuillon J., Gimelshein S., Markelov G.** Investigation of the hysteresis phenomena in steady shock reflection using kinetic and continuum methods // Shock Waves. — 1996. — Vol. 5. — P. 341 – 346.
5. **Chpoun A., Ben-Dor G.** Numerical confirmation of the hysteresis phenomenon in the regular to the Mach reflection transition in steady flows // Ibid. — 1995. — Vol. 5. — P. 199 – 203.
6. **Hornung H.G.** On the stability of steady-flow regular and Mach reflection // Ibid. — 1997. — Vol. 7, No. 2. — P. 123 – 125.
7. **Azevedo D.J., Liu C.S.** Engineering approach to the prediction of shock patterns in bounded high-speed flows // AIAA J. — 1993. — Vol. 31, No. 1. — P. 83 – 90.
8. **Azevedo D.J., Liu C.S., Rae W.J.** Prediction of inviscid stagnation pressure losses in supersonic inlet flows // AIAA J. 1990. — Vol. 28, No. 10. — P. 1834 – 1836.
9. **Li H., Schotz M.., Ben-Dor G.** Wave configuration of Mach reflection in steady flows: analytical solution and dependence on downstream influences // Proc. 20th Intern. Symp. on Shock Waves. — Vol. 1. — Pasadena, California, USA, July 1995. — Vol. I. — P. 393 – 398.
10. **Medvedev A.E., Fomin V.M.** Numerical-analytical solution for Mach configuration of steady shock waves in a 2D slender // Intern. Conf. on the Methods of Aerophysical Research: Proc. Pt 3. — Novosibirsk, 1996. — P. 216 – 220.
11. **Иванов М.С., Клеменков Г.П., Кудрявцев А.Н. и др.** Экспериментальное исследование перехода к маховскому отражению стационарных ударных волн // Докл. РАН. — 1997. — Т.357, № 5. — С. 623 – 627.
12. **Овсянников Л.В.** Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.
13. **Курант Р., Фридрихс К.** Сверхзвуковые течения и ударные волны. — М.: Иностр. лит., 1950.
14. **Leclerc E., Lengrand J.C., Chpoun A.** Experimental investigation of the influence of downsteram flow conditions on Mach stem height // Proc. 21st Intern. Symp. on Shock Waves. — Great Keppel Island, Australia, 1997. — P. 1860.
15. **Ben-Dor G., Elperin T., Li H., Vasiliev E., Chpoun A., Zeitoun D.** Dependence of steady Mach reflections on the reflecting-wedge trailing-edge angle // AIAA J. — 1997. — Vol. 35, No. 11. —P. 1780 – 1782.
16. **Лойцянский Л.Г.** Механика жидкости и газа. — М.: Наука, 1978.
17. **Кочин Н.Е., Кибель А.И., Розе Н.В.** Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. — М.: Физматгиз, 1963.
18. **Гриб А.А., Рябинин А.Г.** К вопросу о приближенном интегрировании уравнений плоского установившегося сверхзвукового движения газа // Докл. АН СССР. — 1955. — Т. 100, № 3. — С. 425 – 428.
19. **Христианович С.А.** Механика сплошной среды. — М.: Наука, 1981.
20. **Бай Ши-и.** Введение в теорию течения сжимаемой жидкости. — М.: Иностр. лит., 1962.

Статья поступила в редакцию 2 октября 1996 г.,
в доработанном виде — 29 мая 1998 г.