Теплофизика и аэромеханика, том 6, № 3, 1999 г.

УДК 532.516.636

УСТОЙЧИВОСТЬ ТЕЧЕНИЯ ПЛЕНКИ ЖИДКОСТИ С ПЕРЕМЕННОЙ ВЯЗКОСТЬЮ НА ВРАЩАЮЩЕМСЯ ДИСКЕ. 1. ГИДРОДИНАМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ МАЛЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

М.И. ШИЛЯЕВ, А.В. ТОЛСТЫХ

Томский государственный архитектурно-строительный университет

В работе показано, что в качестве приближения для распределения температуры по поперечной координате в пленке жидкости с переменной вязкостью, формирующейся и движущейся на поверхности вращающегося диска, допустимо использовать линейный профиль. Сформулирована постановка задачи об устойчивости пленочного течения жидкости с переменной вязкостью на вращающемся диске. Проведена оценка влияния малых возмущений температуры в пленке на гидродинамические параметры течения.

Развитие ряда новых перспективных технологий, в основе которых лежат пленочные течения расплавов на вращающихся поверхностях в поле центробежных сил, вызывает необходимость изучения гидродинамики, теплообмена и, в том числе, закономерностей неустойчивости и распада пленок жидкости с переменной вязкостью, зависящей от температуры. В [1] описана новая технология производства минерального волокна, экономичная по энергозатратам и высокоэффективная по эксплуатационной надежности. В основе данного способа производства лежит движение и распад на струйки и капли пленки расплава на вращающемся горизонтальном диске.

Очевидно, что процессы распада пленки жидкости с переменной вязкостью связаны с устойчивостью течения к возмущениям скоростей, давления и температуры. В настоящей работе на основе зависимостей для характеристик ламинарного течения пленки по вращающемуся диску, полученных в [2, 3], проводится анализ задачи об устойчивости пленочного течения жидкости с переменной вязкостью на вращающемся диске.

ПРОФИЛЬ ТЕМПЕРАТУРЫ В ПЛЕНКЕ И РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СКОРОСТЕЙ В НЕВОЗМУЩЕННОМ ТЕЧЕНИИ ПЛЕНКИ РАСПЛАВА

В работах [4, 5], связанных с исследованием неизотермических стекающих пленок с быстроменяющейся вязкостью, в качестве хорошего приближения для распределения температуры по поперечной координате используется линейная зависимость. В [5] показано, что для тонких пленок отклонение профиля температуры от линейного весьма незначительно даже при большом изменении вязкости по поперечной координате. Поэтому на начальном участке движения пленки расплава на вращающемся диске, когда температура в пленке мало отличается от своего среднемассового значения $\bar{\theta}$, можно использовать, не допуская большой погрешности, линейный профиль для распределения температуры по координате z.

В качестве линейного распределения температуры возьмем первое приближение из асимптотического решения для профиля температуры при z, близких к 0, считая, что на начальном участке движения температура на границе раздела жидкость — диск мало отличается от $\bar{\theta}$ (аналогичное допущение обосновано в [2] при получении зависимости для среднемассовой температуры):

$$\theta = k_1 z + \bar{\theta}\ , \tag{1}$$

где $\theta = \gamma\left(T - T_0\right)/T_0^2$ — безразмерная температура (T, T_0 — соответственно текущая и начальная температура расплава, γ — коэффициент эмпирического закона зависимости вязкости расплава от температуры [6]: $\nu = C_\nu \exp\left(\dfrac{\gamma}{T}\right)$, C_ν — эмпирическая константа, имеющая размерность вязкости); k_1 — константа, зависящая от r; $z = \bar{z}/\bar{h}_0$ — безразмерная вертикальная координата; $\bar{\theta}$ = $= E\left(\exp\left[-\dfrac{\mathrm{Nu}_1 + \mathrm{Nu}_2}{2\varepsilon^2 \mathrm{Pe}}\left(r^2 - 1\right)\right] - 1\right)$; $r = \bar{r}/\bar{r}_0$ — безразмерный радиус ($\bar{r}_0$ — начальный радиус, на котором начинается движение пленки); $\varepsilon = \bar{h}_0/\bar{r}_0$ — малый параметр ($\bar{h}_0$ — начальная толщина пленки при $\bar{r} = \bar{r}_0$, Pe = $= c\rho\, \bar{v}_{r0}\ \bar{r}_0 / \lambda$ — число Пекле (c, ρ, λ — теплоемкость, плотность и теплопроводность жидкости, $\bar{v}_{r0}$ — среднерасходная скорость подачи расплава на диск [3]); Nu_1 = $\mathrm{Nu}_{\text{пов}}$ + S — безразмерный параметр Нуссельта, определяющий интенсивность теплообмена на границе раздела расплав — воздух; $\mathrm{Nu}_{\text{пов}}$ = $= n\,\bar{h}_0/\lambda$, где $n =\ 0{,}33_{\text{воз}}\sqrt{\omega/\nu_{\text{воз}}}$ — эмпирический коэффициент теплоотдачи с поверхности вращающегося диска в воздух [7]; $S = \sigma_b T_0^3\ \bar{h}/\lambda$ — безразмерный параметр, определяющий интенсивность теплового излучения с поверхности расплава; σ_b — постоянная Стефана — Больцмана; Nu_2 = $= \mathrm{Nu}_{\text{пов}}/(nl_{\text{д}}/\lambda_{\text{д}} + 1)$ — безразмерный параметр Нуссельта, определяющий интенсивность теплообмена на границе пленка расплава — диск или гарнисажный слой — диск ($l_{\text{д}}$, $\lambda_{\text{д}}$ — толщина диска и коэффициент теплопроводности материала диска); $\theta_{\text{воз}} = \gamma\left(T_{\text{воз}} - T_0\right)/T_0^2$ — обезразмеренная температура воздуха; $\theta_* = \gamma\left(T_* - T_0\right)/T_0^2$ — обезразмеренная температура отвердевания расплава: $E = -F - \dfrac{\mathrm{Nu}_2}{\mathrm{Nu}_1}\theta_{\text{воз}}$ — комплекс безразмерных параметров (F = $= (\mathrm{Nu}_{\text{пов}}\theta_{\text{воз}} - S/\beta)/\mathrm{Nu}_1$, $\beta = T_0/\gamma$ — малый тепловой параметр). Константу k_1 в (1) найдем из условия теплообмена на границе раздела пленка — диск [2]:

$$\frac{\partial\theta}{\partial z} = \mathrm{Nu}_2\left(\theta - \theta_{\text{воз}}\right) \quad \text{при } z = 0. \tag{2}$$

Из (2) следует, что

$$k_1 = \mathrm{Nu}_2\left(\bar{\theta} - \theta_{\text{воз}}\right). \tag{3}$$

Вследствие того, что $\mathrm{Nu}_2 \sim \mathrm{Nu}_{\text{пов}}$ [2] и $\mathrm{Nu}_{\text{пов}}$ = $n\bar{h}_0/\lambda_p \sim \varepsilon$ (в силу малости величины h_0), имеем $\mathrm{Nu}_2 \sim \varepsilon$. Далее, учитывая, что безразмерная температура воздуха $\theta_{\text{воз}} \approx 30$, получим

$$k_1^2 = \left(\mathrm{Nu}_2\left(\bar{\theta} - \theta_{\text{воз}}\right)\right)^2 \sim \varepsilon\ .$$

Итак, в качестве распределения температуры в пленке на начальном участке будем использовать линейную зависимость (1), незначительно отклоняющуюся от величины θ с увеличением координаты z из-за малости коэффициента k_1.

Зная распределение температуры, получим простые зависимости для распределения вертикальной и радиальной компонент скорости в невозмущенном течении пленки расплава на начальном участке. Зависимость $\partial v_r / \partial z$ получим, интегрируя уравнение движения пленки, приведенное в [2], считая распределение температуры по координате z линейным, пренебрегая влиянием малого коэффициента β на изменение вязкости и радиальным градиентом давления dp/dr, что допустимо на начальном участке движения пленки, где $T \sim T_0$ и величина $\beta\theta$ пренебрежимо мала по сравнению с 1:

$$\frac{\partial v_r}{\partial z} = \frac{\varepsilon^2\,\mathrm{Re}}{\mathrm{R}_0}\, r\exp\left(k_1 z\right)\left(h - z\right)\exp\left(\bar{\theta}\right),$$

или в размерных переменных

$$\frac{\partial v_r}{\partial z} = \frac{\bar{v}_{r0}}{\bar{h}_0^2}\frac{\varepsilon^2\,\mathrm{Re}}{\mathrm{Ro}}\frac{\bar{r}}{\bar{r}_0}\exp\left(k_1\frac{\bar{z}}{\bar{h}_0}\right)\left(\bar{h} - \bar{z}\right)\exp\left(\bar{\theta}\right). \tag{4}$$

Пренебрежение радиальным градиентом давления и инерционными членами в уравнении движения для радиальной составляющей скорости [2], из которого вытекает зависимость (4), известно в литературе как приближение “ползущего течения” (данное понятие используется в работе [7] и в других цитируемых в ней источниках), допустимое для описания тонкопленочных течений на вращающихся поверхностях при больших угловых скоростях вращения и малой кривизне поверхности пленки. В настоящей работе рассматривается начальный участок течения пленки жидкости, где допустимо описывать движение пленки как “ползущее течение”, пренебрегая в уравнении движения радиальным градиентом давления.

Интегрируя (4) по z с учетом условий на границе жидкости — диск

$$\text{при } z = 0 \quad v_r = v_z = 0, \tag{5}$$

получим

$$\bar{v}_r = \bar{v}_{r0}\,\frac{\varepsilon^2\,\mathrm{Re}}{\mathrm{Ro}}\frac{\bar{r}}{\bar{r}_0}\exp\left(\bar{\theta}\right)\left(\exp\left(k_1\frac{\bar{z}}{\bar{h}_0}\right)\left(\frac{\bar{h}}{\bar{h}_0\,k_1} - \frac{\bar{z}}{\bar{h}\,k_1} + \frac{1}{k_1^2}\right) - \frac{\bar{h}}{\bar{h}\,k_1} - \frac{1}{k_1^2}\right). \tag{6}$$

Если использовать то обстоятельство, что $1/k_1^2 \sim 1/\varepsilon$, и пренебречь слагаемыми порядка 1 по сравнению с $1/\varepsilon$, то соотношение (6) существенно упрощается:

$$\bar{v}_r = \bar{v}_{r0}\,\frac{1}{k_1^2}\frac{\varepsilon^2\,\mathrm{Re}}{\mathrm{Ro}}\frac{\bar{r}}{\bar{r}_0}\exp\left(\bar{\theta}\right)\left(\exp\left(k_1\frac{\bar{z}}{\bar{h}_0}\right) - 1\right). \tag{7}$$

Из уравнения неразрывности

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{\mathrm{Ro}}\frac{\partial v_z}{\partial z} + \frac{v_r}{r} = 0\,,$$

используя граничное условие (5) и (6), найдем вертикальную компоненту скорости $\bar{v}_z$:

$$\bar{v}_z = -\omega \bar{h}_0 \varepsilon^2 \operatorname{Re} \frac{\bar{r}}{\bar{r}_0} \exp\left(\bar{\theta}\right)\left(-\frac{\bar{r}}{\bar{r}_0} E \frac{\left(\mathrm{Nu}_1 + \mathrm{Nu}_2\right)}{\varepsilon^2 \mathrm{Pe}} \times \right.$$

$$\times \exp\left(-\frac{\left(\mathrm{Nu}_1 + \mathrm{Nu}_2\right)}{2\varepsilon^2 \mathrm{Pe}} \left(\left(\frac{\bar{r}}{\bar{r}_0}\right)^2 - 1 \right) \right) + 1 \Bigg) \left(\exp\left(k_1 \frac{\bar{z}}{\bar{h}_0} \right) \left(\frac{\bar{h}}{\bar{h}_0 k_1^2} - \frac{\bar{z}}{\bar{h}_0 k_1^2} + \frac{2}{k_1^3} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{\bar{h}\bar{z}}{\bar{h}_0^2 k_1} - \frac{\bar{z}}{\bar{h}_0 k_1^2} - \frac{\bar{h}}{\bar{h}_0 k_1^2} - \frac{2}{k_1^3} \right). \qquad (8)$$

Пренебрегая в (8) слагаемыми порядка 1 по сравнению с величинами порядка $1/\varepsilon$, получим

$$\bar{v}_z = -2\omega \bar{h}_0 \varepsilon^2 \operatorname{Re} \frac{1}{k_1^3} \exp\left(\bar{\theta}\right) \left(-\left(\frac{\bar{r}}{\bar{r}_0}\right)^2 E \frac{\left(\mathrm{Nu}_1 + \mathrm{Nu}_2\right)}{\varepsilon^2 \mathrm{Pe}} \right) \times$$

$$\times \exp\left(-\frac{\left(\mathrm{Nu}_1 + \mathrm{Nu}_2\right)}{2\varepsilon^2 \mathrm{Pe}} \left(\left(\frac{\bar{r}}{\bar{r}_0}\right)^2 - 1 \right) \right) \left(\exp\left(k_1 \frac{\bar{z}}{\bar{h}_0} \right) - 1 \right). \qquad (9)$$

После дифференцирования зависимости (6), пренебрегая величинами порядка 1 по сравнению с $1/\varepsilon$, найдем выражение для $\partial \bar{v}_r / \partial \bar{r}$:

$$\frac{\partial \bar{v}_r}{\partial \bar{r}} = -\bar{v}_{r0} \frac{\varepsilon^2 \operatorname{Re}}{\mathrm{Ro}} \frac{1}{k_1^2} \exp\left(\bar{\theta}\right) \frac{\bar{r}^2}{\bar{r}_0^3} E \frac{\left(\mathrm{Nu}_1 + \mathrm{Nu}_2\right)}{\varepsilon^2 \mathrm{Pe}} \times$$

$$\times \exp\left(\frac{\left(\mathrm{Nu}_1 + \mathrm{Nu}_2\right)}{\varepsilon^2 \mathrm{Pe}} \left(\left(\frac{\bar{r}}{\bar{r}_0}\right)^2 - 1 \right) \right) \left(\exp\left(k_1 \frac{\bar{z}}{\bar{h}_0} \right) - 1 \right). \qquad (10)$$

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛЕНОЧНОГО ТЕЧЕНИЯ

Запишем безразмерные уравнения пленки на вращающемся диске и соответствующие им граничные условия аналогично уравнениям работы [2]. При этом учтем в уравнении движения слагаемые, связанные с действием инерционных сил, и нестационарные члены, пренебрегая величиной $\beta\theta$ по сравнению с 1 в экспоненциальном множителе, отражающем влияние переменной вязкости, что допустимо на начальном участке пленочного течения:

$$U_t + UU_r + VU_z - \frac{r}{\mathrm{Ro}'} = -\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\exp\left(\overline{\theta_*}\right)}{\alpha \operatorname{Re}_{\text{пл}}} \left(\left(\exp(\theta) U_z\right)_z + \alpha^2 \left(\exp(-\theta) U_r\right)_r \right), \qquad (11)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = G, \qquad (12)$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rU)+\frac{\partial V}{\partial z}=0\,, \tag{13}$$

при $z = 0$

$$U = V = 0, \tag{14}$$

$$P = P(r, h, t) + G, \tag{15}$$

при $z = h(r, t)$

$$U_z = -\alpha^2(V_r + 4h_r\, V_z), \tag{16}$$

$$P-\frac{2\alpha^2 \exp\left(\overline{\theta_*}\right)}{\left(\mathrm{Re}_{\text{пл}}\,\alpha\right)}\exp(-\theta)V_z=-\alpha^2 \mathrm{W}'\, h_{rr}\,, \tag{17}$$

$$h_t + Uh_r = V. \tag{18}$$

Постановка задачи, аналогичная соотношениям (11) – (18), сформулирована в [8] для исследования устойчивости стекающих пленок жидкости. Безразмерное число α представляет собой малый параметр, являющийся отношением характерной толщины пленки к характерному линейному размеру. При исследовании устойчивости пленочного течения на вращающемся диске в качестве характерных размеров можно использовать радиус $\overline{r}_*$, на котором исследуется устойчивость, и соответствующую ему толщину пленки $\overline{h}_*\left(\overline{r}_*\right)$. В случае распространения длинных волн (волновые числа много меньше 1) малой амплитуды α, как и в [7], можно считать малым волновым числом. В соотношениях (11) – (18): $\overline{h}_*\, t=\alpha\overline{U}_*\overline{t}$, $\overline{U}_*\, V=\alpha\overline{V}$, $\overline{h}_*\, z=\overline{z}$, $\overline{h}_*\, r=\alpha\,\overline{r}$, $\overline{U}_*U=\overline{U}$, $\overline{h}_*\, h=\overline{h}$, $P\rho\overline{U}_*^2=\overline{P}$, $(\overline{t},\, t)$, $(\overline{r},\, r)$, $(\overline{z},\, z)$, $(\overline{U},\, U)$, $(\overline{V},\, V)$, $(\overline{h},\, h)$, $(\overline{P},\, P)$ — размерные и безразмерные переменные: время, радиус, вертикальная координата, радиальная и вертикальная компоненты скорости, толщина пленки, давление; $\overline{U}_*$ — радиальная скорость на поверхности пленки при $\overline{z}=\overline{h}_*$ и $\overline{r}=\overline{r}_*$; $\mathrm{Re}_{\text{пл}} = \dfrac{\overline{U}_*\ \overline{h}_*}{\nu_0 \exp\left(\overline{\theta_*}\right)}$ — пленочное число Рейнольдса ($\overline{\theta}_*$ — значение среднемассовой температуры при $\overline{r}=\overline{r}_*$); $\mathrm{Ro}'=\dfrac{\overline{U}_*^2}{\omega^2\,\overline{h}_*^2}$ — число Россби; $\mathrm{W}'=\dfrac{\sigma}{\rho\overline{U}_*^2\,\overline{h}_*}$ — обратное число Вебера; $G=\dfrac{g\,\overline{h}_*}{\overline{U}_*^2}$ (g = 9,81 м/с^2)).

Перейдем к тепловой части в постановке задачи о течении пленки жидкости с переменной вязкостью на вращающемся диске. Запишем уравнение теплового баланса для пленки, учитывая нестационарные и конвективные члены, и необходимые граничные условия:

$$\alpha\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}+U\frac{\partial\theta}{\partial r}+V\frac{\partial\theta}{\partial z}\right)=\frac{1}{\mathrm{Pe}'}\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2}\,, \tag{19}$$

при $\quad r = 1 \quad \theta = 0, \quad (20)$

при $\quad z=0 \quad \dfrac{\partial\theta}{\partial z}=\mathrm{Nu}_2'\left(\theta-\theta_{\text{воз}}\right), \quad (21)$

при $$z = h(r,\, t) \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = -\mathrm{Nu}_1'\left(\theta - F'\right), \tag{22}$$

где $\mathrm{Pe}' = c_p \rho \overline{U}_* \overline{h}_* / \lambda_p$ — безразмерное число Пекле; $\mathrm{Nu}_2' = \mathrm{Nu}'_{\text{пов}} / \left(n l_{\text{д}} / \lambda_{\text{д}} + 1\right)$ — безразмерный параметр Нуссельта, определяющий интенсивность теплообмена на границе пленка жидкости — диск $\left(\mathrm{Nu}'_{\text{пов}} = n \overline{h_*} / \lambda_p\right)$, $\mathrm{Nu}_1' = \mathrm{Nu}'_{\text{пов}} + S'$ — безразмерный параметр Нуссельта, определяющий интенсивность теплообмена на границе раздела жидкость — воздух ($S' = \sigma_b T_0^3 \overline{h_*} / \lambda_p$ — безразмерный параметр, определяющий интенсивность теплового излучения с поверхности пленки); $F' = \left(\mathrm{Nu}'_{\text{пов}}\ \theta_{\text{воз}} - S'/\beta\right) / \mathrm{Nu}_1'$ — комплекс безразмерных параметров.

Отметим, что для решения задачи о течении пленки жидкости с переменной вязкостью на вращающемся диске в полной нестационарной постановке (11) – (13), (19) помимо граничных условий (14) – (18) и (20) – (22) необходимы сведения о начальных распределениях скорости и температуры в пленке.

Далее представим компоненты скорости и давления в виде суммы возмущенной и невозмущенной частей:

$$\begin{aligned} U &= U(r,\, z) + \alpha u(r,\, z,\, t), \\ V &= V(r,\, z) + \alpha v(r,\, z,\, t), \\ P &= P(r,\, z) + \alpha p(r,\, z,\, t), \\ \theta &= \theta(r,\, z) + \alpha \theta_{\text{в}}(r,\, z,\, t), \end{aligned} \tag{23}$$

где $U(r, z)$, $V(r, z)$, $P(r)$, $\theta(r, z)$ — соответствуют невозмущенному стационарному течению пленки, а $u(r, z, t)$, $v(r, z, t)$, $p(r, t)$, $\theta_{\text{в}}(r, z, t)$ — малые возмущения. Подставляя (23) в уравнения (11) – (13), (19) и граничные условия (14) – (18), (20) – (22), пренебрегая членами порядка α^2 и используя зависимости (7), (9), (10) для невозмущенного решения, получим соотношения для определения возмущений скорости, давления и температуры:

$$\begin{aligned} & u_t + u \frac{E_\varepsilon\left[\exp(mz) - 1\right]}{\left[\exp(m) - 1\right]} + u_r \frac{\left[\exp(mz) - 1\right]}{\left[\exp(m) - 1\right]} - \\ & -2u_z \frac{E_\varepsilon\left[\exp(mz) - 1\right]}{\left[\exp(m) - 1\right]} + v \frac{m^2 \exp(mz)(1 - z)}{\left[\exp(m) - 1\right]} = \\ & = -p_r + \frac{1}{\alpha \mathrm{Re}_{\text{пл}}}\left(\exp(-mz)\exp(-\alpha\theta_{\text{в}}) u_z\right)_z, \end{aligned} \tag{24}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = 0, \tag{25}$$

$$u_r + \frac{u}{r} + v_z = 0, \tag{26}$$

при $z = 0$

$$p = p(r,\, h,\, t), \tag{27}$$

$$u = v = 0, \tag{28}$$

при $z = h(r, t)$

$$u_z = -\frac{m^2 \exp(mh)(1-h)}{(\exp(m)-1)}, \tag{29}$$

$$p = -\alpha^2 \mathrm{W}' h_{rr} + \frac{2\alpha^2}{(\mathrm{Re}_{\text{пл}}\, \alpha)} \exp(-mz) \exp(-\alpha\theta_{\text{в}}) v_z, \tag{30}$$

$$h_t + uh_r = v, \tag{31}$$

$$\alpha\left(\frac{\partial\theta_{\text{в}}}{\partial t} + \left(\frac{\partial\theta_{\text{в}}}{\partial r} + E_\varepsilon \frac{\partial\theta_{\text{в}}}{\partial z}\right)\frac{[\exp(mz)-1]}{[\exp(m)-1]} + uE_\varepsilon + mv\right) = \frac{1}{\mathrm{Pe}'}\frac{\partial^2\theta_{\text{в}}}{\partial z^2}, \tag{32}$$

$$\text{при } r = 1 \quad \theta_{\text{в}} = 0, \tag{33}$$

$$\text{при } z = 0 \quad \frac{\partial\theta_{\text{в}}}{\partial z} = \mathrm{Nu}_2'\, \theta_{\text{в}}, \tag{34}$$

$$\text{при } z = h(r, t) \quad \frac{\partial\theta_{\text{в}}}{\partial z} = -\mathrm{Nu}_1'\, \theta_{\text{в}}, \tag{35}$$

где

$$m = k_1 \frac{\overline{h_*}}{\overline{\overline{h_0}}},$$

$$E_\varepsilon = -\frac{\overline{h_*}}{\overline{\overline{r_0}}} E \frac{\mathrm{Nu}_1 + \mathrm{Nu}_2}{\varepsilon^2 \mathrm{Pe}} \exp\left(-\frac{(\mathrm{Nu}_1 + \mathrm{Nu}_2)}{2\varepsilon^2 \mathrm{Pe}}\left(\left(\frac{\overline{r}}{\overline{\overline{r_0}}}\right)^2 - 1\right)\right).$$

В соотношениях (24) – (35) отсутствуют слагаемые порядка α^2, так как для исследования устойчивости длинноволновых возмущений в тонких пленках [8, 9] достаточно получить асимптотические разложения до членов порядка α:

$$\begin{gathered} u = u_0 + \alpha u_1 + O(\alpha^2), \\ v = v_0 + \alpha v_1 + O(\alpha^2), \\ \frac{p}{\alpha \mathrm{Re}_{\text{пл}}} = p_0 + \alpha p_1 + O(\alpha^2), \end{gathered} \tag{36}$$

$$\theta_{\text{в}} = \theta_{\text{в}0} + \alpha\theta_{\text{в}1} + O(\alpha^2). \tag{37}$$

Соотношения (24) – (35), представляющие собой постановку задачи об устойчивости пленочного течения жидкости с переменной вязкостью на вращающемся диске, содержат как возмущения гидродинамических параметров, так и возмущения температуры. Для того, чтобы в дальнейшем можно было приступить к выводу уравнения возмущенной поверхности пленки, оценим влияние возмущений температуры на гидродинамическую устойчивость пленочного течения. Найдем первое и второе приближения в асимптотическом разложении возмущений температуры по малому параметру α. Подставляя (37) в (32) – (35) и пренебрегая членами порядка $O(\alpha)$, получим:

$$\frac{\partial^2 \theta_{в0}}{\partial z^2} = 0\,, \tag{38}$$

$$\text{при } r = 1 \quad \theta_{в0} = 0, \tag{39}$$

$$\text{при } z = 0 \quad \frac{\partial \theta_{в0}}{\partial z} = 0\,, \tag{40}$$

$$\text{при } z = h(r,\,t) \quad \frac{\partial \theta_{в0}}{\partial z} = -\mathrm{Nu}_1'\,\theta_{в0}\,. \tag{41}$$

Из соотношений (38) – (41) следует, что

$$\theta_{в0} = 0. \tag{42}$$

Используя (37) в (32) – (35), учитывая (42) и оставляя члены порядка α, получим для первого приближения возмущений температуры:

$$u_0 E_\varepsilon + m v_0 = \frac{1}{\mathrm{Pe}'}\frac{\partial \theta_{в1}}{\partial z^2}\,, \tag{43}$$

$$\text{при } r = 1 \quad \theta_{в1} = 0, \tag{44}$$

$$\text{при } z = 0 \quad \frac{\partial \theta_{в1}}{\partial \mathrm{z}} = 0\,, \tag{45}$$

$$\text{при } z = h(r,\,t) \quad \frac{\partial \theta_{в1}}{\partial z} = -\mathrm{Nu}_1'\,\theta_{в1}\,. \tag{46}$$

Исходя из соотношений (43) – (46), можно оценить порядок величины $\theta_{в1}$:

$$\theta_{в1} \sim \mathrm{Pe}' E_\varepsilon u_0,\ \mathrm{Pe}' m v_0\,. \tag{47}$$

Теперь, с учетом оценок величин нулевого и первого приближения возмущений температуры (42), (47), определим порядок множителя $\exp(-\alpha\theta_в)$, входящего в уравнение движения (24):

$$\exp(-\alpha\theta_в) = \exp\left(-\alpha^2\theta_{в1} + O\left(\alpha^3\right)\right) = 1 + O\left(\alpha^2\right). \tag{48}$$

Соотношение (48) означает, что при построении асимптотических разложений возмущений скорости и давления до слагаемых порядка α можно пренебречь влиянием отклонения температуры от невозмущенного профиля (в реальных условиях тонкопленочного течения на вращающемся диске данное приближение соответствует пренебрежению величиной порядка 10^{-4} по сравнению с 1).

Таким образом, в работе сформулирована постановка задачи об устойчивости течения пленки жидкости с переменной вязкостью на вращающемся диске, проведена оценка влияния возмущений температуры на гидродинамические характеристики течения пленки, что дает возможность, используя уравнения для определения малых возмущений гидродинамических параметров, провести исследование устойчивости пленочных течений жидкостей с переменной вязкостью на вращающемся диске к длинноволновым возмущениям малой амплитуды.

Работа выполнена при поддержке Гранта по фундаментальным исследованиям в области охраны окружающей среды и экологии человека № 6-90.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Волокитин Г.Г., Борзых В.Э., Унжаков С.О., Шиляев А.М.** Плазменная технология получения минерального волокна из золоотходов промышленности // Сиб. физ.-техн. журн. (Изв. СО РАН). — 1993. — Вып. 1. — С. 74 – 78.
2. **Шиляев М.И., Толстых А.В., Борзых В.Э.** Среднемассовые характеристики стационарного пленочного течения расплава на вращающемся диске // Теплофизика и аэромеханика. — 1997. — Т. 4, № 1. — С. 77 – 84.
3. **Шиляев М.И., Борзых В.Э., Толстых А.В.** Асимптотический профиль свободной поверхности пленки на вращающемся диске // Там же. — 1995. — Т. 2, № 4. — С. 351 – 367.
4. **Шиляев М.И., Борзых В.Э., Постников С.Н.** Пленочное течение на внутренней поверхности вращающегося цилиндра // Тез. докл. междунар. науч. конф. “Сопряженные задачи механики реагирующих сред и экологии”. — Томск, 1996.
5. **Лотт Р., Паркер Дж.** Влияние вязкости, зависящей от температуры, на теплопередачу при конденсации в ламинарном режиме // Теплопередача. — 1973. — Т. 95, № 2. — С. 128.
6. **Полежаев Ю.В., Юревич Ф.Б.** Тепловая защита. — М.: Энергия, 1976. — 125 с.
7. **Буланов А.А., Гимранов Ф.М., Зиннатулин Н.Х.** Анализ процесса теплообмена при тонкопленочном течении жидкости в поле центробежных сил // Теор. основы хим. технологии. — 1990. — Т. 24, № 6. — С. 735 – 742.
8. **Шкадов В.Я.** Некоторые методы и задачи теории гидродинамической устойчивости. — М.: Наука, 1973. — 370 с.
9. **Сисоев Г.М., Шкадов В.Я.** Устойчивость течения пленки вязкой жидкости по поверхности вращающегося диска // Инж.-физ. журн. — 1987. — Т. 52, № 5. — С. 936 – 940.

Статья поступила в редакцию 2 октября 1997 г.,
в доработанном виде — 15 июня 1998 г.