УДК 539.3

УРАВНЕНИЯ УПРУГОГО АНИЗОТРОПНОГО СЛОЯ

Ю. М. Волчков, Л. А. Дергилева

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Построены дифференциальные уравнения упругого ортотропного слоя на основе разложения решений уравнений теории упругости по полиномам Лежандра. Порядок системы дифференциальных уравнений не зависит от вида краевых условий на поверхностях слоя, что позволяет корректно формулировать условия на контактных поверхностях.

Ключевые слова: ортотропный упругий слой, полиномы Лежандра.

Введение. При сведéнии трехмерной задачи теории упругости к двумерной (теории оболочек) либо используются гипотезы кинематического и силового характера [1], либо применяются разложения по некоторой полной системе функций [2]. Как правило, уравнения теории оболочек с использованием гипотез типа Кирхгофа — Лява строятся для случая задания на поверхностях оболочки усилий. Это затрудняет решение контактных задач на основе таких уравнений и зачастую приводит к эффектам нефизического характера. В [3, 4] на основе разложений по полиномам Лежандра построены дифференциальные уравнения упругого слоя, порядок которых не зависит от вида краевых условий на его поверхностях, что обеспечивает корректную постановку контактных задач. Уравнения слоя в первом приближении сводятся к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. В [4] приведены общие решения таких уравнений для изотропного упругого слоя постоянной толщины, в [4–6] — решения некоторых контактных задач. Задача об изгибе трехслойной ортотропной балки на основе уравнений упругого слоя в первом приближении решена в [7]. Проведенное в [5] сравнение решений контактных задач на основе уравнений упругого слоя в первом приближении с решениями по уравнениям теории упругости показало хорошее соответствие результатов, полученных по приближенным уравнениям и уравнениям теории упругости. Предложенный в [3] подход к построению приближенных уравнений использован в [8] для построения уравнений упругого слоя переменной толщины. Уравнения упругого слоя в первом приближении могут быть использованы и для численного решения плоских задач теории упругости. В [9] предложен численный алгоритм решения плоских задач теории упругости методом слоев.

В данной работе приведены дифференциальные уравнения анизотропного упругого слоя в первом приближении.

1. Уравнения плоской задачи теории упругости. Запишем уравнения плоской задачи теории упругости в прямоугольной области Ω: $\{-l \leqslant x_1 \leqslant l,\ -h/2 \leqslant x_2 \leqslant h/2\}$:

$$\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + f_i = 0, \qquad \sigma_{ij} = a_{ijmn}\varepsilon_{mn}, \qquad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\Big), \tag{1.1}$$

где h — толщина слоя; $2l$ — длина слоя; σ_{ij}, ε_{ij} — напряжения и деформации соответственно; u_i — смещения; f_i, a_{ijmn} — заданные кусочно-непрерывные функции x_1 и x_2;

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02-01-00649).

коэффициенты a_{ijmn} удовлетворяют условиям

$$a_{ijmn}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{mn} - c\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} \geqslant 0, \qquad a_{ijmn} = a_{jimn} = a_{ijnm},$$

где c — неотрицательная постоянная, индексы i, j принимают значения 1 и 2; по немым индексам проводится суммирование. На границе области Ω ставятся краевые условия вида

$$c_{i1}^{\pm} u_i + d_{i1}^{\pm}\sigma_{i1} = \varphi_{i1}^{\pm} \qquad \text{при} \quad x_1 = \pm l; \tag{1.2}$$

$$c_{i2}^{\pm} u_i + d_{i2}^{\pm}\sigma_{i2} = \varphi_{i2}^{\pm} \qquad \text{при} \quad x_2 = \pm h/2, \tag{1.3}$$

где $c_{i2}^{\pm}(x_1)$, $d_{i2}^{\pm}(x_1)$, $\varphi_{i2}^{\pm}(x_1)$, $\varphi_{i1}^{\pm}(x_2)$ — заданные кусочно-непрерывные функции; $c_{i1}^{\pm}$, $d_{i1}^{\pm}$ — заданные постоянные, удовлетворяющие условиям

$$|c_{ij}^{\pm}| + |d_{ij}^{\pm}| \neq 0, \qquad c_{ij}^{+}d_{ij}^{+} \geqslant 0, \qquad c_{ij}^{-}d_{ij}^{-} \leqslant 0. \tag{1.4}$$

Неравенства (1.4) обеспечивают диссипативность краевых условий (1.2), (1.3).

2. Разложение напряжений и смещений в ряды по полиномам Лежандра. Основные краевые условия. Пусть напряжения и смещения разложены в ряды по полиномам Лежандра

$$\sigma_{ij} = \sum_{k=0}^{\infty} \sigma_{ij}^{k} P_k(\zeta), \qquad u_i = \sum_{k=0}^{\infty} u_i^{k} P_k(\zeta), \tag{2.1}$$

где $\zeta = 2x_2/h$; $P_k(\zeta)$ — полиномы Лежандра;

$$\sigma_{ij}^{k} = \frac{1+2k}{2}\int_{-1}^{+1} \sigma_{ij} P_k(\zeta)\,d\zeta; \qquad u_i^{k} = \frac{1+2k}{2}\int_{-1}^{+1} u_i P_k(\zeta)\,d\zeta.$$

Из (2.1) следует, что

$$\sigma_{11}^{0} = T_{11}/h, \qquad \sigma_{11}^{1} = 6M_{11}/h^2, \qquad \sigma_{12}^{0} = T_{21}/h, \tag{2.2}$$

где

$$T_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11}\,dx_2, \qquad M_{11} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{11}x_2\,dx_2, \qquad T_{21} = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_{21}\,dx_2 \tag{2.3}$$

— усилие, момент и перерезывающая сила в сечении слоя $x_1 = \text{const}$ соответственно. В (2.1) первые два члена ряда для u_1 и первый член ряда для u_2 соответствуют перемещению слоя как жесткого целого. Если напряжения и смещения представлены в виде рядов (2.1), то краевые условия (1.2) можно записать в виде условий на коэффициенты этих рядов $u_i^k(x_1)$, $\sigma_{ij}^k(x_1)$:

$$c_{i1}^{\pm} u_i^{k} + d_{i1}^{\pm}\sigma_{i1}^{k} = (\varphi_{i1}^{\pm})^{k}, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots\,. \tag{2.4}$$

В (2.4) $(\varphi_{i1}^{\pm})^k$ — коэффициенты рядов Лежандра функций $\varphi_{i1}^{\pm}$.

Если толщина слоя мала ($h \ll l$), то в силу принципа Сен-Венана условия (2.4) можно разделить на две группы: 1) условия, влияющие на решение при всех $|x_1| \leqslant l$, и 2) условия, влияющие на решение лишь в окрестности сечений $x_1 = \pm l$. *Условия, влияющие на решение при всех $|x_1| \leqslant l$, назовем основными.* Ими по принципу Сен-Венана являются те, которые содержат величины (2.2), т. е. условия

$$\begin{aligned} c_{11}^{\pm} u_1^{k} + d_{11}^{\pm}\sigma_{11}^{k} &= (\varphi_{11}^{\pm})^{k}, \qquad k = 0, 1, \\ c_{21}^{\pm} u_2^{0} + d_{21}^{\pm}\sigma_{21}^{0} &= (\varphi_{21}^{\pm})^{0} \qquad \text{при} \quad x_1 = \pm l. \end{aligned} \tag{2.5}$$

3. Уравнения одномерной задачи первого приближения. При построении уравнений в первом приближении будем требовать, чтобы решение одномерной задачи было возможным при любых условиях (2.5) (любых значениях $(\varphi_{11}^{\pm})^k$ $(k = 0, 1)$, $(\varphi_{21}^{\pm})^0$ и любых допустимых неравенствами (1.4) значениях $c_{i1}^{\pm}$, $d_{i1}^{\pm}$). Так как условий (2.5) шесть, то минимальный порядок системы уравнений одномерной задачи первого приближения должен быть не ниже шестого и система не должна содержать каких-либо других производных, кроме

$$\frac{du_1^k}{dx_1}, \quad \frac{d\sigma_{11}^k}{dx_1}, \quad k = 0, 1, \qquad \frac{du_2^0}{dx_1}, \quad \frac{d\sigma_{21}^0}{dx_1}. \tag{3.1}$$

В соответствии с этим в рядах для производных

$$\frac{\partial\sigma_{11}}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial\sigma_{21}}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial u_1}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial u_2}{\partial x_1}, \tag{3.2}$$

входящих в уравнения равновесия (первая группа уравнений (1.1)) оставим только те члены, которые содержат производные (3.1). Таким образом, производные (3.2) заменяются производными

$$\frac{\partial\sigma_{11}'}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial\sigma_{21}'}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial u_1'}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial u_2'}{\partial x_1},$$

где

$$\sigma_{11}' = \sum_{k=0}^{1} \sigma_{11}^k P_k(\zeta), \quad \sigma_{21}' = \sigma_{21}^0, \quad u_1' = \sum_{k=0}^{1} u_1^k P_k(\zeta), \quad u_2' = u_2^0. \tag{3.3}$$

В рядах для производных $\partial\sigma_{12}/\partial x_2$, $\partial\sigma_{22}/\partial x_2$ в уравнениях (1.1) оставим только такие слагаемые, чтобы имело место соответствие

$$\frac{\partial\sigma_{12}}{\partial x_2} \sim \frac{\partial\sigma_{11}'}{\partial x_1}, \qquad \frac{\partial\sigma_{22}}{\partial x_2} \sim \frac{\partial\sigma_{21}'}{\partial x_1}. \tag{3.4}$$

В (3.4) и ниже символ "$\sim$" обозначает одинаковую степень полиномов по ζ. Поэтому в одномерной задаче первого приближения σ_{12}, σ_{22} в уравнениях равновесия из (1.1) заменяются отрезками полиномов

$$\sigma_{12}' = \sum_{k=0}^{2} \sigma_{12}^k P_k(\zeta), \qquad \sigma_{22}' = \sum_{k=0}^{1} \sigma_{22}^k P_k(\zeta). \tag{3.5}$$

Массовые силы f_1 и f_2 заменяем отрезками f_1' и f_2' рядов полиномов Лежандра так, чтобы имело место соответствие:

$$f_1' \sim \frac{\partial\sigma_{11}'}{\partial x_1}, \qquad f_2' \sim \frac{\partial\sigma_{21}'}{\partial x_1}.$$

Таким образом,

$$f_1' = \sum_{k=0}^{1} f_1^k P_k(\zeta), \qquad f_2' = f_2^0, \qquad f_i^k = \frac{1+2k}{2} \int\limits_{-1}^{+1} f_i P_k(\zeta)\, d\zeta, \quad k = 1, 2. \tag{3.6}$$

В соответствии с аппроксимациями (3.3), (3.5), (3.6) уравнения равновесия из (1.1) заменяются уравнениями

$$\frac{\partial\sigma_{ij}'}{\partial x_j} + f_i' = 0. \tag{3.7}$$

В (3.3), (3.5) коэффициенты σ_{ij}^k — искомые функции переменной x_1.

Если обозначить

$$\sigma'_{12}(\zeta = \pm 1) = \sigma_{12}^{\pm}, \qquad \sigma'_{22}(\zeta = \pm 1) = \sigma_{22}^{\pm},$$

то из (3.5) следует

$$\sigma_{12}^2 = (\sigma_{12}^+ + \sigma_{12}^-)/2 - \sigma_{12}^0, \qquad \sigma_{12}^1 = (\sigma_{12}^+ - \sigma_{12}^-)/2,$$
$$\sigma_{22}^1 = (\sigma_{22}^+ - \sigma_{22}^-)/2, \qquad \sigma_{22}^0 = (\sigma_{22}^+ - \sigma_{22}^-)/2.$$

Используя эти соотношения и (2.3), уравнения (3.7) можно записать в виде

$$\begin{gathered} \frac{dT_{11}}{dx_1} + \sigma_{12}^+ - \sigma_{12}^- + f_1^0 h = 0, \qquad \frac{dM_{11}}{dx_1} + \frac{\sigma_{12}^+ + \sigma_{12}^-}{2}\, h - \sigma_{12}^0 h + \frac{1}{6}\, h^2 f_1^1 = 0, \\ \frac{dT_{21}}{dx_1} + \sigma_{22}^+ - \sigma_{22}^- + f_2^0 h = 0. \end{gathered} \tag{3.8}$$

Если положить $\sigma_{21}^0 = \sigma_{12}^0$ и, следовательно, $\sigma_{12}^0 = Q$, то уравнения (3.8) представляют собой уравнения равновесия нагруженного массовыми силами f_i и поверхностными силами $\sigma_{12}^{\pm}$, $\sigma_{22}^{\pm}$ элемента, размер которого в направлении оси x_1 бесконечно мал, а в направлении оси x_2 равен h. Таким образом, в одномерной задаче первого приближения требование, чтобы напряжения удовлетворяли уравнениям равновесия любых бесконечно малых элементов заменяется более слабым требованием, чтобы напряжения удовлетворяли условиям равновесия элементов, размеры которых бесконечно малы лишь в направлении оси x_1 и конечны в направлении оси x_2.

Наряду с аппроксимациями смещений u'_1 и u'_2 (соотношения (3.3)) в уравнениях одномерной задачи используются аппроксимации:

$$u''_1 = \sum_{k=0}^{3} u_1^k P_k(\zeta), \qquad u''_2 = \sum_{k=0}^{2} u_2^k P_k(\zeta). \tag{3.9}$$

Длина отрезков полиномов в (3.9) определяется соответствиями

$$\frac{\partial u''_1}{\partial x_2} \sim \sigma'_{12}, \qquad \frac{\partial u''_2}{\partial x_2} \sim \sigma'_{22}.$$

Аппроксимации (3.9) используются при замене производных $\partial u_1/\partial x_2$, $\partial u_2/\partial x_2$ в последней группе уравнений (1.1) на производные $\partial u''_1/\partial x_2$, $\partial u''_2/\partial x_2$.

Деформации в одномерной задаче первого приближения выражаются через отрезки u'_i, u''_i следующим образом:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u'_1}{\partial x_1}, \qquad 2\varepsilon_{12} = \frac{\partial u''_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u'_2}{\partial x_1}, \qquad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u''_2}{\partial x_2}. \tag{3.10}$$

Напряжения внутри слоя вычисляются по формулам

$$\sigma_{ij} = a_{ijmn}\varepsilon_{mn}, \tag{3.11}$$

где ε_{mn} определяются соотношениями (3.10). Несмотря на то, что деформации являются полиномами по координате x_2, напряжения могут не быть полиномами, если коэффициенты упругости зависят от координат x_1 и x_2, например в случае неоднородного материала.

Из (3.3), (3.5), (3.10), (3.11) следует, что коэффициенты σ_{ij}^k и u_i^k связаны соотношениями

$$\sigma_{ij}^k = \frac{1+2k}{2} \int_{-1}^{+1} a_{ijmn}\varepsilon_{mn} P_k(\zeta)\, d\zeta. \tag{3.12}$$

Граничные условия (1.3) в одномерной задаче заменяются условиями

$$c_{i2}^{\pm} u_i'' + d_{i2}^{\pm} \sigma_{i2}' = \varphi_{i2}^{\pm} \quad (i = 1, 2) \quad \text{при} \quad x_2 = \pm h/2. \tag{3.13}$$

Уравнения (3.3), (3.5), (3.7), (3.9)–(3.13) и граничные условия (2.5) образуют замкнутую систему одномерных уравнений первого приближения для упругого слоя. Отметим, что уравнения равновесия (3.8) можно записать в виде

$$\int_{-1}^{+1} \Big[\frac{\partial \sigma_{1i}}{\partial x_i} + f_1\Big] P_k(\zeta)\, d\zeta = 0, \qquad \int_{-1}^{+1} \Big[\frac{\partial \sigma_{2i}}{\partial x_i} + f_2\Big]\, d\zeta = 0 \qquad (k = 0, 1),$$

а уравнения (3.11) — в виде

$$\int_{-1}^{+1} [\sigma_{11}' - a_{11ij}\varepsilon_{ij}] P_k(\zeta)\, d\zeta = 0, \qquad \int_{-1}^{+1} [\sigma_{22}' - a_{22ij}\varepsilon_{ij}] P_k(\zeta)\, d\zeta = 0,$$

$$\int_{-1}^{+1} [\sigma_{12}' - a_{12ij}\varepsilon_{ij}] P_k(\zeta) d\zeta = 0, \qquad \sigma_{21}^0 = \sigma_{12}^0.$$

Решение одномерной задачи сводится к решению системы дифференциальных уравнений относительно функций

$$u_1^0,\ u_1^1,\ u_2^0,\ \sigma_{11}^0,\ \sigma_{11}^1,\ \sigma_{21}^0. \tag{3.14}$$

Эта система имеет шестой порядок независимо от вида краевых условий на поверхностях слоя $x_2 = \pm h/2$.

Функции (3.14) будем называть основными, а функции σ_{22}^0, σ_{22}^1, σ_{12}^1, σ_{12}^2, u_1^2, u_1^3, u_2^1, u_2^2 — дополнительными.

Можно показать, что решение одномерной задачи удовлетворяет энергетическому тождеству

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}\varepsilon_{ij}\, d\Omega = \int_{\Omega} \Big(f_i' u_i' + \frac{\partial(\sigma_{i1}' u_i')}{\partial x_1} + \frac{\partial(\sigma_{i2}' u_i'')}{\partial x_2}\Big)\, d\Omega. \tag{3.15}$$

Тождество (3.15) позволяет доказать единственность некоторого класса контактных задач для упругого слоя [4].

4. Переход в уравнениях одномерной задачи к безразмерным переменным. В дальнейшем будем использовать безразмерные величины

$$\begin{gathered} \bar\sigma_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_0}, \qquad \bar\varepsilon_{ij} = \frac{\varepsilon_{ij}}{\varepsilon_0}, \qquad \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{\mu}, \qquad \bar u_i = \frac{2u_i}{h\varepsilon_0}, \\ \xi = \frac{x_1}{L_0}, \qquad \zeta = \frac{2x_2}{h}, \qquad \eta = \frac{h}{2L_0}, \qquad \bar f_i^0 = \frac{f_i^0 h}{2\sigma_0}. \end{gathered} \tag{4.1}$$

Отрезки рядов полиномов Лежандра (3.3), (3.5), (3.9) для безразмерных напряжений и смещений запишем в виде

$$\begin{gathered} \bar\sigma_{11}' = t_{11} + m_{11}P_1, \qquad \bar\sigma_{12}' = t_{12} + m_{12}P_1 + r_{12}P_2, \\ \bar\sigma_{21}' = t_{21}, \qquad \bar\sigma_{22}' = t_{22} + m_{22}P_1; \end{gathered} \tag{4.2}$$

$$\bar{u}_1' = u_0 + u_1 P_1, \qquad \bar{u}_2' = v_0,$$
$$\bar{u}_1'' = u_0 + u_1 P_1 + u_2 P_2 + u_3 P_3, \qquad \bar{u}_2'' = v_0 + v_1 P_1 + v_2 P_2. \tag{4.3}$$

В (4.2), (4.3)

$$t_{11} = \frac{T_{11}}{h\sigma_0}, \qquad t_{21} = t_{12} = \frac{T_{21}}{h\sigma_0}, \qquad m_{11} = \frac{6M_{11}}{h^2\sigma_0},$$
$$u_0 = \frac{1}{h\varepsilon_0}\int\limits_{-h/2}^{h/2} \frac{u_1}{h}\,dx_2, \qquad u_1 = \frac{6}{h^2\varepsilon_0}\int\limits_{-h/2}^{h/2} \frac{u_1}{h}x_2\,dx_2, \qquad v_0 = \frac{1}{h\varepsilon_0}\int\limits_{-h/2}^{h/2} \frac{u_2}{h}\,dx_2. \tag{4.4}$$

Связь между безразмерными напряжениями и деформациями запишем в виде

$$\bar{\sigma}_1 = \alpha_1(\bar{\varepsilon}_1 + \gamma_1\bar{\varepsilon}_2), \qquad \bar{\sigma}_2 = \alpha_2(\bar{\varepsilon}_2 + \gamma_2\bar{\varepsilon}_1), \qquad \bar{\sigma}_{12} = 2\bar{m}\varepsilon_{12}. \tag{4.5}$$

Для трансверсально изотропного материала в соотношениях (4.5) упругие постоянные имеют вид

$$\alpha_1 = \frac{E_2}{\sigma_0}\,\frac{n(1-n\nu_2^2)}{(1+\nu_1)(1-\nu_1-2n\nu_2^2)}, \qquad \alpha_2 = \alpha_1\frac{1-\nu_1^2}{n(1-n\nu_2^2)},$$
$$\gamma_1 = \frac{\nu_2(1+\nu_1)}{1-n\nu_2^2}, \qquad \gamma_2 = \frac{n\nu_2}{1-\nu_1}, \qquad \bar{m} = m\frac{E_2}{\sigma_0} \tag{4.6}$$

в случае плоской деформации и

$$\alpha_1 = \frac{E_2 n}{\sigma_0(1-n\nu_2)}, \quad \alpha_2 = \frac{\alpha_1}{n}, \quad \gamma_1 = \nu_2, \quad \gamma_2 = n\nu_2, \quad \bar{m} = m\frac{E_2}{\sigma_0} \tag{4.7}$$

для плосконапряженного состояния. В (4.6) упругие постоянные E_1, ν_1 характеризуют поведение материала в плоскости изотропии, упругие постоянные E_2, G_2, ν_2 — в направлении, ортогональном к плоскости изотропии, $n = E_1/E_2$, $m = G_2/E_2$.

Для ортотропного материала в соотношениях (4.5) упругие постоянные в случае плосконапряженного состояния записываются в виде

$$\alpha_1 = \frac{E_x}{\sigma_0(1-\nu_{xy}\nu_{xy})}, \qquad \alpha_2 = \frac{E_y}{\sigma_0(1-\nu_{xy}\nu_{xy})},$$
$$\gamma_1 = \nu_{xy}, \qquad \gamma_2 = \nu_{yx}, \qquad \bar{m} = m\frac{G_{xy}}{\sigma_0}, \qquad \frac{\nu_{xy}}{E_x} = \frac{\nu_{yx}}{E_y}.$$

Для изотропного материала из (4.6), (4.7) при $E_1 = E_2$, $G_1 = G_2$, $\nu_1 = \nu_2$ следуют соотношения

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha = 2/(1-\gamma), \tag{4.8}$$

где $\gamma = \nu/(1-\nu)$ в случае плоской деформации и $\gamma = \nu$ для плосконапряженного состояния.

Система дифференциальных уравнений для коэффициентов разложений (4.2) и (4.3) в безразмерных переменных записывается в виде

$$\eta t_{11}' + (\bar{\sigma}_{12}^+ - \bar{\sigma}_{12}^-)/2 + \bar{f}_1^0 = 0, \qquad \eta t_{12}' + (\bar{\sigma}_2^+ - \bar{\sigma}_2^-)/2 + \bar{f}_2^0 = 0,$$
$$\eta m_{11}' - 3t_{12} + 3(\bar{\sigma}_{12}^+ + \bar{\sigma}_{12}^-)/2 + \bar{f}_1^1 = 0,$$
$$t_{11} = \alpha_1(\eta u_0' + \gamma_1 v_1), \qquad t_{22} = \alpha_2(\gamma_2\eta u_0' + v_1), \tag{4.9}$$

$$m_{11}=\alpha_1(\eta u_1'+3\gamma_1 v_2),\qquad m_{22}=\alpha_2(\gamma_2\eta u_1'+3v_2),$$
$$t_{12}=m(\eta v_0'+u_1+u_3),\qquad m_{12}=3mu_2,\qquad r_{12}=5mu_3.$$

Система (4.9) из десяти уравнений относительно 14 коэффициентов разложений (4.2), (4.3) замыкается заданием четырех условий на поверхностях слоя при $\zeta=\pm 1$:

$$c_{i2}^{\pm}u_i''+d_{i2}^{\pm}\sigma_{i2}'=\varphi_{i2}^{\pm}. \tag{4.10}$$

Система уравнений (4.9), (4.10) упругого слоя в первом приближении может быть представлена в виде шести дифференциальных уравнений первого порядка относительно основных функций u_0, u_1, v_0, t_{11}, m_{11}, t_{12}:

$$\begin{gathered} t_{11}'=-[(\sigma_{12}^{+}-\sigma_{12}^{-})/2+f_1^0]/\eta,\qquad u_0'=(\alpha_2 t_{11}-\alpha_1\gamma_1 t_{22})/(\eta\alpha_1\alpha_2(1-\gamma_1\gamma_2)),\\ m_{11}'=[3t_{12}-3(\sigma_{12}^{+}+\sigma_{12}^{-})/2-f_1^1]/\eta,\quad u_1'=(\alpha_2 m_{11}-\alpha_1\gamma_1 m_{22})/(\eta\alpha_1\alpha_2(1-\gamma_1\gamma_2)),\\ t_{12}'=-[(\sigma_{22}^{+}-\sigma_{22}^{-})/2+f_2^0]/\eta,\qquad v_0'=(t_{11}/m-u_1-u_3)/\eta \end{gathered} \tag{4.11}$$

и восьми уравнений, в которых помимо основных содержатся дополнительные величины u_2, u_3, v_1, v_2, m_{12}, r_{12}, t_{22}, m_{22} и заданные функции, входящие в правые части условий (3.13):

$$\begin{gathered} v_1=(\alpha_1 t_{22}-\gamma_2\alpha_2 t_{11})/(\alpha_1\alpha_2(1-\gamma_1\gamma_2)),\qquad m_{12}=3mu_2,\\ v_2=(\alpha_1 m_{22}-\gamma_2\alpha_2 m_{11})/(3\alpha_1\alpha_2(1-\gamma_1\gamma_2)),\qquad r_{12}=5mu_3,\\ c_{12}^{+}(u_0+u_1+u_2+u_3)+d_{12}^{+}(t_{12}+m_{12}+r_{12})=\varphi_{12}^{+}(\xi),\\ c_{12}^{-}(u_0-u_1+u_2-u_3)+d_{12}^{-}(t_{12}-m_{12}+r_{12})=\varphi_{12}^{-}(\xi),\\ c_{22}^{+}(v_0+v_1+v_2)+d_{22}^{+}(t_{22}+m_{22})=\varphi_{22}^{+}(\xi),\\ c_{22}^{-}(v_0-v_1+v_2)+d_{22}^{-}(t_{22}-m_{22})=\varphi_{22}^{-}(\xi). \end{gathered} \tag{4.12}$$

Из уравнений (4.12) дополнительные величины можно выразить через основные и известные функции $c_{i2}^{\pm}(\xi)$, $d_{i2}^{\pm}(\xi)$, $\varphi_{i2}^{\pm}(\xi)$ $(i=1,2)$. Подставляя эти выражения в уравнения (4.11), получим систему дифференциальных уравнений шестого порядка относительно основных величин. Порядок этой системы не зависит от вида краевых условий на поверхностях слоя.

Если ввести вектор $\boldsymbol{z}=[u_0,u_1,v_0,t_{11},m_{11},t_{12}]^{\mathrm{т}}$, то систему уравнений слоя можно записать в виде

$$\boldsymbol{z}'=H\boldsymbol{z}+\boldsymbol{F}, \tag{4.13}$$

где H — квадратная матрица 6×6; $\boldsymbol{F}$ — вектор из шести компонент.

Для системы (4.13) при $\xi=\xi_0$ и $\xi=\xi_1$ ставятся краевые условия вида

$$A\boldsymbol{x}+B\boldsymbol{y}=\boldsymbol{C}, \tag{4.14}$$

где

$$\boldsymbol{x}=\left\|\begin{matrix} u_0\\ u_1\\ v_0\end{matrix}\right\|,\qquad \boldsymbol{y}=\left\|\begin{matrix} t_{11}\\ m_{11}\\ t_{12}\end{matrix}\right\|.$$

В (4.14) A, B — заданные матрицы порядка 3×3; $\boldsymbol{C}$ — заданный вектор с тремя компонентами.

Матрица H системы (4.13) зависит от вида краевых условий на поверхностях слоя. Для любого вида условий можно записать общее решение этой системы. Но если конструкция состоит из нескольких слоев, то порядок системы возрастает и построение аналитического решения становится практически невозможным. В этом случае целесообразно использовать численные алгоритмы.

5. Моментный конечный элемент. Ниже строится матрица жесткости прямоугольного конечного элемента Ω: $\{x_1^- \leqslant x_1 \leqslant x_1^+,\ x_2^- \leqslant x_2 \leqslant x_2^+\}$. Предполагается, что на всех четырех гранях элемента заданы усилия $t_{ij}^{\pm}$ (или соответствующие им средние значения смещений граней), а на двух противоположных боковых гранях заданы и изгибающие моменты $m_{11}^{\pm}$ (или средние значения углов поворота граней $\theta_{11}^{\pm}$). Введем переменные

$$\xi_1 = 2[x_1 - (x_1^+ + x_1^-)/2]/h_1, \qquad \xi_2 = 2[x_2 - (x_2^+ + x_2^-)/2]/h_2,$$

где $h_1 = x_1^+ - x_1^-$; $h_2 = x_2^+ - x_2^-$. При этом прямоугольник Ω преобразуется в квадрат.

Напряжения и смещения внутри элемента Ω по координате ξ_2 аппроксимируются отрезками рядов по полиномам Лежандра (3.3), (3.5), (3.9). Представим функции σ_{ij}^k в виде отрезков рядов полиномов Лежандра $Q_i(\xi_1)$. Если потребовать, чтобы каждое слагаемое в (3.3) представлялось одинаковыми отрезками рядов полиномов по $Q_i(\xi_1)$, $P_k(\xi_2)$, то следует положить

$$\sigma'_{11} = \sum_{i=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} \sigma_{11}^{(1,k)} Q_i P_k, \qquad \sigma'_{21} = \sum_{i=0}^{1} \sigma_{21}^{(i,0)} Q_i, \qquad \sigma'_{22} = \sum_{i=0}^{1}\sum_{k=0}^{1} \sigma_{11}^{(1,k)} Q_i P_k,$$
$$\sigma'_{21} = \sum_{i=0}^{1} \sigma_{21}^{(i,0)} Q_i, \qquad f'_1 = \sum_{k=0}^{1} f_1^{(0,k)} P_k, \qquad f'_2 = f_2^{(0,0)}, \tag{5.1}$$

где

$$\sigma_{\alpha 1}^{(i,k)} = \frac{(1+2i)(1+2k)}{4} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \sigma_{\alpha 1} Q_i P_k \, d\xi_1 \, d\xi_2,$$

$$f_{\alpha}^{(0,k)} = \frac{1+2k}{4} \int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} f_{\alpha} P_k \, d\xi_1 \, d\xi_2, \qquad \alpha = 1, 2.$$

Представляя коэффициенты отрезков рядов для смещений в (3.3), (3.15) отрезками рядов по полиномам Лежандра $Q_i(\xi_1)$, потребуем, чтобы задача об определении коэффициентов разложений в прямоугольнике Ω имела решение для любых краевых условий при $x_1 = \pm l$ вида

$$c_{11}^{\pm} u_1^k + d_{11}^{\pm} \sigma_{11}^k = (\varphi_{11}^{\pm})^k, \qquad c_{21}^{\pm} u_2^0 + d_{21}^{\pm} \sigma_{21}^0 = (\varphi_{21}^{\pm})^0 \qquad (k = 0, 1) \tag{5.2}$$

и имело место соответствие

$$\frac{\partial u''_1}{\partial x_2} \sim \ \sigma'_{12}, \qquad \frac{\partial u''_2}{\partial x_2} \sim \sigma'_{22}.$$

Здесь символ “$\sim$” обозначает одинаковую степень полиномов по ξ_1 и ξ_2. В соответствии с этими требованиями нужно положить

$$u'_1 = \sum_{i=0}^{2}\sum_{k=0}^{1} u_1^{(i,k)} Q_i P_k, \qquad u''_1 = \sum_{k=0}^{3} u_1^{(0,k)} P_k,$$

$$u_2' = \sum_{i=0}^{2} u_2^{(i,0)} Q_i, \qquad u_2'' = \sum_{k=0}^{2} u_2^{(0,k)} P_k. \tag{5.3}$$

Деформации внутри элемента выражаются через смещения (5.3) по формулам

$$\varepsilon_{11} = \frac{\partial u_1'}{\partial x_1}, \qquad 2\varepsilon_{12} = \frac{\partial u_1''}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2'}{\partial x_1}, \qquad \varepsilon_{22} = \frac{\partial u_2''}{\partial x_2}. \tag{5.4}$$

Напряжения внутри слоя вычисляются по формулам

$$\sigma_{ij} = a_{ijmn} \varepsilon_{mn}, \tag{5.5}$$

где ε_{mn} определяются по соотношениям (5.4).

Уравнения (3.7), (5.4), (5.5) и граничные условия

$$u_1'(x_1^{\pm}) = u_{11}^{\pm} \pm h_2 \theta_{11}^{\pm} P_1/2, \qquad u_2'(x_1^{\pm}) = u_{21}^{\pm}, \qquad u_i'(x_2^{\pm}) = u_{i2}^{\pm} \quad (i = 1, 2)$$

образуют замкнутую систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов $u_\alpha^{(i,k)}$, $\sigma_m^{(i,k)}$, входящих в разложения (5.1) и (5.3). Обобщенные усилия и смещения определены соотношениями (4.4). Решив эту систему, найдем выражения усилий $t_{ij}^{\pm}$ и моментов $m_{11}^{\pm}$ через смещения $u_{ij}^{\pm}$ и углы поворота $\theta_{11}^{\pm}$ граней элемента. Усилия $t_{ij}^{\pm}$ и моменты $m_{11}^{\pm}$ связаны с решением системы равенствами

$$t_{i1}^{\pm} = h_2(\sigma_{i1}^{(0,0)} \pm \sigma_{i1}^{(1,0)}), \qquad t_{i2}^{\pm} = h_1 \sigma_{i2}'(\pm 1) \qquad (i = 1, 2),$$
$$m_{11}^{\pm} = h_2^2(\sigma_{11}^{(0,1)} \pm \sigma_{11}^{(1,1)})/6.$$

Введем обозначения

$$u_{ij}^0 = (u_{ij}^+ + u_{ij}^-)/2, \quad u_{ij}^1 = u_{ij}^+ - u_{ij}^-, \quad \theta_{11}^0 = (\theta_{11}^+ + \theta_{11}^-)/2, \quad \theta_{11}^1 = \theta_{11}^+ - \theta_{ij}^-. \tag{5.6}$$

Отметим, что линейные комбинации величин (5.6)

$$u_{11}^1,\ u_{22}^1,\ u_{12}^1/h_2 + u_{21}^1/h_1,\ \theta_{11}^1,\ u_{12}^1/h_2 - \theta_{11}^0,\ u_{12}^0 - u_{11}^0,\ u_{21}^0 - u_{22}^0 \tag{5.7}$$

равны нулю при смещении элемента как жесткого целого.

Для нахождения коэффициентов матрицы жесткости элемента нужно проделать следующие вычисления. Используя (5.3) и (5.6), выразим $u_\alpha^{(i,k)}$ через $u_{11}^{(0,0)}$, $u_{22}^{(0,0)}$, $u_{11}^{(0,1)}$ и величины (5.6). Из уравнений (3.7), (5.4), (5.5) величины $u_{11}^{(0,0)}$, $u_{22}^{(0,0)}$, $u_{11}^{(0,1)}$ и деформации выразим через величины (5.7). Если соотношения (5.5) в случае плоской задачи записать в виде

$$\sigma_{11} = a\varepsilon_{11} + b\varepsilon_{22}, \qquad \sigma_{22} = b\varepsilon_{11} + a\varepsilon_{22}, \qquad \sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12},$$

то в результате проделанных вычислений получим

$$t_{11}^0 = a\,\frac{h_2}{h_1}\,u_{11}^1 + b u_{22}^1, \quad t_{22}^0 = h_1\Big(\frac{a}{h_2}\,u_{22}^1 + \frac{b}{h_1}\,u_{11}^1\Big), \quad t_{21}^0 = \mu h_2\Big(\frac{1}{h_1}\,u_{21}^1 + \frac{1}{h_2}\,u_{12}^1\Big),$$
$$t_{12}^0 = \mu h_1\Big\{\frac{1}{h_1}\,u_{21}^1 + \frac{1}{h_2}\,u_{12}^1 + \frac{5}{a h_2/h_1 + 5\mu h_1/h_2}\Big[a\,\frac{h_2}{h_1}\Big(\frac{1}{h_2}\,u_{12}^1 - \theta_{11}^0\Big) - \frac{1}{6}\,h_1 f_1^{(0,1)}\Big]\Big\},$$
$$t_{11}^1 = \frac{12a}{\mu h_1/h_2 + a h_2/h_1}\Big[\mu(u_{11}^0 - u_{12}^0) - \frac{1}{12}\,h_2^2 f_1^{(0,0)}\Big], \tag{5.8}$$
$$t_{12}^1 = \frac{12\mu}{\mu h_1/h_2 + a h_2/h_1}\Big[a(u_{12}^0 - u_{11}^0) - \frac{1}{12}\,h_1^2 f_1^{(0,0)}\Big],$$

$$t_{21}^1 = \frac{\mu}{\mu h_2/h_1 + a h_1/h_2}\Big[12a(u_{21}^0 - u_{22}^0) - \frac{b h_2^2}{h_1}\,\theta_{11}^1 - h_2^2 f_2^{(0,0)}\Big],$$

$$t_{22}^1 = \frac{\mu}{\mu h_2/h_1 + a h_1/h_2}\Big[12a(u_{22}^0 - u_{21}^0) + \frac{b h_2^2}{h_1}\,\theta_{11}^1 - \frac{a h_1^2}{\mu}\,f_2^{(0,0)}\Big],$$

$$m_{11}^1 = \frac{a h_2^2}{a h_2/h_1 + 5\mu h_1/h_2}\Big[5\mu\theta_{11}^0 - \frac{1}{6}\,h_2 f_1^{(0,1)}\Big],$$

$$m_{11}^0 = \frac{h_2^2}{6(\mu h_2/h_1 + a h_1/h_2)}\Big\{\frac{6b\mu}{h_1}\,(u_{22}^0 - u_{21}^0) + \frac{1}{2}\Big[a\mu\,\frac{h_2^2}{h_1} + a^2 - b^2\Big]\theta_{11}^1 - \frac{1}{2}\,b h_1 f_2^{(0,0)}\Big\}.$$

Выражения (5.8) можно представить в виде

$$t_{ij}^0 = \langle t_{ij}^0\rangle + c_{ij}^0, \quad t_{ij}^1 = \langle t_{ij}^1\rangle + c_{ij}^1, \quad m_{11}^0 = \langle m_{11}^0\rangle + d_{11}^0, \quad m_{11}^1 = \langle m_{22}^1\rangle + d_{11}^1, \tag{5.9}$$

где $\langle t_{ij}^0\rangle$, $\langle t_{ij}^1\rangle$, $\langle m_{11}^0\rangle$, $\langle m_{11}^1\rangle$ — линейные комбинации величин (5.7). Следовательно, $\langle t_{ij}^0\rangle$, $\langle t_{ij}^1\rangle$, $\langle m_{11}^0\rangle$, $\langle m_{11}^1\rangle$ обращаются в нуль при перемещении элемента как жесткого целого, а величины c_{ij}^0, c_{ij}^1, d_{11}^0, m_{11}^1 — линейные комбинации f_1', f_2'.

Соотношения (5.9) и определяют матрицу жесткости моментного прямоугольного элемента.

Так как

$$\int\limits_{\Omega} a_{ijmn}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{mn}\,d\Omega = \int\limits_{\Omega}\Big[f_i' u_i' + \frac{\partial}{\partial x_1}\,(\sigma_{i1}' u_i') + \frac{\partial}{\partial x_2}\,(\sigma_{i2}' u_i'')\Big]\,d\Omega =$$

$$= t_{ij}^+ u_{ij}^+ - t_{ij}^- u_{ij}^- = \langle t_{ij}^1\rangle u_{ij}^0 + \langle t_{ij}^0\rangle u_{ij}^1, \tag{5.10}$$

то $\langle t_{ij}^1\rangle u_{ij}^0 + \langle t_{ij}^0\rangle u_{ij}^1 \geqslant 0$. Причем равенство в (5.10) возможно лишь при смещении элемента как жесткого целого. Это обеспечивает единственность решения при любых краевых условиях вида (5.2).

Процедура вычисления глобальной матрицы жесткости для области, составленной из прямоугольников, и итерационный алгоритм определения напряженно-деформированного состояния для таких областей приведены в [8].

В изложенном подходе к построению уравнений упругого слоя представления напряжений и смещений в виде отрезков рядов по полиномам Лежандра фактически использовались для аппроксимации входящих в уравнения производных от напряжений и смещений. Внутри слоя напряжения вычисляются по формулам (3.14). Это позволяет обобщить данный подход на случай построения уравнений слоя, поведение материала которого описывается физически нелинейными определяющими соотношениями.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.** Пластинки и оболочки. М.: Наука, 1966.
2. **Солер А.** Теории высшего порядка анализа конструкций, основанные на разложениях по полиномам Лежандра // Тр. Амер. о-ва инж.-мех. Сер. E. Прикл. механика. 1969. Т. 36, № 4. С. 107–112.
3. **Иванов Г. В.** Решение плоской задачи теории упругости в виде рядов по полиномам Лежандра // ПМТФ. 1976. № 6. С. 126–137.
4. **Дергилева Л. А.** Метод решения плоской контактной задачи для упругого слоя // Динамика сплошной среды / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1976. Вып. 25. С. 24–32.

5. **Волчков Ю. М., Дергилева Л. А.** Решение задач упругого слоя по приближенным уравнениям и сравнение с решениями теории упругости // Динамика сплошной среды / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1977. Вып. 28. С. 43–54.
6. **Волчков Ю. М., Дергилева Л. А.** Краевые эффекты в напряженном состоянии тонкой упругой прослойки // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 2. С. 189–195.
7. **Алексеев А. Е.** Изгиб трехслойной ортотропной балки // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 3. С. 158–166.
8. **Волчков Ю. М., Дергилева Л. А., Иванов Г. В.** Численное моделирование напряженных состояний в плоских задачах упругости методом слоев // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 6. С. 129–135.
9. **Алексеев А. Е.** Уравнения деформирования упругого слоя переменной толщины // Динамика сплошной среды / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1987. Вып. 81. С. 3–13.

Поступила в редакцию 11/XII 2003 г.