УДК 519.6+533

ПЛОСКИЕ ЗВУКОВЫЕ ВОЛНЫ МАЛОЙ АМПЛИТУДЫ В ГАЗОПЫЛЕВОЙ СРЕДЕ С ПОЛИДИСПЕРСНЫМИ ЧАСТИЦАМИ

Т. В. Маркелова[*,**,***], М. С. Арендаренко[*,**], Е. А. Исаенко[*,**], О. П. Стояновская[*,**]

[*] Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия
[**] Новосибирский национальный исследовательский государственный университет, 630090 Новосибирск, Россия
[***] Институт катализа им. Г. К. Борескова СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия
E-mails: matamara@gmail.com, m.arendarenko@g.nsu.ru, e.isaenko@g.nsu.ru, o.p.sklyar@gmail.com

Рассмотрена задача о распространении плоских звуковых волн малой амплитуды в среде из несущего изотермического газа и твердых частиц различного размера, сформулированная на основе многожидкостной макроскопической модели среды. В модели дисперсная фаза представляет собой N фракций монодисперсных частиц, для описания динамики каждой фракции используются уравнения сплошной среды, в которой отсутствует собственное давление. Фракции обмениваются импульсами с несущим газом, но не между собой. На всю смесь действует общее давление, определяемое движением молекул газа, пылевые частицы считаются плавучими. Аналитическое решение задачи получено с использованием метода Фурье и дисперсионного анализа. В общем случае при произвольном значении времени релаксации решение находится численно с помощью разработанного и опубликованного кода. В частных случаях (бесконечно малого времени скоростной релаксации или релаксационного равновесия и бесконечно большого времени скоростной релаксации или вмороженного равновесия) определена эффективная скорость звука в газопылевой среде и с ее помощью получены простые аналитические представления решения задачи.

Ключевые слова: двухфазная полидисперсная среда, гиперболические звуковые волны, дисперсионное соотношение, CFD-тест.

DOI: 10.15372/PMTF20210416

Введение. Численные модели динамики газопылевых сред разрабатываются для широкого класса приложений: моделирования атмосферных аэрозолей природного и техногенного происхождения, проектирования реакторов с мелкодисперсным катализатором, изучения механизмов звездообразования и формирования планет в околозвездных дисках и др. Программные реализации таких моделей должны проходить тестирование на задачах, имеющих эталонное решение. Для подхода, в котором динамика газа и дисперсных частиц описывается уравнениями сплошной среды, в качестве простого и информативного теста целесообразно использовать задачу о распространении плоских звуковых волн малой амплитуды. Альтернативные подходы к описанию двухфазной среды и области применимости гидродинамического приближения приведены, например, в работе [1]. Рас-

Работа выполнена за счет средств Российского научного фонда (код проекта 19-71-10026).

пространение волн малой амплитуды аналогичным образом описывается исходной нелинейной системой уравнений в частных производных и линейной системой, полученной из исходной путем линеаризации на стационарном решении. При этом эталонное решение линейной задачи удается построить стандартным методом для широкого диапазона параметров среды:

— по массовой доле дисперсной фазы — от слабозапыленной, в которой дисперсная фаза является пассивной примесью, до нагруженной, в которой межфазный обмен импульсом и энергией оказывает влияние на динамику среды;

— по характерному времени скоростной и тепловой релаксации — от интенсивного до умеренного и слабого межфазного взаимодействия.

Численное решение задачи о распространении волн малой амплитуды позволяет тестировать одновременно результаты расчета конвективного переноса и межфазного взаимодействия в среде, отделяя вычислительные особенности воспроизведения этих процессов от нелинейных эффектов, обусловленных возникновением разрывов (см., например, [2]), неединственностью скорости частиц (см., например, [3–5]). Более того, в рассматриваемой задаче звуковые волны движутся со скоростью, значительно превышающей среднемассовую скорость среды, поэтому такой тест удобен и широко применяется как для эйлеровых [6–13], так и для лагранжевых [1, 14–20] методов решения уравнений сплошной среды, поскольку при воспроизведении данного решения гарантированно отсутствует проблема пересечения траекторий модельных частиц и как следствие необходимость введения в расчеты искусственной вязкости.

Задача DustyWave о распространении звуковых волн малой амплитуды решена для монодисперсных [21, 22] и полидисперсных [11] сред, в которых твердые частицы не имеют собственного давления и не являются плавучими. В работе [23] приведено решение этой задачи для монодисперсной среды с учетом плавучести частиц, а также показана воспроизводимость этого решения в численных расчетах с использованием лагранжева численного метода. В настоящей работе решение [23] обобщается на случай среды с плавучими полидисперсными частицами, подробно анализируется случай бидисперсной среды и выделяются режимы, при которых в полидисперсной среде существуют бегущие гиперболические волны с постоянной амплитудой.

1. Полидисперсная двухфазная среда с плавучей дисперсной фазой. Рассматривается полидисперсная среда, в которой несущей фазой является сжимаемый невязкий газ с плотностью ρ_g и скоростью v. Пыль содержит N фракций частиц, различающихся по размеру. Для каждой фракции выполняется условие применимости гидродинамического описания среды и определены осредненные по пространству величины: скорость u_j, массовая плотность ρ_j, истинная плотность вещества ρ_s, одинаковая для частиц всех размеров, время релаксации скорости частиц к скорости газа t_j, номер фракции $j = 1, \ldots, N$. Систему уравнений для математической модели, в которой учитывается сила плавучести, представим в виде

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \rho_j}{\partial t} + \frac{\partial \rho_j u_j}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \frac{\partial \rho_g v}{\partial x} = 0, \\
\rho_g\Big(\frac{\partial v}{\partial t} + v\,\frac{\partial v}{\partial x}\Big) = -(1-\theta)\,\frac{\partial p_g}{\partial x} + \sum_{j=1}^{N} \frac{\rho_j(u_j - v)}{t_j}, \\
\rho_j\Big(\frac{\partial u_j}{\partial u_j} + u_j\,\frac{\partial u_j}{\partial x}\Big) = -\theta_j\,\frac{\partial p_g}{\partial x} - \frac{\rho_j(u_j - v)}{t_j}, \\
p_g = \frac{{c_s}^2 \rho_g}{1-\theta}, \qquad \theta = \sum_{j=1}^{N} \theta_j, \qquad \theta_j = \frac{\rho_j}{\rho_s}.
\end{gathered} \tag{1}$$

Исключая давление из уравнений (1), запишем систему уравнений для скоростей и плотностей

$$\frac{\partial \rho_j}{\partial t} + \frac{\partial \rho_j u_j}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \rho_g}{\partial t} + \frac{\partial \rho_g v}{\partial x} = 0,$$
$$\rho_g\Big(\frac{\partial v}{\partial t} + v\,\frac{\partial v}{\partial x}\Big) = -c_s^2\Big(\frac{\partial \rho_g}{\partial x} + \frac{\rho_g}{\rho_s(1-\theta)}\sum_{j=1}^N \frac{\partial \rho_j}{\partial x}\Big) + \sum_{j=1}^N \frac{\rho_j(u_j - v)}{t_j},$$
$$\rho_j\Big(\frac{\partial u_j}{\partial t} + u_j\,\frac{\partial u_j}{\partial x}\Big) = -\theta c_s^2\Big(\frac{1}{1-\theta}\,\frac{\partial \rho_g}{\partial x} + \frac{\rho_g}{\rho_s(1-\theta)^2}\sum_{j=1}^N \frac{\partial \rho_j}{\partial x}\Big) - \frac{\rho_j(u_j - v)}{t_j}, \tag{2}$$
$$\theta = \sum_{j=1}^N \theta_j, \qquad \theta_j = \frac{\rho_j}{\rho_s}.$$

Стационарное решение

$$\rho_g(x,t) = \rho_g^0, \qquad \rho_j(x,t) = \rho_j^0, \qquad v(x,t) = 0, \qquad u_j(x,t) = 0 \tag{3}$$

удовлетворяет системе (2). Поэтому можно предположить, что в малой окрестности решения (3) решения исходной системы и системы, полученной из исходной путем линеаризации на решении (3), будут близкими.

Решение линеаризованной задачи будем искать с помощью метода Фурье. Запишем решение системы (2) в виде

$$\begin{gathered}\rho_g(x,t) = \rho_g^0 + \delta\rho_g(x,t), \qquad \rho_j(x,t) = \rho_j^0 + \delta\rho_j(x,t),\\ v(x,t) = \delta v(x,t), \qquad u_j(x,t) = \delta u_j(x,t),\end{gathered} \tag{4}$$

где $\delta f(x,t)$ — малые по амплитуде отклонения от стационарного решения (3). Подставляя (4) в систему (2) и пренебрегая членами второго порядка малости, получаем линеаризованную систему с $2N+2$ уравнениями в частных производных:

$$\frac{\partial \delta\rho_j}{\partial t} + \rho_j^0\,\frac{\partial \delta u_j}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial \delta\rho_g}{\partial t} + \rho_g^0\,\frac{\partial \delta v}{\partial x} = 0,$$
$$\rho_g^0\,\frac{\partial \delta v}{\partial t} + c_s^2\Big(\frac{\partial \delta\rho_g}{\partial x} + \frac{\rho_g^0}{\rho_s(1-\theta)}\sum_{j=1}^N \frac{\partial \delta\rho_j}{\partial x}\Big) - \sum_{j=1}^N \frac{\rho_j^0(\delta u_j - \delta v)}{t_j} = 0, \tag{5}$$
$$\rho_j^0\,\frac{\partial \delta u_j}{\partial t} + \theta_j c_s^2\Big(\frac{1}{1-\theta}\,\frac{\partial \delta\rho_g}{\partial x} + \frac{\rho_g^0}{\rho_s(1-\theta)^2}\sum_{j=1}^N \frac{\partial \delta\rho_j}{\partial x}\Big) + \frac{\rho_j^0(\delta u_j - \delta v)}{t_j} = 0.$$

В системе (5) и далее θ_j, θ — величины, соответствующие стационарному решению: $\theta_j = \rho_j^0/\rho_s$, $\theta = \sum_{j=1}^N \dfrac{\rho_j^0}{\rho_s}$. Решения системы (5) находим в виде

$$\delta f = A\delta\hat{f}\,\mathrm{e}^{ikx-\omega t}, \tag{6}$$

где k — вещественное волновое число; ω — комплексная частота; $\delta\hat{f}$ — неизвестный коэффициент из пространства комплексных чисел; A — малая амплитуда возмущений.

Подставляя (6) в (5), получаем систему линейных уравнений для коэффициентов $\delta\hat{f}$:

$$ik\,\delta\hat{v} - \frac{\omega}{\rho_g^0}\,\delta\hat{\rho}_g = 0, \qquad ik\,\delta\hat{u}_j - \frac{\omega}{\rho_j^0}\,\delta\hat{\rho}_j = 0,$$

$$-\rho_g^0\omega\,\delta\hat{v}+c_s^2\Big(ik\,\delta\hat{\rho}_g+ik\,\frac{\rho_g^0}{\rho_s(1-\theta)}\sum_{j=1}^{N}\delta\hat{\rho}_j\Big)-\sum_{j=1}^{N}\frac{\rho_j^0(\delta\hat{u}_j-\delta\hat{v})}{t_j}=0, \tag{7}$$

$$-\rho_j^0\omega\,\delta\hat{u}_j+\theta_j c_s^2 ik\Big(\frac{1}{1-\theta}\,\delta\hat{\rho}_g+\frac{\rho_g^0}{\rho_s(1-\theta)^2}\sum_{j=1}^{N}\delta\hat{\rho}_j\Big)+\frac{\rho_j^0(\delta\hat{u}_j-\delta\hat{v})}{t_j}=0.$$

Система (7) имеет нетривиальные решения тогда и только тогда, когда ее определитель равен нулю:

$$\begin{vmatrix}
-\omega\rho_g^0+\sum\limits_{j=1}^{N}\dfrac{\rho_j^0}{t_j} & -\dfrac{\rho_1^0}{t_1} & \dots & -\dfrac{\rho_N^0}{t_N} & c_s^2 ik & \dfrac{c_s^2 ik\rho_g^0}{\rho_s(1-\theta)} & \dots & \dfrac{c_s^2 ik\rho_g^0}{\rho_s(1-\theta)}\\
-\dfrac{\rho_1^0}{t_1} & -\omega\rho_1^0+\dfrac{\rho_1^0}{t_1} & \dots & 0 & \dfrac{\theta_1 c_s^2 ik}{1-\theta} & \dfrac{\theta_1 c_s^2 ik\rho_g^0}{\rho_s(1-\theta)^2} & \dots & \dfrac{\theta_1 c_s^2 ik\rho_g^0}{\rho_s(1-\theta)^2}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
-\dfrac{\rho_N^0}{t_N} & 0 & \dots & -\omega\rho_N^0+\dfrac{\rho_N^0}{t_N} & \dfrac{\theta_N c_s^2 ik}{1-\theta} & \dfrac{\theta_N c_s^2 ik\rho_g^0}{\rho_s(1-\theta)^2} & \dots & \dfrac{\theta_N c_s^2 ik\rho_g^0}{\rho_s(1-\theta)^2}\\
ik & 0 & \dots & 0 & -\dfrac{\omega}{\rho_g^0} & 0 & \dots & 0\\
0 & ik & 0 & \dots & 0 & -\dfrac{\omega}{\rho_1^0} & \dots & 0\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & \dots & \dots & ik & 0 & \dots & \dots & -\dfrac{\omega}{\rho_N^0}
\end{vmatrix}=0. \tag{8}$$

Таким образом получаем дисперсионное соотношение, связывающее величины k и ω. Подставляя частоты в (8), решаем систему, выражая все искомые величины $\delta\hat{f}$ через $\delta\hat{\rho}_g$. Подставляя эти величины в (6), добавляя стационарное решение и отделяя действительную часть, получаем решение линеаризованной системы.

Для вычисления комплексной частоты и последующей генерации тестовых решений авторами настоящей работы создан вычислительный код в среде Scilab, в котором в качестве начальных данных задавались число фракций N, стационарное решение ρ_g^0, ρ_j^0, амплитуда отклонения возмущений от стационарного решения, истинная плотность ρ_s, времена релаксации, скорость звука в газе, волновое число, а также отрезок $[a, b]$ и момент времени для выдачи решений в файлы. В коде использовались стандартные процедуры для вычисления определителя матрицы, корней полинома и решения системы линейных алгебраических уравнений [24]. Ранее авторами был разработан код для решения аналогичной задачи для среды с монодисперсной твердой фазой [23].

Рассмотрим решения, найденные с использованием разработанной программы. В табл. 1 приведены данные, полученные для задачи с тремя фракциями пыли. Найденные константы для вычисления возмущений плотности и скорости необходимо подставить в формулу (6) и прибавить к ним стационарные значения величин, также приведенные в табл. 1. На рис. 1 приведены функции плотности и скорости газа для начального момента времени $t = 0$ и времени $t = 0{,}6$. Видно, что акустическая волна движется вправо и ее амплитуда не меняется. На рис. 2 приведены функции плотности и скорости пылевых фракций в момент времени $t = 0{,}6$. Видно, что акустические волны движутся с той же скоростью, что и в газе. При этом скорость нагруженного пылью газа становится меньше, так как скорость звука в газе задана равной единице. В табл. 2, 3 приведены два решения

Таблица 1

Начальные данные для тестового решения с тремя фракциями пыли при $\omega = 0{,}008\,098\,9 + 5{,}924\,186\,1i$, $A = 10^{-2}$, $c_s = 1$, $\rho_s = 4$

j	ρ_j^0	$\delta\hat{\rho}_j$	$\delta\hat{v}_j$	t_j
g	1,000	1,000 000 0	$0{,}942\,863\,5 - 0{,}001\,289\,0i$	—
1	0,333	$0{,}332\,817\,5 + 0{,}009\,846\,3i$	$0{,}941\,442\,4 + 0{,}026\,564\,3i$	10^{-2}
2	0,333	$0{,}333\,334\,2 + 0{,}000\,987\,6i$	$0{,}942\,869\,9 + 0{,}001\,504\,6i$	10^{-3}
3	0,333	$0{,}333\,333\,9 + 0{,}000\,098\,8i$	$0{,}942\,865\,6 - 0{,}001\,009\,6i$	10^{-4}

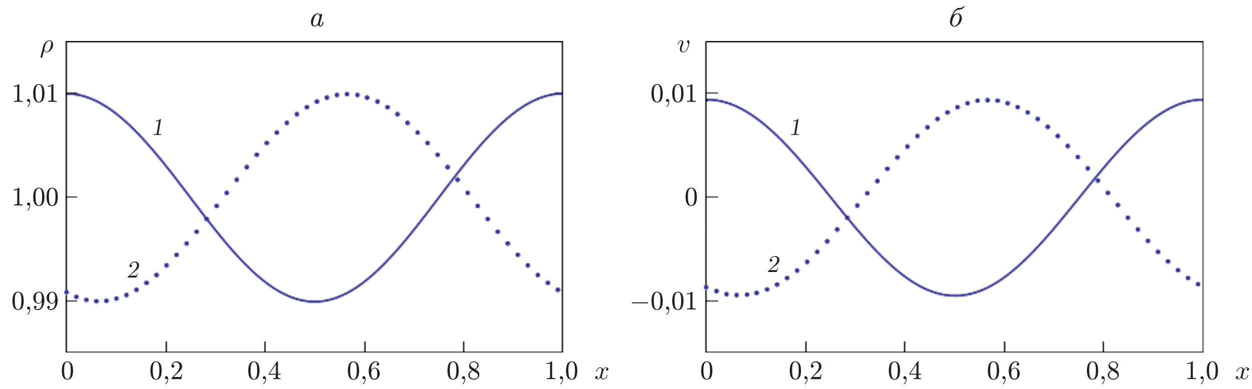

Рис. 1. Функции плотности (*а*) и скорости (*б*) газа при начальных данных, указанных в табл. 1, и различных значениях времени:
1 — $t = 0$, *2* — $t = 0{,}6$

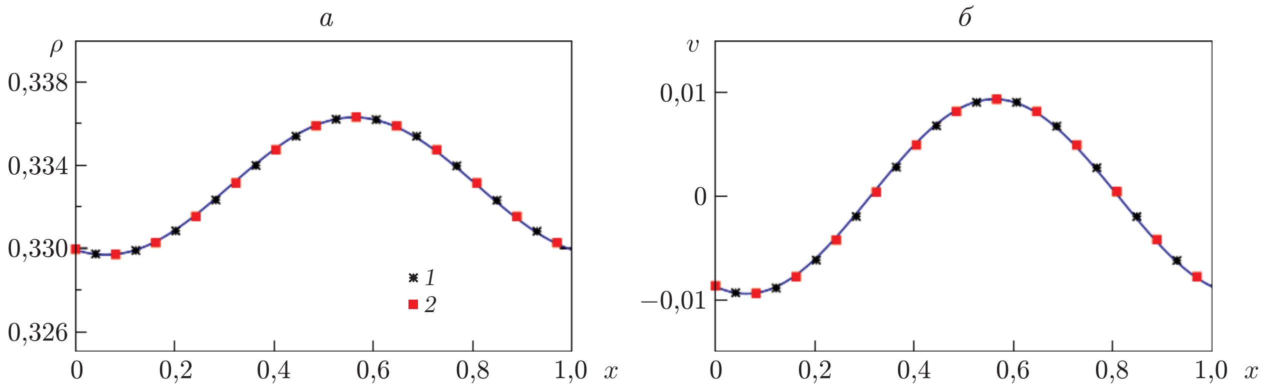

Рис. 2. Функции плотности (*а*) и скорости (*б*) частиц пыли при $t = 0{,}6$ для трех фракций пыли, указанных в табл. 1:
линия — первая фракция, *1* — вторая фракция, *2* — третья фракция

Таблица 2

Начальные данные для тестового решения 1 с двумя фракциями пыли при $\omega = 0{,}019\,014 + 89{,}733\,14i$, $A = 10^{-2}$, $c_s = 1$, $\rho_s = 0{,}04$

j	ρ_j^0	$\delta\hat{\rho}_j$	$\delta\hat{v}_j$	t_j
g	1,00	1,000 000 0	$14{,}281\,473 - 0{,}003\,026\,2i$	—
1	0,02	$1{,}010\,000\,1 - 0{,}000\,444\,5i$	$721{,}214\,370 - 0{,}470\,193\,2i$	10^4
2	0,01	$0{,}010\,000\,1 - 0{,}000\,444\,2i$	$14{,}281\,489 - 0{,}637\,379\,3i$	10^{-5}

Таблица 3

Начальные данные для тестового решения 2 с двумя фракциями пыли при $\omega = 0{,}000\,034\,2 + 109{,}009\,19i$, $A = 10^{-2}$, $c_s = 1$, $\rho_s = 0{,}04$

j	ρ_j^0	$\delta\hat{\rho}_j$	$\delta\hat{v}_j$	t_j
g	1,00	1,000 000 0	$17{,}349\,352 - 0{,}000\,005\,4i$	—
1	0,02	$1{,}999\,998\,3 - 0{,}000\,005\,6i$	$173{,}933\,700 - 0{,}005\,428\,0i$	10^4
2	0,01	$0{,}999\,999\,1 - 0{,}000\,002\,0i$	$1734{,}933\,700 - 0{,}004\,009\,9i$	10^5

для задачи с двумя фракциями пыли при различных значениях времени релаксации: в первом решении одно число релаксации достаточно велико, а второе очень мало, во втором случае оба числа релаксации выбраны большими. На рис. 3, 4 видно, что волны движутся вправо с неизменной амплитудой.

2. Среда, содержащая две фракции пыли с ненулевой объемной долей. Случай с одной фракцией пыли рассматривался в работе [23], поэтому исследуем случай $N = 2$. В этом случае линеаризованная система для величин $\delta\hat{f}$ образует матрицу

$$\begin{pmatrix} -\omega\rho_g^0 + \dfrac{\rho_1^0}{t_1} + \dfrac{\rho_2^0}{t_2} & -\dfrac{\rho_1^0}{t_1} & -\dfrac{\rho_2^0}{t_2} & c_s^2 ik & \dfrac{c_s^2 ik\rho_g^0}{\rho_s(1-\theta)} & \dfrac{c_s^2 ik\rho_g^0}{\rho_s(1-\theta)} \\ -\dfrac{\rho_1^0}{t_1} & -\omega\rho_1^0 + \dfrac{\rho_1^0}{t_1} & 0 & \dfrac{\theta_1 c_s^2 ik}{1-\theta} & \dfrac{\theta_1 c_s^2 ik\rho_g^0}{\rho_s(1-\theta)^2} & \dfrac{\theta_1 c_s^2 ik\rho_g^0}{\rho_s(1-\theta)^2} \\ -\dfrac{\rho_2^0}{t_2} & 0 & -\omega\rho_2^0 + \dfrac{\rho_2^0}{t_2} & \dfrac{\theta_2 c_s^2 ik}{1-\theta} & \dfrac{\theta_2 c_s^2 ik\rho_g^0}{\rho_s(1-\theta)^2} & \dfrac{\theta_2 c_s^2 ik\rho_g^0}{\rho_s(1-\theta)^2} \\ ik & 0 & 0 & -\dfrac{\omega}{\rho_g^0} & 0 & 0 \\ 0 & ik & 0 & 0 & -\dfrac{\omega}{\rho_1^0} & 0 \\ 0 & 0 & ik & 0 & 0 & -\dfrac{\omega}{\rho_2^0} \end{pmatrix}. \qquad (9)$$

Приравнивая к нулю определитель матрицы (9) и используя программу Wolfram Mathematica, получаем дисперсионное соотношение

$$\omega^6 - \omega^5\Big(\frac{1+\varepsilon_1}{t_1} + \frac{1+\varepsilon_2}{t_2}\Big) + \omega^4\Big(c_s^2k^2\Big(\frac{\theta^2}{\varepsilon(1-\theta)^2} + 1\Big) + \frac{1+\varepsilon}{t_1t_2}\Big) -$$
$$- \frac{\omega^3 c_s^2k^2}{t_1}\Big(1 + \frac{\theta_2\theta}{\varepsilon(1-\theta)^2} + \frac{\theta_1}{1-\theta} + \frac{\theta_1}{(1-\theta)^2}\Big) -$$
$$- \frac{\omega^3 c_s^2k^2}{t_2}\Big(1 + \frac{\theta_1\theta}{\varepsilon(1-\theta)^2} + \frac{\theta_2}{1-\theta} + \frac{\theta_2}{(1-\theta)^2}\Big) + \omega^2\,\frac{c_s^2k^2}{(1-\theta)^2t_1t_2} = 0, \qquad (10)$$

где $\varepsilon = (\rho_1^0 + \rho_2^0)/\rho_g^0$; $\varepsilon_j = \rho_j^0/\rho_g^0$.

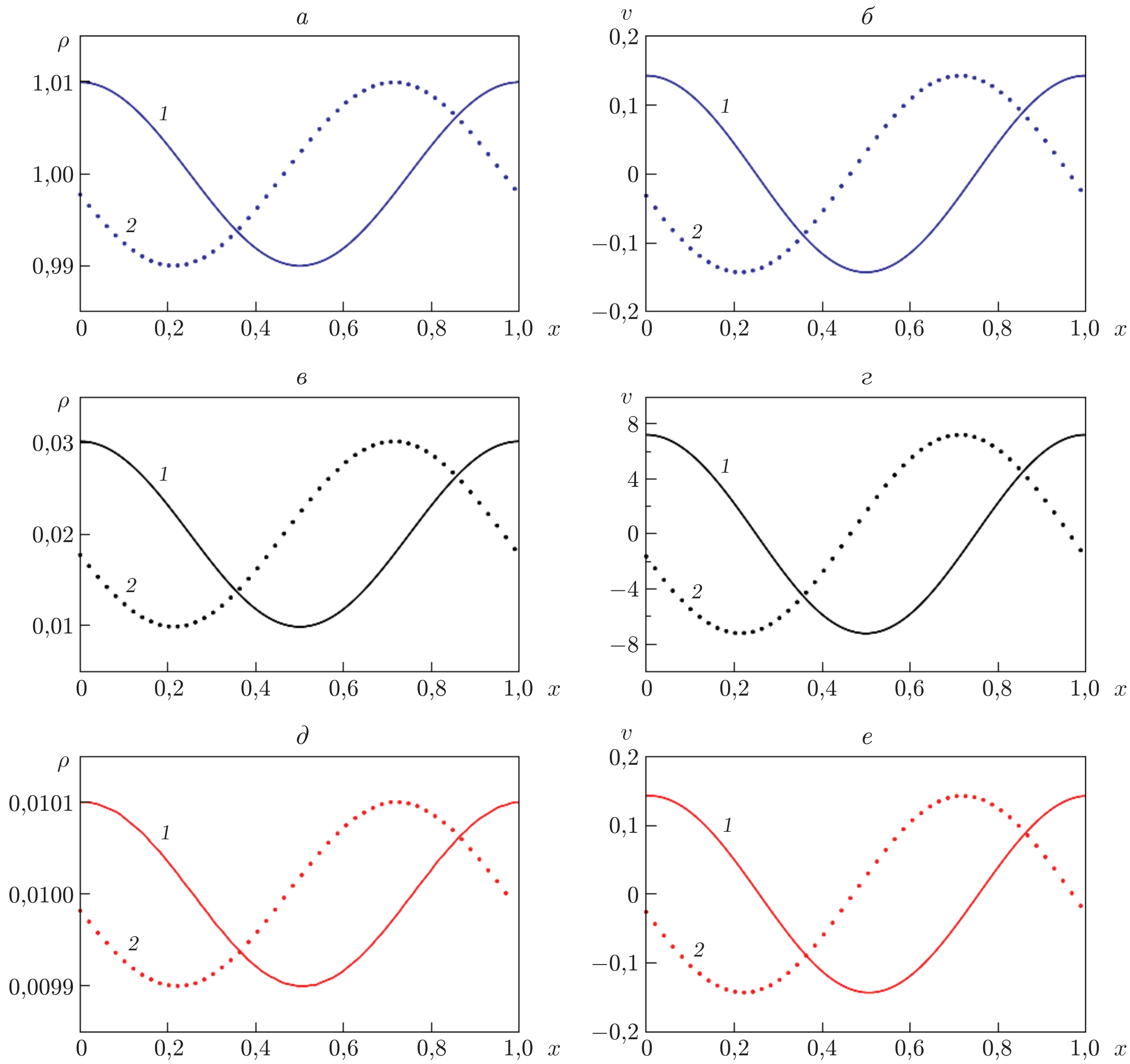

Рис. 3. Решение 1 задачи для двух фракций пыли с временами релаксации $t_1 = 10^4$, $t_2 = 10^{-5}$ при начальных данных, указанных в табл. 2, и различных значениях времени:

а, в, д — функции плотности, *б, г, е* — функции скорости; *а, б* — газ, *в, г* — первая фракция пыли, *д, е* — вторая фракция пыли; *1* — $t = 0$, *2* — $t = 0{,}05$

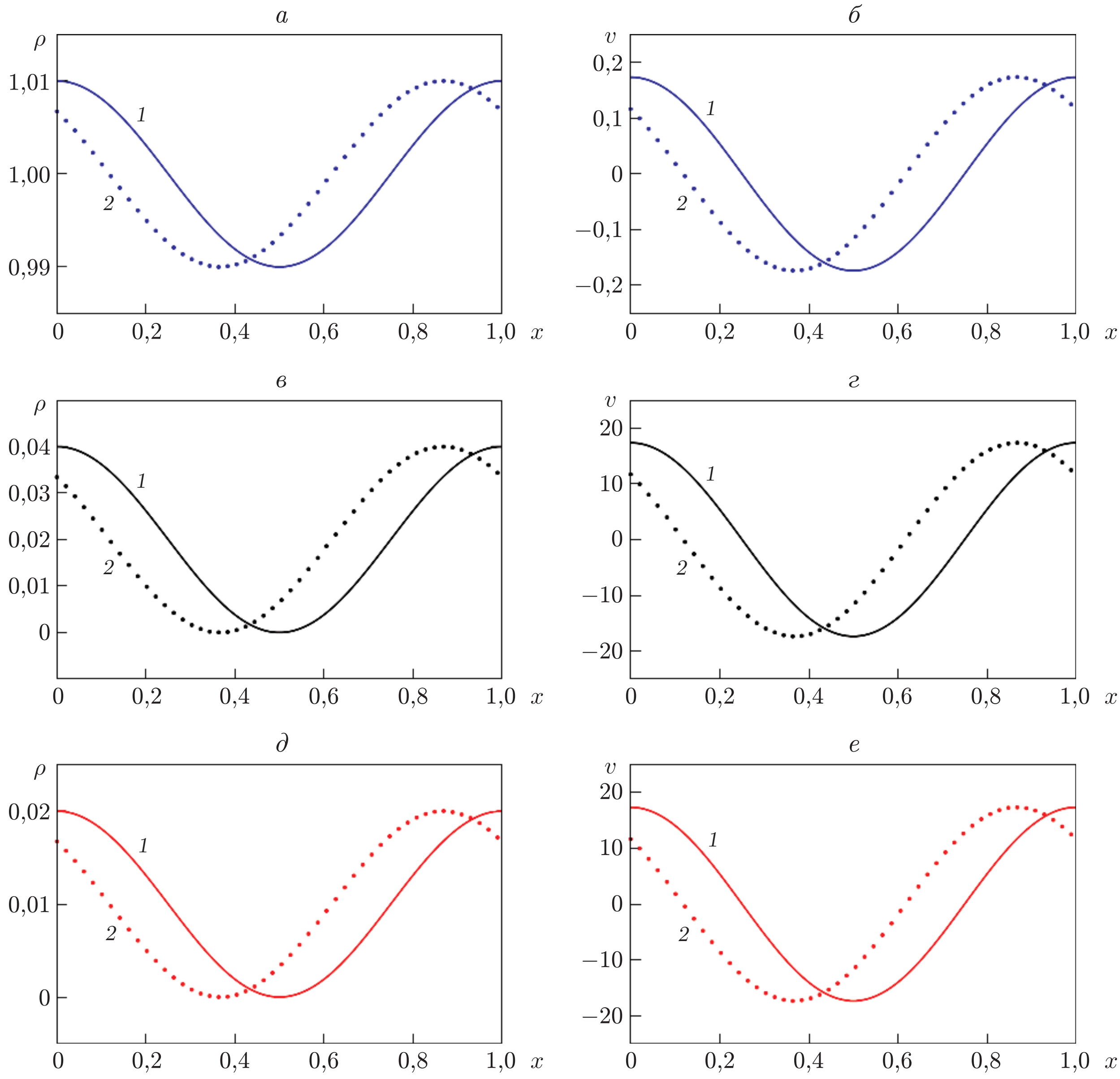

Рис. 4. Решение 2 задачи для двух фракций пыли с временами релаксации $t_1 = 10^4$, $t_2 = 10^5$ при начальных данных, указанных в табл. 3, и различных значениях времени (обозначения те же, что на рис. 3)

Рассмотрим случай, когда t_1, t_2 стремятся к нулю. Оставим в дисперсионном соотношении только те коэффициенты, которые стремятся к бесконечности быстрее остальных (эти коэффициенты пропорциональны $1/(t_1 t_2)$), остальными будем пренебрегать. Тогда получаем уравнение

$$\omega^4(1+\varepsilon) + \omega^2 c_s^2 k^2/(1-\theta)^2 = 0. \tag{11}$$

Из (11) находим комплексную частоту в этом предельном случае:

$$\omega_{1,2} = 0, \qquad \omega_{3,4} = \pm i c_s k/\sqrt{(1+\varepsilon)(1-\theta)^2}.$$

Устремляя в (10) t_1 и t_2 к бесконечности, преобразуем это уравнение к уравнению с положительными коэффициентами

$$\omega^6 + \omega^4 (kc_s)^2 (1 + \theta^2/(\varepsilon(1-\theta)^2)) = 0,$$

которое имеет два комплексно-сопряженных ненулевых корня и корень, равный нулю, кратности четыре:

$$\omega_{1,2,3,4} = 0, \qquad \omega_{5,6} = \pm i c_s k \sqrt{1 + \theta^2/(\varepsilon(1-\theta)^2)}.$$

При бесконечно малом времени t_2 и бесконечно большом t_1 в уравнении (10) оставим коэффициенты, которые пропорциональны $1/t_2$. Получаем уравнение

$$\omega^5(1+\varepsilon_2) + \omega^3 (kc_s)^2 \Big(1 + \frac{\theta_1\theta}{\varepsilon(1-\theta)^2} + \frac{\theta_2}{1-\theta} + \frac{\theta_2}{(1-\theta)^2}\Big) = 0$$

и вычисляем его корни

$$\omega_{1,2,3} = 0, \qquad \omega_{4,5} = \pm i c_s k \sqrt{\frac{1}{1+\varepsilon_2}\Big(1 + \frac{\theta_1\theta}{\varepsilon(1-\theta)^2} + \frac{\theta_2}{1-\theta} + \frac{\theta_2}{(1-\theta)^2}\Big)}.$$

В этих предельных случаях решения сохраняют амплитуду вследствие равенства нулю действительной части ω и движутся влево или вправо в зависимости от знака мнимой части.

3. Решения линеаризованной системы для N фракций пыли в предельных случаях. Для случая с произвольным количеством фракций пыли также исследованы частоты для двух предельных случаев $t_j \to 0$, $j = 1, \ldots, N$ и $t_j \to \infty$, $j = 1, \ldots, N$. В случае когда все времена релаксации стремятся к нулю, комплексно-сопряженные волновые числа являются корнями уравнения

$$\omega^{N+2}(1+\varepsilon) + \omega^N c_s^2 k^2/(1-\theta)^2 = 0$$

и имеют вид

$$\omega_k = 0, \quad k = 1, \ldots, N, \qquad \omega_{N+1,N+2} = \pm i c_s k/\sqrt{(1+\varepsilon)(1-\theta)^2}.$$

Введем обозначение $c_s^* = c_s \,/\, \sqrt{(1+\varepsilon)(1-\theta)^2}$ и запишем решение системы (5) для данного случая:

$$\rho_g(x,t) = \rho_g^0 + A\cos(kx - kc_s^* t), \qquad v(x,y) = (c_s^*/\rho_g^0) A \cos(kx - kc_s^* t),$$
$$\rho_j(x,t) = \rho_j^0 + A\varepsilon_j \cos(kx - kc_s^* t), \qquad u_j(x,y) = (c_s^*/\rho_g^0) A \cos(kx - kc_s^* t).$$

Для случая бесконечных чисел релаксации комплексно-сопряженные волновые числа находятся из соотношения

$$\omega^{2N+2} + \omega^{2N} c_s^2 k^2 (\theta^2/(\varepsilon(1-\theta)^2) + 1) = 0,$$

корнями которого являются

$$\omega_p = 0, \quad p = 1, \ldots, 2N, \qquad \omega_{2N+1,2N+2} = \pm i c_s k \sqrt{\theta^2/(\varepsilon(1-\theta)^2) + 1}.$$

Введем обозначение $c_s^* = c_s\sqrt{\theta^2/(\varepsilon(1-\theta)^2)+1}$, тогда решение системы (5) для положительного волнового числа имеет вид

$$\rho_g(x,t) = \rho_g^0 + A\cos(kx - kc_s^*t), \qquad v(x,y) = \frac{c_s^*}{\rho_g^0} A\cos(kx - kc_s^*t),$$

$$\rho_j(x,t) = \rho_j^0 + \frac{\theta_j}{1-\theta} A\cos(kx - kc_s^*t), \qquad u_j(x,y) = \frac{c_s^*\theta_j}{\rho_g^0\varepsilon_j(1-\theta)} A\cos(kx - kc_s^*t).$$

Заключение. В работе рассмотрена задача о распространении звуковых волн малой амплитуды в среде, состоящей из несущего изотермического газа и твердых полидисперсных частиц. Задача сформулирована с использованием двухжидкостной модели среды с общим давлением, описывающей взаимный обмен импульсами между газом и каждой фракцией дисперсной фазы, а также плавучесть дисперсной фазы. Приведен метод построения эталонного решения, соответствующего бегущей монохроматической волне в среде с произвольным количеством пылевых фракций и произвольными временами скоростной релаксации. Этот метод генерации решения реализован в виде программного кода `DustyWavePolydispVolumeDust.sce`. Генерируемые решения можно использовать в качестве эталонных при верификации программ численного моделирования динамики двухфазных полидисперсных сред, а также при исследовании асимптотических, диссипативных и дисперсионных свойств новых численных методов. Также в работе определены режимы, в которых амплитуда распространяющихся волн постоянна. Для бидисперсной твердой фазы выделены три таких предельных режима: 1) оба значения времени релаксации стремятся к нулю; 2) оба значения времени релаксации стремятся к бесконечности; 3) одно время релаксации стремится к нулю, другое — к бесконечности. Для каждого режима найдена соответствующая скорость распространения звуковых волн. Режимы 1 и 2 обобщены на случай полидисперсной твердой фазы с произвольным количеством пылевых фракций, для этих режимов приведено аналитическое представление решения, соответствующего бегущей монохроматической волне с постоянной амплитудой.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Stoyanovskaya O. P., Davydov M. N., Arendarenko M. S., et al.** Fast method to simulate dynamics of two-phase medium with intense interaction between phases by smoothed particle hydrodynamics: Gas-dust mixture with polydisperse particles, linear drag, one-dimensional tests // J. Comput. Phys. 2021. V. 430. 110035.
2. **Киселев С. П.** Ударно-волновые процессы в двухкомпонентных и двухфазных средах / С. П. Киселев, Г. А. Руев, А. П. Трунев, В. М. Фомин, М. Ш. Шавалиев. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 1992.
3. **Klebanov L.** On the hyperbolicity, stability and correctness of the Cauchy problem for the system of equations of two-speed motion of two-phase media // J. Appl. Math. Mech. 1982. V. 46. P. 66–74.
4. **Крайко А. Н.** О корректности задачи Коши для двухжидкостной модели течения смеси газа с частицами // Прикл. математика и механика. 1982. Т. 46, № 3. С. 420–428.
5. **Киселев С. П., Фомин В. М.** Континуально-дискретная модель для смеси газ — твердые частицы при малой объемной концентрации частиц // ПМТФ. 1986. № 2. С. 93–101.
6. **Porth O., Xia C., Hendrix T., et al.** MPI-AMRVAC for solar and astrophysics // Astrophys. J. Suppl. Ser. 2014. V. 214, N 1. 4.
7. **Yang C.-C., Johansen A.** Integration of particle-gas systems with stiff mutual drag interaction // Astrophys. J. Suppl. Ser. 2016. V. 224, N 2. 39.

8. **McKinnon R., Vogelsberger M., Torrey P., et al.** Simulating galactic dust grain evolution on a moving mesh // Monthly Notices Roy. Astronom. Soc. 2018. V. 478. P. 2851–2886.
9. **Riols A., Lesur G.** Dust settling and rings in the outer regions of protoplanetary discs subject to ambipolar diffusion // Astronomy Astrophys. 2018. V. 617. A117.
10. **Vorobyov E. I., Akimkin V., Stoyanovskaya O., et al.** Early evolution of viscous and self-gravitating circumstellar disks with a dust component // Astronomy Astrophys. 2018. V. 614. A98. DOI: 10.1051/0004-6361/201731690.
11. **Benítez-Llambay P., Krapp L., Pessah M.** Asymptotically stable numerical method for multispecies momentum transfer: gas and multifluid dust test suite and implementation in FARGO3D // Astrophys. J. Suppl. Ser. 2019. V. 241, N 2. 25. DOI: 10.3847/1538-4365/ab0a0e.
12. **Lebreuilly U., Commerçon B., Laibe G.** Small dust grain dynamics on adaptive mesh refinement grids. 1. Methods // Astronomy Astrophys. 2019. V. 626. A96.
13. **Moseley E. R., Squire J., Hopkins P. F.** Non-linear evolution of instabilities between dust and sound waves // Monthly Notices Roy. Astronom. Soc. 2019. V. 489. P. 325–338.
14. **Laibe G., Price D. J.** Dusty gas with smoothed particle hydrodynamics. 1. Algorithm and test suite // Monthly Notices Roy. Astronom. Soc. 2012. V. 420. P. 2345–2364.
15. **Laibe G., Price D. J.** Dusty gas with one fluid in smoothed particle hydrodynamics // Monthly Notices Roy. Astronom. Soc. 2014. V. 440. P. 2147–2163.
16. **Lorén-Aguilar P., Bate M. R.** Two-fluid dust and gas mixtures in smoothed particle hydrodynamics: a semi-implicit approach // Monthly Notices Roy. Astronom. Soc. 2014. V. 443. P. 927–945.
17. **Booth R. A., Sijacki D., Clarke C. J.** Smoothed particle hydrodynamics simulations of gas and dust mixtures // Monthly Notices Roy. Astronom. Soc. 2015. V. 452. P. 3932–3947.
18. **Hubber D. A., Rosotti G. P., Booth R. A.** GANDALF — graphical astrophysics code for N-body dynamics and lagrangian fluids // Monthly Notices Roy. Astronom. Soc. 2018. V. 473. P. 1603–1632.
19. **Stoyanovskaya O. P., Glushko T. A., Snytnikov N. V., Snytnikov V. N.** Two-fluid dusty gas in smoothed particle hydrodynamics: Fast and implicit algorithm for stiff linear drag // Astronomy Comput. 2018. V. 25. P. 25–37.
20. **Mentiplay D., Price D. J., Pinte C., Laibe G.** A smoothed particle hydrodynamics algorithm for multigrain dust with separate sets of particles // Monthly Notices Roy. Astronom. Soc. 2020. V. 499. P. 3806–3818.
21. **Marble F. E.** Dynamics of dusty gases // Annual Rev. Fluid Mech. 1970. N 2. P. 397–446. DOI: 10.1146/annurev.fl.02.010170.002145.
22. **Laibe G., Price D. J.** DUSTYBOX and DUSTYWAVE: two test problems for numerical simulations of two-fluid astrophysical dust-gas mixtures // Monthly Notices Roy. Astronom. Soc. 2011. V. 418. P. 1491–1497. DOI: 10.1111/j.1365-2966.2011.19291.x.
23. **Markelova T. V., Stoyanovskaya O. P., Arendarenko M. S., et al.** Acoustic waves in monodisperse and polydisperse gas-dust mixtures with intense momentum transfer between phases // J. Phys.: Conf. Ser. 2020. V. 1666. 012050.
24. `DustyWavePolydispVolumeDust.sce.` [Электрон. ресурс]. Режим доступа: https://github.com/MultiGrainSPH/1D_Dust_DS/tree/master/DustyWave.

Поступила в редакцию 30/IV 2021 г.,
после доработки — 20/V 2021 г.
Принята к публикации 31/V 2021 г.