

УДК 517.958

## Новые семейства точных решений двумерного уравнения эйконала для случая, когда скорость в среде зависит только от одной координаты

Е.Д. Москаленский

Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

E-mail: edm@omzg.sccc.ru

**Москаленский Е.Д.** Новые семейства точных решений двумерного уравнения эйконала для случая, когда скорость в среде зависит только от одной координаты // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2018. — Т. 21, № 3. — С. 259–271.

В статье предложен способ получения решений двумерного уравнения эйконала для случая, когда скорость волны в среде зависит от одной пространственной координаты. Приведены примеры, в которых, за счёт подбора общего вида решения, удаётся свести исходное уравнение к одному или нескольким обыкновенным дифференциальным уравнениям, поддающимся решению. Приведены графики, показывающие динамику распространения волны для каждого из полученных решений.

**DOI:** 10.15372/SJNM20180303

**Ключевые слова:** распространение волн, фронт волны, уравнение эйконала.

**Moskalensky E.D.** The novel class of exact solutions of the two-dimensional eikonal equation when the velocity in a medium depends on one spatial coordinate // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2018. — Vol. 21, № 3. — P. 259–271.

The method to obtain solutions of the two-dimensional eikonal equation has been developed for the case when the velocity of wave propagation in a medium depends only on one spatial coordinate. We present several examples, where the initial problem is transformed to one or several ordinary differential equations using the substitution of the solution into a suitable general form. The dynamics of the wave propagation for each solution obtained is illustrated.

**Keywords:** wave propagation, front of wave, eikonal equation.

---

В статье рассматривается двумерное уравнение эйконала

$$f_x^2 + f_y^2 = \frac{1}{v^2}, \quad (1)$$

где  $v(x, y)$  — скорость в среде. Это уравнение описывает кинематику распространения волны в среде. Функцию  $f(x, y)$  можно трактовать как время прихода волны в точку с координатами  $x, y$ , фронт волны в момент времени  $t$  описывается уравнением  $f(x, y) = t$ , а уравнение  $f(x, y) = 0$  задаёт положение источников возмущения.

Решается уравнение (1) численными методами, тестирование которых требует знания точных решений уравнения (1) для достаточно полного набора типов зависимости скорости от координат [2]. Однако, как отмечено в [1], набор известных явных решений уравнения (1) крайне мал, и эти решения не подчинены никакой системе. С ещё большим основанием эти слова можно отнести к важному для практики случаю, когда скорость  $v$  зависит только от одной пространственной координаты. Отметим также, что

во многих теоретических исследованиях, связанных с распространением волн, рассматриваются как раз среды указанного типа [3, 4].

Итак, пусть  $v = v(y)$ , тогда  $(f_x^2 + f_y^2)_x = 0$ , или

$$f_x f_{xx} + f_y f_{xy} = 0. \quad (2)$$

Будем искать частные решения этого уравнения, пытаясь подобрать общий вид функции  $f$ . Приведём примеры, когда такой подход приводит к цели.

1. Ищем решение уравнения (2) в виде  $f = T + \ln(MN + 1)$ , где  $T = T(y)$ ,  $M = M(x)$ ,  $N = N(y)$ . После подстановки в (2) и упрощений получим

$$N^2((M''M - M'^2)N + M'') + ((NT' + N')M + T')N' = 0. \quad (3)$$

1а. Положим  $M = \operatorname{ch} kx$ , где  $k$  — постоянная, тогда (3) приводится к виду

$$N^2((k^2 \operatorname{ch}^2 kx - k^2 \operatorname{sh}^2 kx)N + k^2 \operatorname{ch} kx) + ((NT' + N') \operatorname{ch} kx + T')N' = 0,$$

или

$$k^2 N^3 + k^2 N^2 \operatorname{ch} kx + (NT' + N')N' \operatorname{ch} kx + N'T' = 0.$$

Это уравнение выполняется, если

$$\begin{cases} k^2 N^3 + N'T' = 0, \\ k^2 N^2 + (NT' + N')N' = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы получаем  $N'T' = -k^2 N^3$  и после подстановки во второе уравнение имеем  $N'^2 = k^2 N^4 - k^2 N^2$ . Отсюда  $N' = kN\sqrt{N^2 - 1}$  и  $N = \frac{1}{\cos ky}$ . Подставив это выражение в первое уравнение системы вместо  $N$ , получим  $T' = -\frac{k}{\sin ky \cos ky}$ , и окончательно  $T = -\ln \operatorname{tg} ky$ .

Когда  $T$ ,  $M$  и  $N$  найдены, тогда  $f = -\ln \operatorname{tg} ky + \ln \left( m \frac{\operatorname{ch} kx}{\cos ky} + 1 \right)$ , и наконец,

$$f = \ln \frac{\operatorname{ch} kx + \cos ky}{\sin ky}.$$

Имеем далее

$$f_x = \frac{k \operatorname{sh} kx}{\operatorname{ch} kx + \cos ky}, \quad f_y = \frac{-k(1 + \cos ky \operatorname{ch} kx)}{\sin ky (\operatorname{ch} kx + \cos ky)}$$

и

$$\begin{aligned} f_x^2 + f_y^2 &= \frac{k^2}{\sin^2 ky (\operatorname{ch} kx + \cos ky)^2} (\sin^2 ky \operatorname{sh}^2 kx + (1 + \cos ky \operatorname{ch} kx)^2) \\ &= \frac{k^2}{\sin^2 ky (\operatorname{ch} kx + \cos ky)^2} (\operatorname{sh}^2 kx + \cos^2 ky + 1 + 2 \cos ky \operatorname{ch} kx) \\ &= \frac{k^2}{\sin^2 ky (\operatorname{ch} kx + \cos ky)^2} (\operatorname{ch} kx + \cos ky)^2 = \frac{k^2}{\sin^2 ky}. \end{aligned}$$

Отсюда следует, что координатная плоскость разбивается прямыми  $y = k\pi$  на полосы, в каждой из которых распространение волны происходит независимо. Скорость волны в каждой из таких полос определяется по формуле  $v = \frac{1}{k} |\sin ky|$ . На рисунке 1 приведён график функции  $v$  для одной из таких полос, а на рис. 2. — динамика распространения волны на поверхности такой полосы.

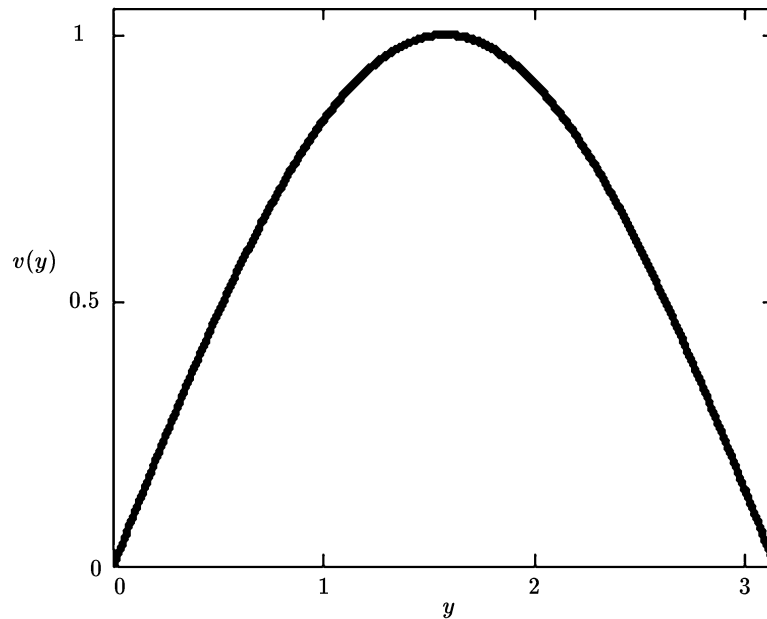


Рис. 1. К примеру 1а. График скорости  $v$ ,  $k = 1$

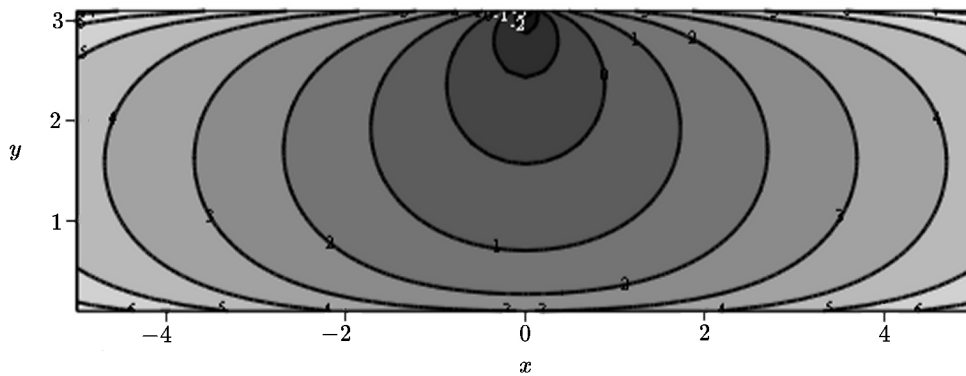


Рис. 2. К примеру 1а. Динамика распространения волны

16. Пусть  $M = \cos kx$ . После подстановки в (3) и упрощений получаем  $-k^2 N^3 - k^2 N^2 \cos kx + (NN'T' + N'^2) \cos kx + N'T' = 0$ .

Отсюда

$$\begin{cases} -k^2 N^3 + N'T' = 0, \\ -k^2 N^2 + NN'T' + N'^2 = 0. \end{cases}$$

Решая систему, получим  $N = \frac{1}{\operatorname{ch} ky}$ ;  $T = -\ln \operatorname{th} ky$ . Тогда

$$f = \ln \frac{\cos kx + \operatorname{ch} ky}{\operatorname{sh} ky}.$$

Видно, что функция периодическая по переменной  $x$  с периодом  $\frac{2\pi}{k}$ , поэтому все особенности распространения волны можно выяснить, изучая функцию  $f$  внутри полосы  $0 \leq x \leq \frac{2\pi}{k}$ .

Имеем далее

$$f_x = -\frac{k \sin kx \operatorname{sh} ky}{\operatorname{sh} ky (\cos kx + \operatorname{ch} ky)}, \quad f_y = -\frac{k(1 + \operatorname{ch} ky \cos kx)}{\operatorname{sh} ky (\cos kx + \operatorname{ch} ky)},$$

тогда

$$\begin{aligned} f_x^2 + f_y^2 &= \frac{k^2}{\operatorname{sh}^2 ky (\cos kx + \operatorname{ch} ky)^2} (\sin^2 kx \operatorname{sh}^2 ky + (1 + \operatorname{ch} ky \cos kx)^2) \\ &= \frac{k^2}{\operatorname{sh}^2 ky (\cos kx + \operatorname{ch} ky)^2} (\operatorname{ch}^2 ky - \sin^2 kx + 1 + 2 \operatorname{ch} ky \cos kx) = \frac{k^2}{\operatorname{sh}^2 ky}. \end{aligned}$$

Значит,  $v = \frac{1}{k} |\operatorname{sh} ky|$ .

На рис. 3. показан график функции  $v$  для  $k = 0.5$ , а на рис. 4. — динамика распространения волны.

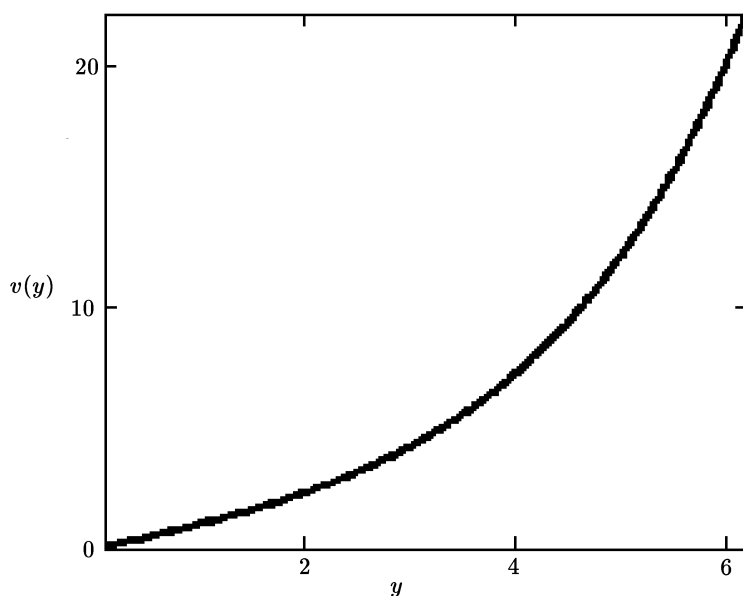


Рис. 3. К примеру 16. График скорости  $v$ ,  $k = 0.5$

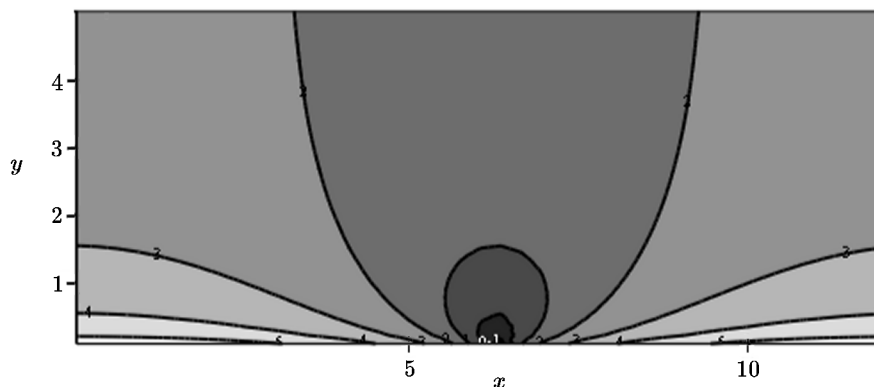


Рис. 4. К примеру 16. Динамика распространения волны

**1в.** Пусть  $M = x^2 + b$ , где  $b$  — постоянная. Подстановка в (3) приводит к уравнению

$$2bN^3 - 2N^3x^2 + 2N^2 + (NN'T' + N'^2)x^2 + (NN'T' + N'^2)b + N'T' = 0,$$

что, в свою очередь, приводит к системе:

$$\begin{cases} -2N^3 + NN'T' + N'^2 = 0, \\ 2bN^3 + 2N^2 + (NN'T' + N'^2)b + N'T' = 0. \end{cases}$$

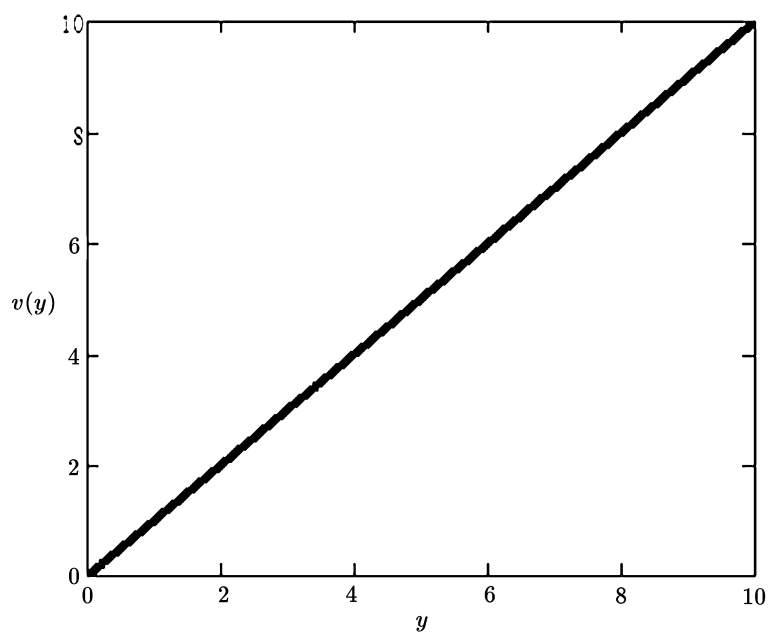
Опуская подробности, приведём окончательное решение

$$N = \frac{1}{y^2 - b}, \quad T = \ln(y^2 - b) - \ln y.$$

После подстановки в общую формулу для  $f$  получим, что, независимо от  $b$ , функция задаётся формулой:

$$f = \ln \frac{x^2 + y^2}{y}.$$

Подстановка в (1) даёт  $f_x^2 + f_y^2 = \frac{1}{y^2}$ , значит,  $v = |y|$ . Это решение известно, тем не менее, для удобства сравнения приведём соответствующие графики (рис. 5. и рис. 6.).



**Рис. 5.** К примеру 1в. График функции  $v$

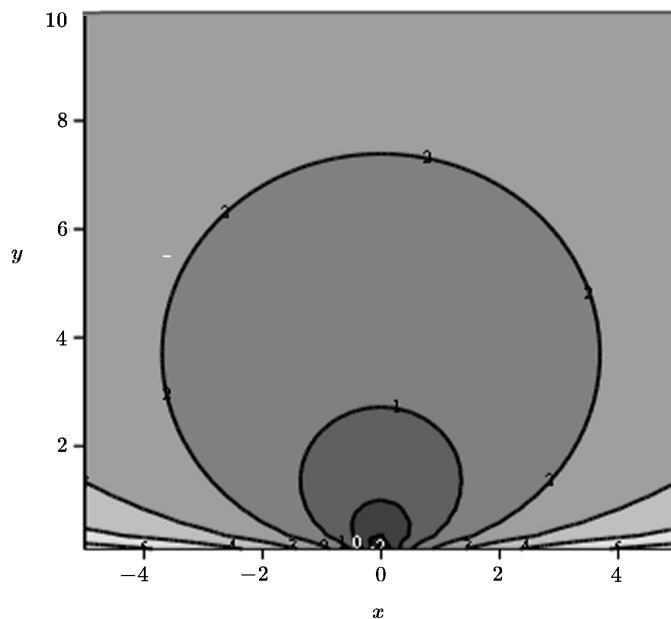


Рис. 6. К примеру 1в. Динамика распространения волны

**2.** Ищем решение уравнения (2) в виде  $f = T(M + N)^\alpha$ , где  $T = T(y)$ ,  $M = M(x)$ ,  $N = N(y)$ ,  $\alpha$  — отличная от нуля постоянная. Подстановка в (3) приводит к уравнению  $\alpha T^2(MM'' + (\alpha - 1)M'^2 + NM'') + (T'(M + N) + \alpha TN')(T'(M + N) + (\alpha - 1)TN') = 0$ .

**2а.** Если  $\alpha = \frac{1}{2}$ ,  $M = \sin kx$ , то последнее уравнение приводится к виду

$$(-T^2k^2 + 4T'^2)\sin^2 kx + (-2T^2Nk^2 + 8T'^2N)\sin kx + 4T'^2N^2 - T^2k^2 - T^2N'^2 = 0.$$

Отсюда

$$\begin{cases} 4T'^2 - T^2k^2 = 0, \\ -2T^2Nk^2 + 8T'^2N = 0, \\ -T^2k^2 + 4T'^2N^2 - T^2N'^2 = 0. \end{cases}$$

Решением системы являются функции  $T = e^{\frac{1}{2}ky}$ ,  $N = \operatorname{ch} ky$ . Подставляя найденные величины в общее выражение для  $f$ , получаем

$$f = e^{\frac{1}{2}ky} \sqrt{\sin kx + \operatorname{ch} ky}.$$

Полученная функция является периодической по  $x$  с периодом  $P = \frac{2\pi}{k}$ . Легко видеть, что  $f(x, y) = 0$  только в точках  $(-\frac{\pi}{2k} + mP, 0)$ , где  $m$  — целое.

Далее, имеем

$$f_x = \frac{k}{2} e^{\frac{1}{2}ky} \frac{\cos kx}{\sqrt{\sin kx + \operatorname{ch} ky}}, \quad f_y = \frac{k}{2} e^{\frac{1}{2}ky} \frac{\sin kx + e^{ky}}{\sqrt{\sin kx + \operatorname{ch} ky}},$$

тогда

$$f_x^2 + f_y^2 = \frac{k^2}{2} e^{2ky}.$$

Отсюда  $v = \frac{\sqrt{2}}{k} e^{-ky}$ .

Нетрудно убедиться, что имеет место равенство  $f(x, y, k) = f(-x, -y, -k)$ , поэтому достаточно изучить поведение функции при положительных (или отрицательных)  $k$ . Так, на рис. 8 изображены изолинии функции  $f$  при  $k = -0.5$  на всей координатной плоскости. При  $y \geq 0$  (верхняя полуплоскость) получаем распространение волны для профиля, соответствующего правому графику (рис. 7), а нижняя полуплоскость показывает динамику фронта для профиля, показанного на левом графике.

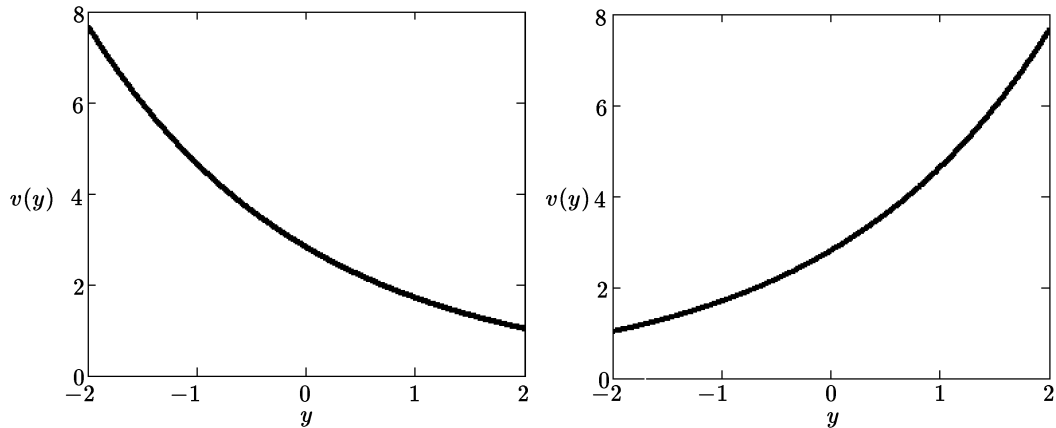


Рис. 7. К примеру 2. Графики функции  $v$  при  $k = \frac{1}{2}$  и  $k = -\frac{1}{2}$

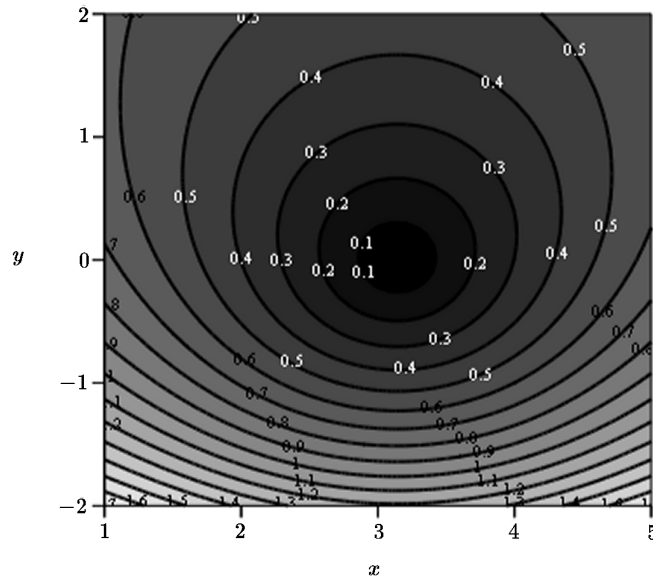


Рис. 8. К примеру 2. Динамика распространения волны

**3.** Ищем решение уравнения (2) в виде  $f = \text{arch}(MN)$ , где  $M = M(x)$ ,  $N = N(y)$ . После подстановки в (3) получаем

$$(M''M - M'^2)MN^4 - M''N^2 - MN'^2 = 0.$$

**3а.** Если выбрать  $M = \operatorname{ch} kx$ , где  $k$  — постоянная, то оно приводится к виду

$$k^2 N^4 \operatorname{ch} kx - k^2 N^2 \operatorname{ch} kx - N'^2 \operatorname{ch} kx = 0.$$

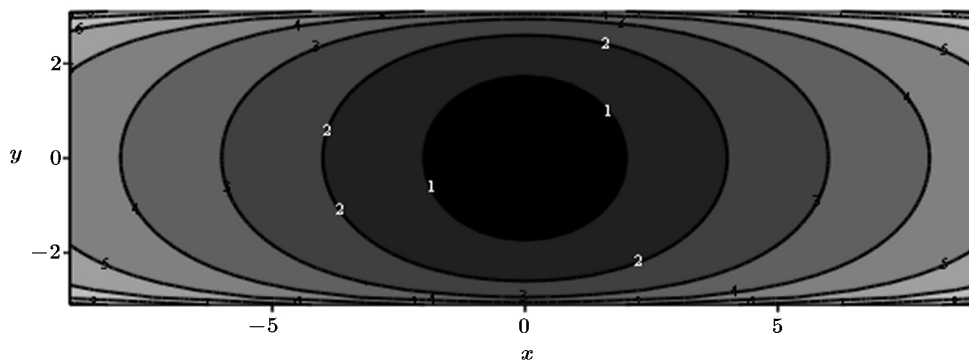
Отсюда

$$N' = kN\sqrt{N^2 - 1} \quad \text{и} \quad N = \frac{1}{\cos ky}.$$

Окончательно

$$f = \operatorname{arch} \left( \frac{\operatorname{ch} kx}{\cos ky} \right). \quad (4)$$

Эта функция периодическая по  $y$  с периодом  $\frac{2\pi}{k}$ , как и в примере 1а, координатная плоскость разбивается на полосы, в каждой из которых распространение волны происходит независимо. Далее имеем  $f_x^2 + f_y^2 = \frac{k^2}{\cos^2 ky}$ , значит, с учётом (2)  $v = \frac{1}{k} |\cos ky|$ . То есть распределение скорости в среде такое же, как в примере 1а.



**Рис. 9.** К примеру 3а. Динамика распространения фронта волны для  $k = 0.5$

Из (4) следует, что  $f(x, 0) = kx$ , т. е. фронт волны движется вдоль оси абсцисс с постоянной скоростью  $v = \frac{1}{k}$ . Таким образом, ширина полосы, в которой распространяется волна, глубина и скорость движения фронта волны, зависят от  $k$ . Было бы интересно рассмотреть профиль волны в плоскости  $yOz$  в зависимости от  $k$ . Как известно [5], в подобной ситуации, но в канале прямоугольного сечения наблюдалась уединённая волна Рассела.

**4.** Ищем решение уравнения (2) в виде

$$f = u(z) + v(t),$$

где  $z = N(y) + M(x)$ ,  $t = N(y) - M(x)$ . Имеем

$$f_x = M'(u_z - v_t), \quad f_y = N'(u_z + v_t), \quad f_{xy} = M'N'(u_{zz} - v_{tt}), \quad f_{xx} = M''(u_z - v_t) + M'^2(u_{zz} + v_{tt}).$$

Подстановка в (3) приводит к уравнению (при условии  $M' \neq 0$ )

$$M''(u_z - v_t)^2 + M'^2(u_{zz} + v_{tt})(u_z - v_t) + N'^2(u_z + v_t)(u_{zz} - v_{tt}) = 0.$$

Если  $M = x$ ,  $N = y$ , то это уравнение приводится к виду  $u_z u_{zz} = v_t v_{tt}$ , откуда

$$\begin{cases} u_z u_{zz} = C, \\ v_t v_{tt} = C. \end{cases}$$



Опуская несущественный множитель, получаем  $u = z^{\frac{3}{2}}, v = t^{\frac{3}{2}}$  и, значит,

$$f = (y - x)^{\frac{3}{2}} + (y + x)^{\frac{3}{2}}.$$

Далее получаем  $f_x^2 + f_y^2 = 9y$  и с учётом (2)  $v = \frac{1}{3\sqrt{y}}$ . Соответствующие графики приведены на рис. 10 и рис. 11. Заметим, что данное решение было найдено в [6] другим методом.

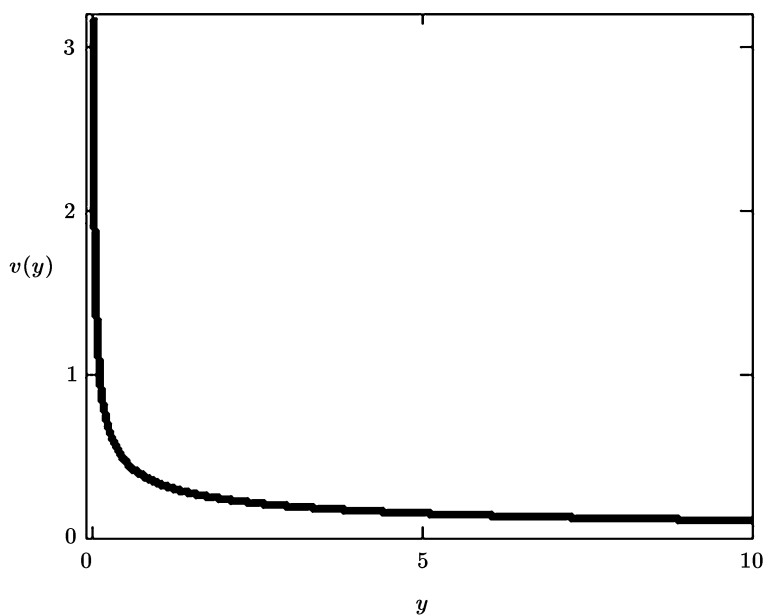


Рис. 10. К примеру 4. График функции  $v$

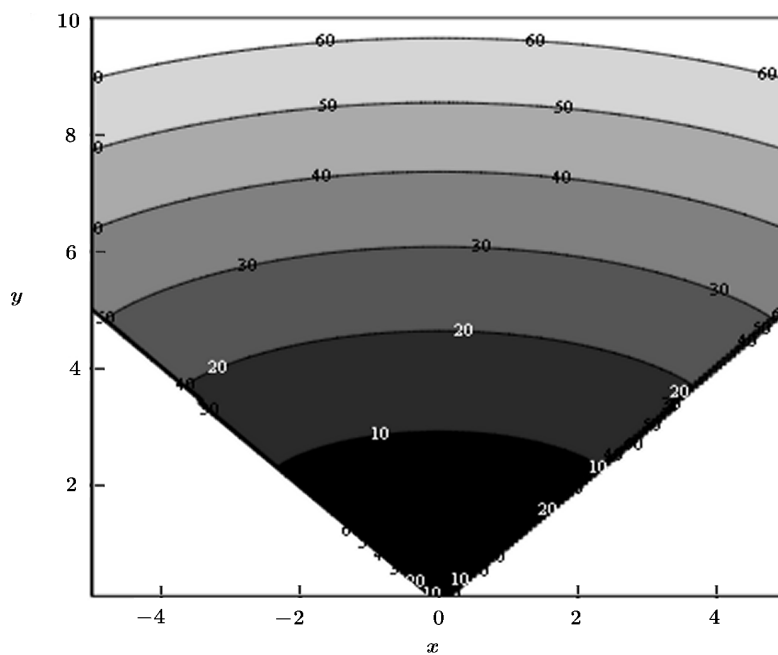


Рис. 11. К примеру 4. Динамика распространения фронта волны

5. Ищем решение в виде

$$f = p(z) + T,$$

где  $z = x^2 + y^2$ ,  $T = T(y)$ . Тогда

$$f_x = p'z_x, \quad f_y = p'z_y + T', \quad f_{xy} = p''z_xz_y + p'z_{xy}, \quad f_{xx} = p''z_x^2 + p'z_{xx}.$$

После подстановки в (2) получаем

$$p'z_x(p''z_x^2 + p'z_{xx}) + (p'z_y + T')(p''z_xz_y + p'z_{xy}) = 0. \quad (5)$$

Так как  $z = x^2 + y^2$ , то  $z_x^2 + z_y^2 = 4z$ ,  $z_{xy} = 0$ . После подстановки в (5) получаем

$$p'p''4z + 2p'^2 + T'2yp'' = 0.$$

Полагая  $T' = \frac{k}{2y}$ , где  $k$  — постоянная, получим

$$(4zp' + k)p'' + 2p'^2 = 0 \quad \text{или} \quad \frac{du}{dz} = -\frac{2u^2}{4zu + k},$$

где  $u = p'$ . Перепишем его в виде  $\frac{dz}{du} = -\frac{2}{u}z - \frac{k}{2u^2}$ . Получили линейное относительно  $z$  уравнение. Его решение  $z = \frac{1}{u^2} \left( C_1 - \frac{k}{2}u \right)$ . Выражая отсюда  $u$ , получаем  $u = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 + 16C_1z}}{4z}$ . Рассмотрим по отдельности обе возможности.

5а. Производная  $p' = u = \frac{-k + \sqrt{k^2 + Cz}}{4z}$ , где  $C = 16C_1$ . После интегрирования получим

$$p = \frac{1}{2} \sqrt{k^2 + Cz} + \frac{k}{4} \ln \frac{\sqrt{k^2 + Cz} - k}{(\sqrt{k^2 + Cz} + k)z^k}.$$

С учётом того, что  $T' = \frac{k}{2y}$ , т. е.  $T = \frac{k}{2} \ln y$ , получим окончательно

$$f = \frac{1}{2} \sqrt{k^2 + C(x^2 + y^2)} + \frac{k}{4} \ln \frac{(\sqrt{k^2 + C(x^2 + y^2)} - k)y^2}{(\sqrt{k^2 + C(x^2 + y^2)} + k)(x^2 + y^2)}. \quad (6)$$

Имеем далее

$$\begin{aligned} f_x^2 + f_y^2 &= (p'2x)^2 + \left( p'2y + \frac{k}{2y} \right)^2 = 4x^2p'^2 + 4y^2p'^2 + 2kp' + \frac{k^2}{4y^2} \\ &= 4z \frac{(-k + \sqrt{k^2 + Cz})^2}{16z^2} + \frac{-2k^2 + 2k\sqrt{k^2 + Cz}}{4z} + \frac{k^2}{4y^2} = \frac{C}{4} + \frac{k^2}{4y^2} = \frac{Cy^2 + k^2}{4y^2}. \end{aligned}$$

Сравнивая с правой частью уравнения (2), находим

$$v = \frac{2y}{\sqrt{Cy^2 + k^2}}.$$

5б. Производная  $p' = u = -\frac{k + \sqrt{k^2 + Cz}}{4z}$ . Действуя по той же схеме, что и в предыдущем пункте, получим

$$f = -\left( \frac{1}{2} \sqrt{k^2 + C(x^2 + y^2)} + \frac{k}{4} \ln \frac{(\sqrt{k^2 + C(x^2 + y^2)} - k)y^2}{(\sqrt{k^2 + C(x^2 + y^2)} + k)(x^2 + y^2)} \right).$$

Полученная функция с точностью до знака совпадает с (6), т. е. (6) даёт в рассматриваемом случае все решения.

На рис. 12 представлен график функции  $v$ , а на рис. 13 — динамика распространения фронта волны для этого профиля (при  $C = 1, k = -1$ ).

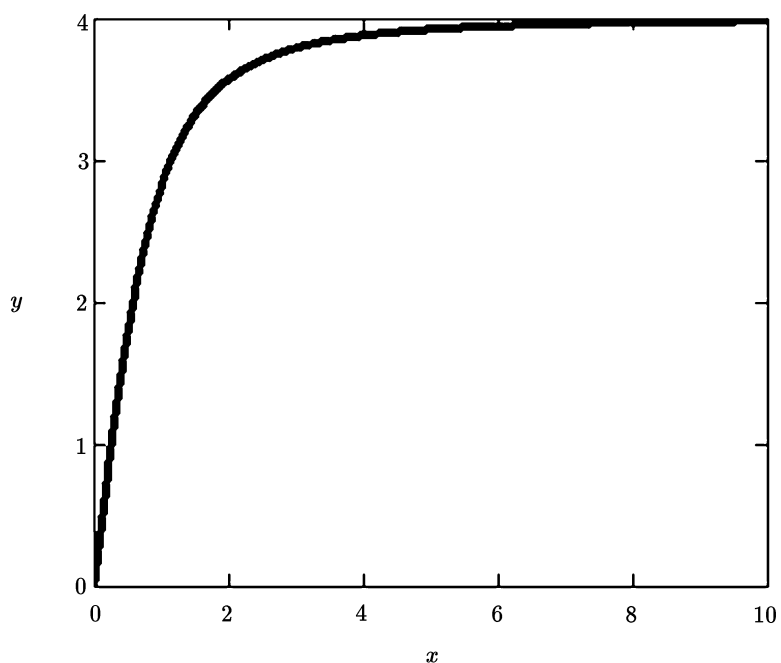


Рис. 12. К примеру 5. График функции  $v$  при  $C = 1, k = -1$

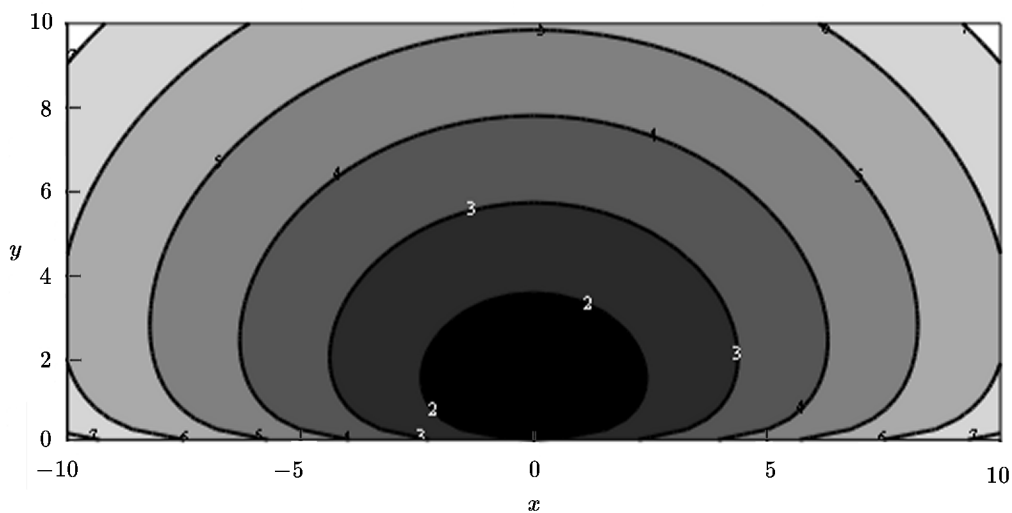


Рис. 13. К примеру 5. Динамика распространения фронта волны при  $C = 1, k = -1$

Для удобства соберём рассмотренные в статье решения уравнения (1) в таблицу.

Таблица

№	$v$	$f$	параметры	График изолиний функции
1	$\frac{1}{k}  \sin ky $	$\ln \frac{\operatorname{ch} kx + \cos ky}{\sin ky}$	$k$	Рис. 2
2	$\frac{1}{k}  \operatorname{sh} ky $	$\ln \frac{\cos kx + \operatorname{ch} ky}{\operatorname{sh} ky}$	$k$	Рис. 4
3	$ y $	$\ln \frac{x^2 + y^2}{y}$	—	Рис. 6
4	$\frac{\sqrt{2}}{ k } e^{-ky}$	$e^{\frac{1}{2}ky} \sqrt{\sin kx + \operatorname{ch} ky}$	$k$	Рис. 8
5	$\frac{1}{k}  \cos ky $	$\operatorname{arch} \left( \frac{\operatorname{ch} kx}{\cos ky} \right)$	$k$	Рис. 9
6	$\frac{1}{3\sqrt{y}}$	$(y-x)^{\frac{3}{2}} + (y+x)^{\frac{3}{2}}$	—	Рис. 11
7	$\frac{2y}{\sqrt{Cy^2 + k^2}}$	$-\left( \frac{1}{2} \sqrt{k^2 + C(x^2 + y^2)} + \frac{k}{4} \ln \frac{(\sqrt{k^2 + C(x^2 + y^2)} - k)y^2}{(\sqrt{k^2 + C(x^2 + y^2)} + k)(x^2 + y^2)} \right)$	$k, C$	Рис. 13

В заключение приведём утверждение, которое может оказаться полезным при решении уравнения эйконала общего вида.

Пусть  $u(x, y)$  удовлетворяет уравнению (2), т. е.  $u_x^2 + u_y^2 = T$ , где  $T = T(y)$ , и пусть  $(u_x)_x^2 + (u_x)_y^2 = F(x, y)$ . Тогда каждая из функций  $Cu + u_x$  и  $-Cu + u_x$ , где  $C$  — постоянная, являются решениями уравнения эйконала

$$f_x^2 + f_y^2 = C^2T + F.$$

Доказывается это утверждение подстановкой каждого решения в (1) и последующим учётом условия (2). Например, применив это утверждение к функции  $u = \sqrt{x^2 + y^2}$ , получим, что функции

$$C\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{и} \quad -C\sqrt{x^2 + y^2} + \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

являются решениями уравнения

$$f_x^2 + f_y^2 = C^2 + \frac{y^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

## Литература

1. **Боровских А.В.** Двумерное уравнение эйконала // Сиб. мат. журнал. — 2006. — Т. 47, № 5. — С. 993–1018.
2. **Марчук Ан.Г., Чубаров Л.Б., Шокин Ю.И.** Численное моделирование волн цунами. — Новосибирск: Наука, 1983.
3. **Марчук Ан.Г.** Вычисление высоты цунами, распространяющейся над наклонным дном, в лучевом приближении // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2015. — Т. 18, № 4. — С. 377–388.
4. **Марчук Ан.Г.** Оценка высоты цунами, распространяющейся над параболическим дном в лучевом приближении // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2017. — Т. 20, № 1. — С. 23–35.

5. **Филиппов А.Т.** Многоликий солитон. — М.: Наука, 1986.
6. **Москаленский Е.Д.** О нахождении фронта волны, описываемой двумерным уравнением эйконала, для случая, когда скорость в среде зависит от одной пространственной координаты // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2010. — Т. 13, № 1. — С. 67–73; Перевод: Moskalensky E.D. On detecting a wavefront described by 2D eikonal equation, when the velocity in the medium depends on one spatial variable // Num. Anal. and Appl. — 2010. — Vol. 3, № 1. — P. 52–58.

*Поступила в редакцию 12 мая 2017 г.,  
в окончательном варианте 14 августа 2017 г.*

### Литература в транслитерации

1. **Borovskih A.V.** Dvumernoe uravnenie eykonala // Sib. mat. zhurnal. — 2006. — Т. 47, № 5. — S. 993–1018.
2. **Marchuk An.G., Chubarov L.B., Shokin Yu.I.** Chislennoe modelirovanie voln cunami. — Novosibirsk: Nauka, 1983.
3. **Marchuk An.G.** Vychislenie vysoty cunami, rasprostranyayushcheysya nad naklonnym dnom, v luchevom priblizhenii // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / РАН. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2015. — Т. 18, № 4. — S. 377–388.
4. **Marchuk An.G.** Ocenka vysoty cunami, rasprostranyayushcheysya nad parabolicheskim dnom v luchevom priblizhenii // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / РАН. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2017. — Т. 20, № 1. — S. 23–35.
5. **Filippov A.T.** Mnogolikiy soliton. — М.: Nauka, 1986.
6. **Moskalenskiy E.D.** O nahozhdenii fronta volny, opisyyvaemoy dvumernym uravneniem eykonala, dlya sluchaya, kogda skorost' v srede zavisit ot odnoy prostranstvennoy koordinaty // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / РАН. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2010. — Т. 13, № 1. — S. 67–73; Перевод: Moskalensky E.D. On detecting a wavefront described by 2D eikonal equation, when the velocity in the medium depends on one spatial variable // Num. Anal. and Appl. — 2010. — Vol. 3, № 1. — P. 52–58.

