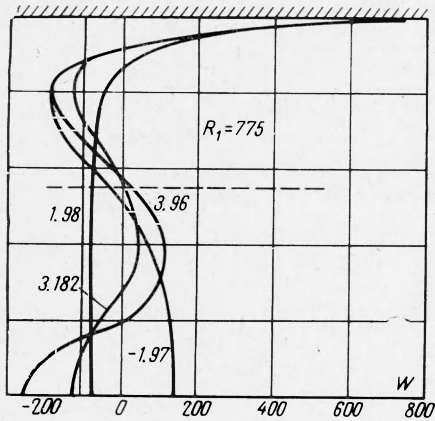
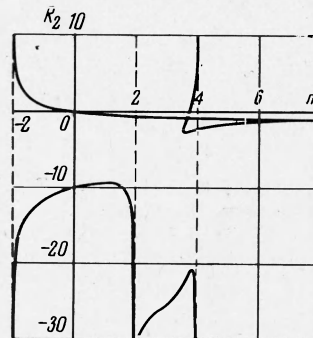


Движение жидкости в трубе обусловлено увлекающим действием стенки, поэтому только лишь те решения уравнения (9) могут иметь смысл решения задачи А, которые удовлетворяют условию $dw/dr > 0$ при $r = r_0$. Согласно этому требованию, часть ветви 4 на фиг. 2 для значений $3.782 < m < 3.92$ должна быть отброшена. Тогда на интервале $0 < R_1 < 8.5$ задача А будет иметь единственное решение, соответствующее ветви 7. Заметим, что этим решениям отвечают движения с положительным градиентом давления $\partial p / \partial z > 0$. Интересно отметить, что все четыре типа движений, представленных на фиг. 3, наблюдаются на опыте, правда, при различных условиях.

Задача Б. Рассмотрим полубесконечную трубу радиуса r_0 с неподвижной пористой стенкой. Пусть сквозь боковую поверхность трубы равномерно по всей ее длине вдувается жидкость со скоростью вдува $v_{r0} = -\nu u_0 / r_0$. Если снова не ставить условия прилипания на торце, но потребовать, чтобы было $v_z(r, 0) = 0$, то задача све-



Фиг. 3



Фиг. 4

дется к отысканию таких решений уравнения (9), которые удовлетворяют условиям $u(0) = 0$; $u'(0)$ — ограничено; $u(x_0) = u_0$, где x_0 — корень функции $u'(x)$. Безразмерный параметр $u_0 = -r_0 v_{r0} / \nu$ играет роль числа Рейнольдса, характерного для задачи Б. Положительным значениям u_0 соответствует вдув жидкости в трубу, отрицательным — отсос жидкости из трубы. Зависимость $R_2 = u_0(m)$ представлена на фиг. 4. Если потребовать, чтобы было $v_z \geq 0$, то при $R_2 \geq 0$ задача Б будет иметь единственное решение, отвечающее отрицательным значениям m .

Поступила 8 IV 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Askereit J. Über exact Lösungen des Stokes-Navier-Gleichungen. Z. angew. Math. und Phys., 1952, No. 3.
2. Sullivan Roger D. A two-cell vortex colution of the Navier-Stokes equations. J. Aerospace Sci., 1959, vol. 26, No. 11, p. 767—768.
3. Гольдштик М. А., Леонтьев А. К., Палеев И. И. Аэродинамика вихревой камеры. Теплоэнергетика, 1961, № 2.

**ПОДЪЕМНАЯ СИЛА, ДЕЙСТВУЮЩАЯ НА КОНТУР В ПЛОСКОМ
ОДНОРОДНО ЗАВИХРЕННОМ ПОТОКЕ НЕСЖИМАЕМОЙ ИДЕАЛЬНОЙ
ЖИДКОСТИ**

И. Г. Друкер

(Новосибирск)

Рассматривается плоская задача обтекания контура однородно завихренным потоком несжимаемой вязкой жидкости. Для контуров, имеющих центр или ось симметрии, получен метод вычисления подъемной силы, действующей на контур, который сводит задачу об определении подъемной силы к обычной задаче обтекания данного контура потенциальным потоком жидкости.

В плоский бесконечный однородно завихренный поток несжимаемой вязкой жидкости помещен неподвижный контур (фиг. 1). Как показывает решение задачи для

круга [1], при этом в отличие от обтекания контура потенциальным потоком возникает подъемная сила, пропорциональная вихрю.

Ниже решается задача об определении подъемных сил для некоторого класса контуров.

В декартовой системе координат скорость жидкости на бесконечности

$$u = u_\infty + \omega y, \quad v = 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty \quad (r = \sqrt{x^2 + y^2}) \quad (1)$$

Здесь u, v — проекции вектора скорости на оси x, y соответственно; u_∞ — скорость на бесконечности при $x \rightarrow \infty, y = 0$. Согласно теореме Гельмгольца [2], в данном случае вихрь скорости будет постоянным во всей области течения и равным $-\omega$.

Таким образом, обтекание контура описывается уравнениями

$$\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = -\omega, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2)$$

с граничными условиями (1) на бесконечности и условием на контуре

$$w_n = u \cos(n, x) + v \sin(n, x) = 0 \quad (3)$$

Здесь n — направление внешней нормали к контуру, а w_n — нормальная составляющая скорости на контуре.

Для вычисления сил, действующих на контур, достаточно знать асимптотическое поведение скорости и давления в окрестности бесконечно удаленной точки.

Решение системы (2) будем искать в виде

$$u = U + u_1 + \omega y, \quad v = V + v_1 \quad (4)$$

При этом U и V удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial y} = 0 \quad (5)$$

и граничным условиям

$$U \cos(n, x) + V \sin(n, x) = 0 \text{ на } L; \quad U = u_\infty, \quad V = 0 \text{ на } \infty \quad (6)$$

Функции u_1, v_1 удовлетворяют тем же уравнениям (5) и граничным условиям

$$u_1 \cos(n, x) + v_1 \sin(n, x) = -\omega y \cos(n, x) \text{ на } L; \quad u_1 = 0, \quad v_1 = 0 \text{ на } \infty \quad (7)$$

Решив (5) с соответствующими граничными условиями (6) и (7) и подставив решения в (4), получим решение системы (2) с условиями (1) и (3).

Система (5) с условиями (6) описывает потенциальное обтекание данного контура равномерным потоком со скоростью u_∞ на бесконечности. В комплексных переменных полная сопряженная скорость такого течения в окрестности бесконечно удаленной точки и при отсутствии циркуляции представляется разложением

$$\bar{w} = \bar{u}_\infty + A_2 / z^2 + A_3 / z^3 + \dots \quad (A_k = A_k' + iA_k'') \quad (k = 2, 3, 4, \dots) \quad (8)$$

Система (5) с условиями (7) также описывает некоторое потенциальное течение с нулевой скоростью на бесконечности. Решение будет иметь вид

$$\bar{w}_1 = B_2 / z^2 + B_3 / z^3 + \dots \quad (B_k = B_k' + iB_k'') \quad (9)$$

Комплексно сопряженная скорость суммарного течения будет

$$\bar{w}_0 = \bar{w} + \bar{w}_1 = \bar{u}_\infty + C_2 / z^2 + C_3 / z^3 + \dots \quad (C_k = A_k + B_k) \quad (10)$$

Так как $w_0 = u_0 - iv_0$ и $z = re^{i\varphi}$, то для течения (4) получаем в окрестности бесконечно удаленной точки разложение

$$\begin{aligned} u &= u_\infty + \omega r \sin \varphi + \frac{C_2' \cos 2\varphi + C_2'' \sin 2\varphi}{r^2} + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \\ v &= \frac{C_2' \sin 2\varphi - C_2'' \cos 2\varphi}{r^2} + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \end{aligned} \quad (11)$$

Давление определяется из уравнений Эйлера. В полярной системе координат

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{2C_2'\rho\omega}{r^2} \sin^3 \varphi - \frac{C_2 2\rho\omega}{r^2} [2 \cos^2 \varphi - 3 \cos \varphi] + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \quad (12)$$

$$\frac{\partial p}{\partial \varphi} = \frac{6C_2'\rho\omega}{r} [\cos \varphi - \cos^3 \varphi] + \frac{3C_2''\rho\omega}{r} [2 \sin^2 \varphi - 1] + O\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

Интегрируя эти уравнения при $p = p_0$ на бесконечности, получим

$$p = p_0 + \frac{C_2' 2\rho\omega}{r} \sin^3 \varphi + \frac{C_2'' \rho\omega}{r} [2 \cos^3 \varphi - 3 \cos \varphi] + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad (13)$$

Вычислим еще vv_r , где $v_r = \cos \varphi + v \sin \varphi$ — радиальная скорость,

$$vv_r = \frac{\omega}{r} \left[\frac{C_2' \sin^2 2\varphi}{2} - \frac{C_2'' \cos 4\varphi}{4} \right] + O\left(\frac{1}{r^2}\right) \quad (14)$$

Уравнение импульсов для области, ограниченной данным контуром и окружностью произвольного радиуса R , имеет вид

$$\int_0^{2\pi} \rho v_r v R d\varphi + \int_0^{2\pi} P R \sin \varphi d\varphi + F = 0 \quad (15)$$

где F — сила, действующая на контур в направлении оси y , т. е. подъемная сила. Подставляя сюда (13) и (14), затем интегрируя, получим

$$F = 2\pi C_2' \rho \omega \quad (16)$$

Из последнего соотношения следует, что подъемная сила не зависит от C_2'' , а следовательно, и от A_2'' и B_2'' , т. е. от мнимых частей коэффициентов A_2 и B_2 в разложениях (8) и (9).

Итак, вычисление подъемной силы сводится к определению действительных частей коэффициентов A_2 и B_2 .

Величину A_2 можно найти, если известно обычное обтекание контура равномерным на бесконечности потоком. В частности, если известно конформное отображение внешности круга радиуса R на внешность данного контура $z = f(\xi)$, то

$$A_2 = k k_1 u_\infty - k^2 R^2 u_\infty \quad (17)$$

Здесь k , k_1 — коэффициенты лорановского разложения функции

$$z = f(\xi) = k\xi + k_0 + \frac{k_1}{\xi} + \frac{k_2}{\xi^2} + \dots \quad (18)$$

Значение B_2' , как было указано выше, также можно определить, если известно решение системы (5) при условиях (7).

Покажем, что надлежащим выбором положения системы координат относительно контура, вернее — положения оси x , что соответствует выбору определенного значения скорости на бесконечности, можно добиться того, чтобы величина коэффициента B_2' в разложении (9) была равна нулю, тогда задача об определении подъемной силы сведется к хорошо изученной задаче обтекания контура потенциальным потоком.

В самом деле, перенос оси x на расстояние a равносильно изменению u_∞ на величину $a\omega$ и замене граничных условий (7) на

$$u_1 \cos(n, x) + v_1 \sin(n, x) = -a\omega \cos(n, x) - a\omega \cos(n, x) \quad (19)$$

Тогда u_1 и v_1 из (7) можно представить в виде суммы

$$u_1 = u_1^* + u_1^{**}, \quad v_1 = v_1^* + v_1^{**}$$

где u_1^* и v_1^* удовлетворяют уравнениям (5) и условиям (7), а u_1^{**} и v_1^{**} удовлетворяют тем же уравнениям и следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} u_1^{**} \cos(n, x) + v_1^{**} \sin(n, x) = \\ = -a\omega \cos(n, x) \quad \text{на } Lu_1^{**} = 0, v_1^{**} = 0 \quad \text{на } \infty \end{aligned} \quad (20)$$

Следовательно, u_1^* и v_1^* представляют собой решение задачи (5), (7) в «старых координатах», а u_1^{**} , v_1^{**} , как легко видеть, описывают течение, являющееся суперпозицией однородного потока жидкости со скоростями $u = a\omega$, $v = 0$ и потенциального обтекания данного контура потоком жидкости со скоростью $u = -a\omega$ на бес-

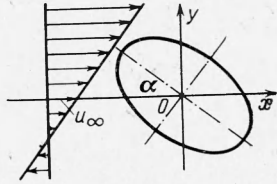
конечности. Иначе говоря, для скорости, комплексно сопряженной к $w_1^{**} = u_1^{**} + iv_1^{**}$, можно написать

$$\bar{w}_1^{**} = u_1^{**} - iv_1^{**} = D_2 / z^2 + D_3 / z^3 + \dots \quad (D_k = D_k' + iD_k'') \quad (21)$$

где, согласно (17)

$$D_2 = kk_1 a \omega - k^2 R^2 a \omega$$

Таким образом, D_2, D_2', D_2'' пропорциональны величине a . Выбирая a соответствующим образом, можно добиться, чтобы выполнялось равенство $B_2' = D_2'$. Тогда в новой системе координат действительная часть коэффициента B_2 будет равна нулю и, следовательно, $C_2' = A_2'$, т. е. для вычисления подъемной силы достаточно будет знать обычное обтекание контура и вместо u_∞ в (16) подставить значение скорости, соответствующее выбранной оси.



Фиг. 2

В этом случае легко получить другое выражение для подъемной силы. Величина A_2' [3] выражается через площадь контура и присоединенную массу, соответствующую направлению скорости на бесконечности

$$A_2' = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{m}{\rho} + S_0 \right) u_\infty \quad (22)$$

Здесь m — присоединенная масса, S_0 — площадь контура. Тогда для подъемной силы будет

$$F = (m + \rho S_0) \omega u_\infty \quad (23)$$

Необходимо еще раз подчеркнуть, что в последнем соотношении неизвестная величина u_∞ зависит от a . В общем случае a определяется из решения задачи (5), (7).

Однако можно указать два класса контуров, для которых выбор положения оси x не составляет труда.

Во-первых, это контуры, обладающие осевой симметрией, причем расположенные так, что скорость завихренного потока не бесконечности] параллельна оси симметрии. В этом случае ось x должна совпадать с осью симметрии. Покажем это. Из граничных условий (7) следует в этом случае, что в сопряженных точках области, т. е. при $z = r \exp(\pm i\varphi)$, должно быть

$$u_1' = -u_1'', \quad v_1' = v_1'' \quad (24)$$

Так как

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{B_2' \cos 2\varphi + B_2'' \sin 2\varphi}{r^2} + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \\ v_1 &= \frac{B_2' \sin 2\varphi - B_2'' \cos 2\varphi}{r^2} + O\left(\frac{1}{r^3}\right) \end{aligned} \quad (25)$$

то для выполнения (24) должно быть $B_2' = 0$.

Во-вторых, это контуры, обладающие симметрией относительно точки (центральная симметрия). Для таких контуров ось надо проводить через центр симметрии. В этом случае граничные условия (7) таковы, что должно быть

$$\bar{w}_1(z) = -\bar{w}_1(-z) \quad (26)$$

Но, с другой стороны,

$$\bar{w}_1(z) = \frac{B_2}{z^2} + \frac{B_3}{z^3} + \frac{B_4}{z^4} + \dots, \quad \bar{w}_1(-z) = \frac{B_2}{z^2} - \frac{B_3}{z^3} + \frac{B_4}{z^4} - \dots \quad (27)$$

Из сравнения (27) и (26) ясно, что все B_k с четными номерами должны быть нулями. Таким образом, в данном случае не только B_2' , но и B_2'' равно нулю.

Пример вычисления подъемной силы. Эллипс под углом атаки. Эллипс с полуосями a, b ($a > b$) помещен в однородно завихренный поток под углом атаки α (фиг. 2). Эллипс обладает центральной симметрией, поэтому ось x проведена через его центр.

Комплексный потенциал Φ обтекания эллипса потенциальным потоком со скоростью u_∞ имеет вид [2]

$$\Phi = \frac{1}{a-b} [(az - b \sqrt{z^2 - c^2})u + i(bz - a \sqrt{z^2 - c^2})v] e^{-\alpha i}$$

Здесь

$$(u = u_\infty \cos \alpha, v = u_\infty \sin \alpha; c^2 = a^2 - b^2)$$

Так как в окрестности бесконечно удаленной точки

$$\sqrt{z^2 - c^2} = z - \frac{c^2}{2z} + \dots$$

то в этой же окрестности

$$\Phi = e^{-i\alpha} \left[(u - iv)z + \frac{a+b}{2}(bu + iav)\frac{1}{z} + \dots \right]$$

Отсюда

$$A_2 = -\frac{1}{2}(a-b)(bu + iav)e^{-i\alpha}$$

Отделяя вещественную часть, получим

$$A_2' = u_\infty (a + b) [b \cos^2 \alpha + a \sin^2 \alpha]$$

Подъемная сила равна

$$F = \pi (a + b) [b \cos^2 \alpha + a \sin^2 \alpha]$$

Полагая в последнем выражении $a = b = R$, имеем

$$F = 2\pi R^2 \rho \omega u_\infty$$

что совпадает [1] с известным выражением подъемной силы для круга.

Если положить $b = 0$, $0 \leq \alpha \leq \pi/2$, то будет

$$F = \pi a^2 \sin^2 \alpha \rho \omega u_\infty$$

т. е. пластинка под углом атаки обладает подъемной силой; максимума эта сила достигает при $\alpha = \pi/2$, когда пластинка расположена перпендикулярно к потоку. Эта сила того же происхождения, что и подсасывающая сила в обычном случае для профиля с острыми передней и задней кромками.

Поступила 5 V 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Ламб Г. Гидродинамика. ОНТИ, 1947.
2. Кочин И. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидродинамика. Физматгиз, 1963.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. Изд-во «Наука», 1962.

К ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ ВДОЛЬ ЗАМЕДЛЯЮЩЕЙ СИСТЕМЫ

Ю. Ф. Филипов

(Харьков)

Распространению волны малой амплитуды вдоль замедляющей системы при наличии электронного пучка посвящено большое число работ. Увеличение выходной мощности таких ламп (ЛБЛ, ЛОВ и др.) приводит к появлению нелинейных эффектов. В работах [1-5] рассмотрено распространение электромагнитных волн конечной, но малой амплитуды. Это позволяет учесть влияние нелинейных эффектов приближенными методами. При этом, однако, остаются открытыми границы применимости и справедливость этих полученных решений. Большой интерес в связи с этим приобретает возможность получения некоторых частных, но точных решений исходной нелинейной системы уравнений. В работе Бриллюэна [6], в частности, найдено точное решение в виде стационарной волны, когда все неизвестные функции (например, скорость пучка) зависят от пространственной координаты z и времени t в виде комбинации $\xi = z - Ut$, где U — постоянная фазовая скорость.

Ниже предлагается другой, более широкий класс точных решений, описывающих распространение волн конечной амплитуды вдоль замедляющей системы с электронным пучком. При этом предполагается, что электронный пучок имеет только продоль-