

расчетной модели от реального процесса увеличивается. Очевидно, при $d \rightarrow 0$ компоновка обтекает как тупое тело с иглой. Исчезает детерминирующее значение диска, как организатора отрыва, и характер отрывного течения изменяется. При этом увеличивается относительный вклад процессов переноса. Описание такого типа течения можно найти в [8]. Подобные обстоятельства возникают при $l \gg 1$ в связи с повторным присоединением потока к перемычке. Относительное значение процессов переноса возрастает также с уменьшением интенсивности циркуляционного течения в срывной зоне.

Обзор результатов, подобных представленным на фиг. 2, 3, приводит к ряду важных выводов.

Во всех рассмотренных случаях ($M_\infty < 4$, $0 < d < 1$, $0 < l < 2,5$) расчетная модель дает $C_{xp} < C_{xp}^*$. В расчетной модели легко устанавливается существование минимума зависимости $C_{xp}(d)$ при каждом l на $0 < d < 1$.

В ряде случаев в расчете установлен минимум зависимости $C_{xp}(d, l)$ (см. фиг. 2). Относительный минимум $C_{xp}(d)$ получается для d , слабо изменяющихся при вариации l . При возрастании M_∞ эти значения уменьшаются.

Поступила 5 XI 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. Белоцерковский О. М., Давыдов Ю. М. Расчет методом «крупных частиц» трансзвуковых «закритических» режимов обтекания. — ЖВММФ, 1973, т. 13, № 1.
2. Давыдов Ю. М., Коробицын Г. П., Постников В. Г. Обтекание затупленных тел с иглами и кавернами. — ИФЖ, 1979, т. 37, № 4.
3. Прямое численное моделирование течений газа, численный эксперимент в газовой динамике/Под ред. О. М. Белоцерковского. М.: изд. ВЦ АН СССР, 1978.
4. Забродин А. В., Прокопов Г. П., Черкашин В. А. Адаптирующиеся алгоритмы в задачах газовой динамики. — В кн.: VI Междунар. конф. по численным методам в гидродинамике. Т. 1. М.: 1978.
5. Белов И. А., Гинзбург И. П., Исаев С. А. Движение и теплообмен в замкнутой области при наличии свободных границ. — Вестн. ЛГУ, 1976, № 13.
6. Петров К. П. Аэродинамика ракет. М.: Машиностроение, 1977.
7. Жигалко Е. Ф. Траектория установления в расчете обтекания тела с передней срывной зоной сверхзвуковым потоком. Спец. вопр. аэрогазодин. лет. аппаратов. Межв. сб., 1981.
8. Антонов А. Н., Грецов В. К., Шалаев С. П. Нестационарное обтекание тел с установленной впереди иглой. — Изв. АН СССР. МЖГ, 1976, № 5.

УДК 551.466.4

ГЕНЕРАЦИЯ ВНУТРЕННИХ ВОЛН НЕРОВНОСТЬЮ ДНА НА ПОВЕРХНОСТИ РАЗДЕЛА ДВУХ ЖИДКОСТЕЙ, ТЕКУЩИХ ПОД УГЛОМ ДРУГ К ДРУГУ

И. В. Стурова
(Новосибирск)

Наиболее простым примером трехмерных внутренних волн в потоке, скорость которого меняется с глубиной как по величине, так и по направлению, являются волны на поверхности раздела двух разноплотностных жидкостей, текущих под углом друг к другу. Исследование кинематических характеристик волнового движения в такой жидкости при условии, что глубина нижнего слоя бесконечна, выполнено в [1]. Асимптотическое поведение волн на поверхности

раздела, возникающих при обтекании тела для случая бесконечно глубоких слоев и препятствия на дне при условии бесконечной толщины верхнего слоя, рассмотрено в [2]. Устойчивость волн, возникающих на поверхности раздела двух безграничных потоков, текущих под углом друг к другу, исследована в [3].

Рассмотрим обтекание возвышенности, описываемой функцией $f(x, z)$, безграничным в горизонтальных направлениях потоком, в верхнем слое которого толщины H_1 плотность жидкости равна ρ_1 , в нижнем слое толщины $H_2 - \rho_2 = \rho_1(1 + \varepsilon)$ ($\varepsilon \geq 0$). Скорость нижнего потока равна U_2 и направлена вдоль оси x , скорость верхнего потока — U_1 и составляет угол α с осью x . Оси x и z расположены на невозмущенной поверхности раздела, ось y направлена вертикально вверх, ось симметрии препятствия проходит через начало координат.

Предполагая движение жидкости внутри каждого слоя безвихревым, а возмущения на свободной поверхности и поверхности раздела малыми, уравнения для потенциалов скоростей возмущенного движения в каждом слое запишем в виде

$$(1) \quad \Delta\varphi_1 = 0 \text{ при } 0 \leq y \leq H_1, \quad \Delta\varphi_2 = 0 \text{ при } -H_2 \leq y < 0$$

с граничными условиями на свободной поверхности ($y = H_1$)

$$(2) \quad \partial\varphi_1/\partial y + L_1\zeta = 0, \quad L_1\varphi_1 = g\zeta;$$

на поверхности раздела ($y = 0$)

$$(3) \quad \partial\varphi_1/\partial y + L_1\eta = 0, \quad \partial\varphi_2/\partial y + L_2\eta = 0, \quad \rho_2 L_2\varphi_2 - \rho_1 L_1\varphi_1 = \\ = g(\rho_2 - \rho_1)\eta;$$

на дне ($y = -H_2$)

$$\partial\varphi_2/\partial y + L_2f = 0, \quad \varphi_1, \varphi_2 \rightarrow 0 \text{ при } x^2 + z^2 \rightarrow \infty,$$

где

$$L_1 \equiv U_1(\cos \alpha \cdot \partial/\partial x + \sin \alpha \cdot \partial/\partial z), \quad L_2 \equiv U_2 \partial/\partial x.$$

Здесь функции $\zeta(x, z)$ и $\eta(x, z)$ описывают соответственно вертикальные смещения свободной поверхности и поверхности раздела, g — ускорение силы тяжести. При исследовании внутренних волн часто на свободной поверхности вместо условия (2) используется более простое условие «твердой крышки», для которого $\partial\varphi_1/\partial y = 0$ при $y = H_1$.

Введем безразмерные переменные, взяв за масштабные единицы длины и скорости величины $h = f(0, 0)$ (высота возвышенности) и U_2 и используя преобразования Фурье

$$\varphi_*(\mu, \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mu x} dx \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\nu z} \varphi(x, y, z) dz$$

для действительных μ и ν , получим из уравнений (1) систему обыкновенных дифференциальных уравнений, решение которой дает следующие представления для функций $\zeta_*(\mu, \nu)$ и $\eta_*(\mu, \nu)$, являющихся образом Фурье функций ζ и η :

$$\zeta_* = \frac{4k^2 d_1^2 d_2^2 f_*(1 + \varepsilon) e^{-h(H_1 + H_2)}}{(1 + e^{-2hH_1})(1 + e^{-2hH_2}) D}, \\ \eta_* = \frac{2k d_2^2 f_*(1 + \varepsilon) e^{-hH_2}}{(1 + e^{-2hH_2}) D} (n a_1^2 - \Lambda \operatorname{th} k H_1),$$

где

$$D = \Lambda D_1 - k d_1^2 D_2;$$

$$D_1(k, \theta) = [\varepsilon \Lambda \operatorname{th} kH_2 - (1 + \varepsilon) kd_2^2] \operatorname{th} kH_1 - kd_1^2 \operatorname{th} kH_2;$$

$$D_2(k, \theta) = (\varepsilon \Lambda - kd_1^2 \operatorname{th} kH_1) \operatorname{th} kH_2 - (1 + \varepsilon) kd_2^2;$$

$$d_1 = V \sin(\theta + \alpha); \quad d_2 = \sin \theta; \quad \Lambda = gh/U_2^2; \quad V = U_1/U_2;$$

f_* — образ Фурье функции $f(x, z)$ и выполнена замена

$$\mu = k \sin \theta, \quad \nu = k \cos \theta.$$

При использовании условия «твердой крышки» на свободной поверхности функция η_* принимает вид

$$\eta_* = \frac{2kd_2^2 f_* (1 + \varepsilon) e^{-kH_2} \operatorname{th} kH_1}{(1 + e^{-2kH_2}) D_1}$$

Выполняя обратные преобразования Фурье, получим

$$(4) \quad \eta(x, z) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu x} d\mu \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\nu z} \eta_* d\nu = \frac{1}{2\pi^2} \operatorname{Re} \int_0^\pi d\theta \int_0^\infty k e^{ikr \sin(\theta + \frac{\pi}{2})} \eta_* dk,$$

где проведена замена $x = r \cos \varphi$, $z = r \sin \varphi$. Аналогичное выражение будет иметь место и для функции $\zeta(x, z)$.

Функции ζ_* и η_* имеют простые полюсы, являющиеся корнями уравнения $D(k, \theta) = 0$ или $D_1(k, \theta) = 0$. Можно убедиться, что при

$$\Lambda [V^2 H_2 \sin^2(\theta + \alpha) + H_1^2 \sin^2 \theta] - V^4 \sin^2 \theta \sin^2(\theta + \alpha) < \frac{\varepsilon \Lambda H_1 H_2}{1 + \varepsilon}$$

уравнение $D(k, \theta) = 0$ имеет два положительных корня $\bar{k}_{1,2}$ ($\bar{k}_1 < \bar{k}_2$), в противном случае существует лишь один корень \bar{k}_2 . Уравнение $D_1(k, \theta) = 0$ имеет не более одного положительного корня \bar{k}_1 и лишь при условии

$$V^2 H_2 \sin^2(\theta + \alpha) + (1 + \varepsilon) H_1 \sin^2 \theta < \varepsilon \Lambda H_1 H_2.$$

Для выбора контура интегрирования в k -плоскости в (4) воспользуемся методом Рэлея введения малых диссипативных сил [1], пропорциональных скоростям частиц жидкости. При этом в исходной задаче (1) — (3) изменения претерпевают лишь динамические условия на свободной поверхности в (2) и на поверхности раздела в (3), которые теперь будут иметь вид

$$L_1 \Phi_1 + \beta \Phi_1 = g \zeta, \quad \rho_2 L_2 \Phi_2 - \rho_1 L_1 \Phi_1 + \beta (\rho_2 \Phi_2 - \rho_1 \Phi_1) =$$

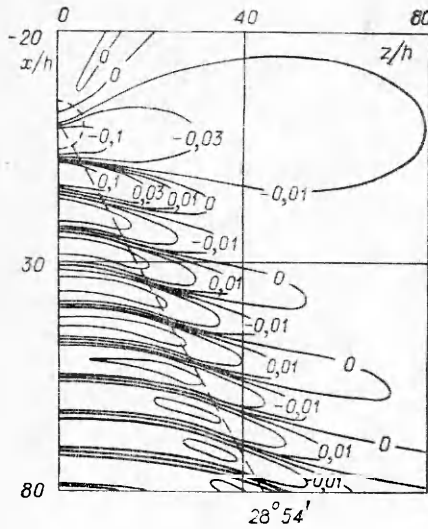
$$= g(\rho_2 - \rho_1) \eta,$$

где $\beta > 0$ — коэффициент диссипации, малый по своей величине. Решение задачи (1) с данными граничными условиями показывает, что полюсы подынтегрального выражения в (4) при $\beta \rightarrow 0$ имеют вид $k = \bar{k} + i\beta\gamma$, где, например, при условии «твердой крышки»

$$\gamma = \frac{2\bar{k}_1 [V \sin(\theta + \alpha) \operatorname{cth} \bar{k}_1 H_1 + (1 + \varepsilon) \sin \theta \operatorname{cth} \bar{k}_1 H_2]}{\varepsilon \Lambda - \bar{k}_1^2 [(1 + \varepsilon) H_2 \sin^2 \theta / \operatorname{sh}^2 \bar{k}_1 H_2 + V^2 H_1 \sin^2(\theta + \alpha) / \operatorname{sh}^2 \bar{k}_1 H_1]}.$$

Следовательно, в (4) контур интегрирования выбирается в I или IV квадранте в зависимости от знака $\sin(\theta + \varphi)$, причем все вещественные полюсы обходятся по малым полуокружностям, на которых при $\gamma > 0$ $\operatorname{Im} k < 0$, при $\gamma < 0$ $\operatorname{Im} k > 0$. В [2] это обстоятельство не учитывалось и все полюсы обходились снизу.

В результате интегральные представления для искомых функций можно записать в виде суммы однократных интегралов, обусловленных

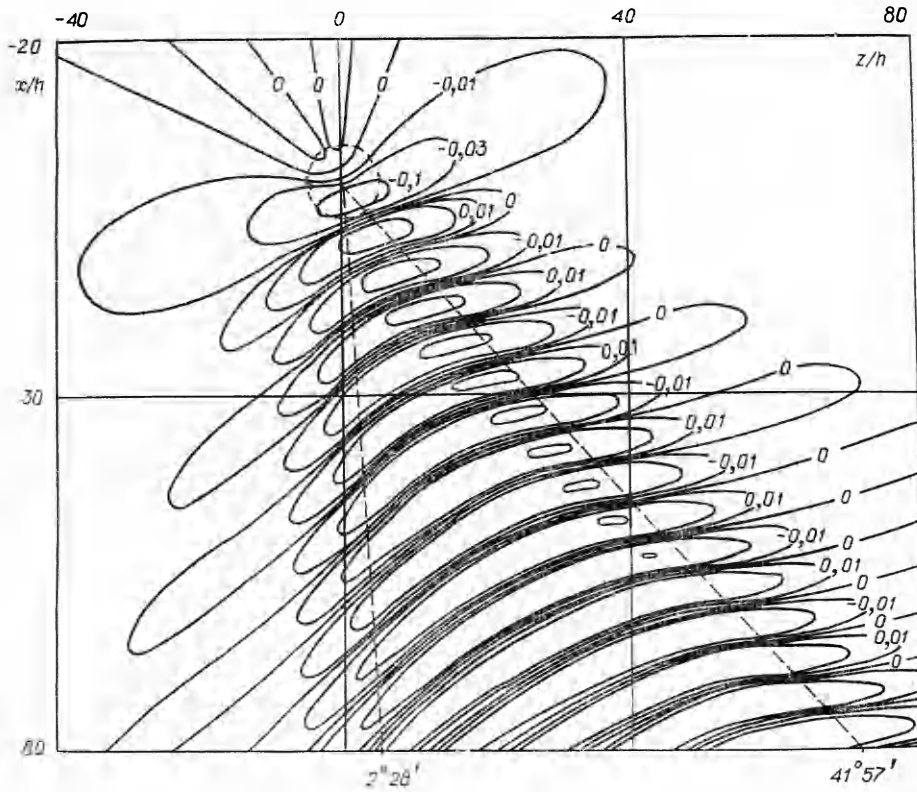


Ф и г. 1

При выполнении конкретных расчетов форма осесимметричной возвышенности на дне задавалась двух типов:

$$(5) \quad f(r) = 1 - r^2/d^2 \text{ при } 0 \leq r \leq d, \quad f(r) = 0 \text{ при } d < r < \infty,$$

$$f_*(k) = 4\pi J_2(kd)/k^2,$$



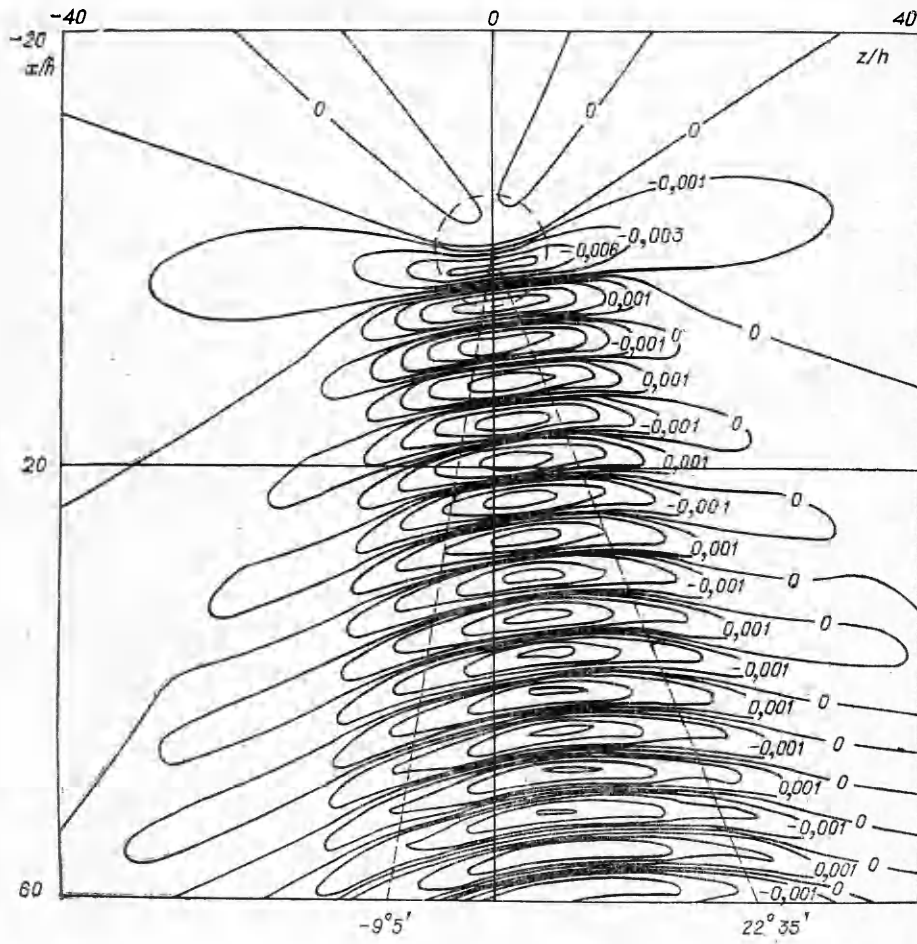
Ф и г. 2

наличием полюсов, и двойных интегралов, возникающих в результате интегрирования по мнимой оси, которые в дальнейшем будут выброшены из рассмотрения, так как они описывают локальные эффекты в окрестности возвышенности и быстро убывают с ростом r .

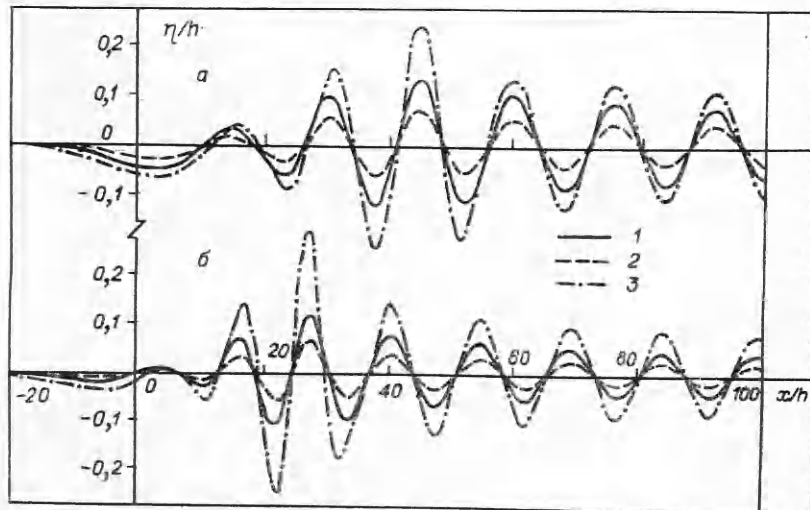
Окончательное выражение для функции $\eta(r, \varphi)$ (и аналогично для $\zeta(r, \varphi)$) имеет вид

$$\eta(r, \varphi) = -\frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^2 \int_{a_j}^{b_j} \bar{k}_j \sin(\bar{k}_j \sin(\theta + \varphi)) \operatorname{Res} \eta_*(\bar{k}_j, \theta) d\theta,$$

где \bar{k}_j — корень уравнения $D(k, \theta) = 0$ или $D_1(k, \theta) = 0$ и интегрирование проводится по тем интервалам значений θ , в которых $\operatorname{sgn}(\sin(\theta + \varphi)) = \operatorname{sgn}(\gamma)$.



Фиг. 4



Фиг. 5

Для рассмотренной выше стационарной задачи получающееся волновое движение всегда является устойчивым.

Поступила 12 IX 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. Сретенский Л. Н. Теория волновых движений жидкости. М.: Наука, 1977.
2. Кочина И. Н. О волнах на поверхности раздела двух жидкостей, текущих под углом друг к другу. — ПММ, 1955, т. 19, № 5.
3. Гандин Л. С. Об устойчивости волн у поверхности раздела потоков, направленных под углом друг к другу. — Изв. АН СССР. Сер. геофизическая, 1957, № 3.
4. Miles J. W. Internal waves generated by a horizontally moving source. — Geophysical Fluid Dynamics, 1971, vol. 2, p. 1.

УДК 532.593

ПРИСОЕДИНЕННЫЕ ВНУТРЕННИЕ ВОЛНЫ В ЖИДКОСТИ С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫМ РАСПРЕДЕЛЕНИЕМ ПЛОТНОСТИ

С. А. Макаров, Ю. Д. Чашечкин
(Москва)

На основе модифицированного метода стационарной фазы, предложенного в [1, 2], в [3] в плоском и трехмерном случае определены поверхности постоянной фазы внутренних волн, возбуждаемых телом, движущимся под произвольным углом к горизонту, удовлетворительно совпадающие с экспериментально наблюдаемыми. С учетом интегральных преобразований [4, 5] в работе [6] численными методами рассмотрены в линейной постановке плоская и пространственная задачи о волновых движениях, возникающих при обтекании погруженных истока и стока одинаковой интенсивности равномерным потоком стратифицированной по плотности жидкости. Асимптотическое решение для волнового поля, возбуждаемого диполем и произвольной системой исток — сток, движущихся в экспоненциально стратифицированной жидкости, получено в [7, 8]. Эти решения описывают волновую картину, возникающую при движении тела с большими скоростями.

Цель данной работы — определение амплитудно-фазовых характеристик присоединенных внутренних волн в жидкости с экспоненциальным распределением плотности при равномерном горизонтальном перемещении тела в широком диапазоне режимов движения (включая движения с малыми скоростями) с последующим сравнением их с результатами лабораторных экспериментов. В решении пренебрегается диссипативными и диффузионными эффектами (т. е. не учитывается изменение плотности частиц при их движении) и влиянием свободной поверхности. Считается, что жидкость имеет бесконечную глубину.

Система гидродинамических уравнений, определяющая поле скоростей \mathbf{v} , имеет вид

$$(1) \quad (\partial/\partial t + \mathbf{v}\nabla)\rho\mathbf{v} = -\nabla p + \rho\mathbf{g}, \quad (\partial/\partial t + \mathbf{v}\nabla)\rho = 0, \quad \nabla\mathbf{v} = m,$$

где t — время; ρ — плотность; p — давление; \mathbf{g} — ускорение силы тяжести; $m(x, y, z, t)$ — распределение истоков и стоков в жидкости; $\nabla = \mathbf{i}\partial/\partial x + \mathbf{j}\partial/\partial y + \mathbf{k}\partial/\partial z$.

Рассмотрение проводится в лабораторной системе координат $OXYZ$ (ось X направлена вдоль линии движения тела, ось Z — вертикально вверх) и системе координат $OX^*YZ(x^* = x - Ut)$, связанной с телом.

Задача решается в приближении Буссинеска. Размерными параметрами задачи являются: $\rho_0(z) = \rho_0(0) \exp[-z/\Lambda]$ — плотность жидкости; масштаб стратификации $\Lambda = [d \ln \rho_0(z)/dz]^{-1}$; период T и частота свобод-