

26. Barbee T.W., Seaman L. et al. Dynamic fracture criteria for ductile and brittle metals // J. Materials. — 1972. — V. 7, N 3.
27. Голубев В.К. О расширении пор в пластических металлах при отколе // ПМТФ. — 1983. — № 6. — С. 159—165.
28. Садовой А.А., Чулков Н.М., Феодоритов В.П. Восстановление параметров уравнения состояния по экспериментальным данным // ВАНТ. Сер. Математическое моделирование физических процессов. — 1991. — Вып. 1. — С. 61—65.
29. Voh M.J. New method of constrained optimization and comparison with other methods // Computer J. — 1965. — V. 8, N 1. — P. 42—52.
30. Степанов Г.В., Харченко В.В. Особенности деформирования металлов при скоростях деформаций выше 10^4 с^{-1} // Пробл. прочности. — 1985. — № 8. — С. 59—64.
31. Батьков Ю.В., Глушак Б.Л., Новиков С.А. Прочность алюминия, меди и стали за фронтом УВ // ФГВ. — 1989. — № 5. — С. 126—132.
32. Огородников В.А., Иванов А.Г., Тюнькин Е.С. и др. Зависимость откольной прочности металлов от амплитуды ударно-волновой нагрузки // ФГВ. — 1992. — № 1. — С. 94—98.

г. Арзамас-16

Поступила 3/VI 1993 г.,
в окончательном варианте — 4/II 1994 г.

УДК 532.592.2 + 517.958

В.М. Тешуков

ГИДРАВЛИЧЕСКИЙ ПРЫЖОК НА СДВИГОВОМ ТЕЧЕНИИ ИДЕАЛЬНОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Рассмотрена математическая модель длинноволновой аппроксимации для движения слоя завихренной идеальной несжимаемой жидкости со свободной границей над ровным дном. В смешанной эйлерово-лагранжевой системе координат уравнения движения представлены в виде системы законов сохранения массы, полного импульса и завихренности. Эта система законов сохранения положена в основу определения разрывных решений интегродифференциальных уравнений теории длинных волн. Исследованы свойства соотношений на гидравлическом прыжке. Показано, что в зависимости от параметров набегающего потока могут возникать два различных типа прыжка. Установлено, что для любого сдвигового сверхкритического течения перед прыжком соотношения на разрыве позволяют определить параметры течения за фронтом прыжка. Рассмотрен пример стационарного решения, зависящего от параметра, на котором иллюстрируется переход от одного типа прыжка к другому.

Уравнения длинных волн для завихренной жидкости рассматривались в ряде работ. В [1, 2] получены бесконечные серии законов сохранения, в [3] построены точные стационарные решения, описывающие течения с критическим слоем. В [4, 5] построены частные решения типа простых волн. В [6] выяснены условия гиперболичности уравнений движения.

1. Формулировка математической модели. Рассматривается начально-краевая задача

$$\begin{aligned}
 (1.1) \quad & \rho(u_T + uu_x + vv_y) + p_x = 0, \\
 & \epsilon^2 \rho(v_T + uv_x + vv_y) + p_y = -\rho g, \quad 0 \leq Y \leq h(X, T), \\
 & u_x + v_y = 0, \\
 & h_T + u(X, h, T)h_x = v(X, h, T), \quad p(X, h, T) = p_0 = \text{const}, \\
 & v(X, 0, T) = 0, \quad u(X, Y, 0) = u_0(X, Y), \quad h(X, 0) = h_0(X),
 \end{aligned}$$

описывающая течение слоя идеальной несжимаемой однородной ($\rho = \text{const}$) жидкости со свободной границей $Y = h(X, T)$ над ровным дном $Y = 0$. Здесь

$$u^1 = (g_1 H_1)^{1/2} u, v^1 = (g_1 H_1)^{1/2} H_1 L_1^{-1} v, p^1 = g_1 R_1 H_1 p, \\ \rho^1 = R_1 \rho, X^1 = L_1 X, Y^1 = H_1 Y, T^1 = L_1 (g_1 H_1)^{-1/2} T$$

— размерные компоненты вектора скорости, давление, плотность, декартовы координаты на плоскости и время; u, v, p, ρ, X, Y, T — соответствующие безразмерные величины; R_1 имеет размерность плотности; g_1 — размерность ускорения (ускорение свободного падения G связано с безразмерной константой g соотношением $G = g_1 g$); H_1 и L_1 — характерные вертикальный и горизонтальный масштабы. Начальные данные u_0, h_0 определены при $0 \leq Y \leq h_0(X)$, $-\infty < X < \infty$.

Приближенная теория длинных волн (теория мелкой воды) возникает при предельном переходе $\epsilon = H_1 L_1^{-1} \rightarrow 0$. Уравнение сохранения вертикальной компоненты импульса в пределе дает гидростатический закон распределения давления по глубине:

$$(1.2) \quad P_Y = -\rho g \quad (p(X, h, T) = p_0).$$

Из уравнения неразрывности и (1.2) получаем равенства

$$(1.3) \quad p = \rho g(h - Y) + p_0, v = - \int_0^Y u_x dY.$$

С использованием этих соотношений задачу (1.1) при $\epsilon = 0$ можно свести к задаче Коши

$$(1.4) \quad \rho(u_T + uu_x + vv_y) + \rho gh_x = 0 \quad (0 \leq Y \leq h(X, T)), \\ h_T + \frac{\partial}{\partial X} \left(\int_0^h u dY \right) = 0, \\ u(X, Y, 0) = u_0(X, Y), h(X, 0) = h_0(X)$$

для неизвестных функций $u(X, Y, T), h(X, T)$. Давление и вертикальная компонента скорости определяются формулами (1.3). Из (1.4) следует уравнение сохранения вихря:

$$(\omega)_T + u(\omega)_X + v(\omega)_Y = 0 \quad (\omega = u_y)$$

(в приближении теории длинных волн завихренность совпадает с $-u_y$). Из приведенного уравнения вытекает следствие: если $\omega = 0$ в начальный момент времени, то $\omega = 0$ при всех T . В случае безвихревого течения уравнения (1.4) сводятся к классическим уравнениям теории мелкой воды:

$$(1.5) \quad u_T + uu_x + gh_x = 0, h_T + (uh)_X = 0.$$

Разрывные решения системы уравнений мелкой воды моделируют движущиеся гидравлические прыжки. Для получения соотношений, связывающих параметры потока по обе стороны прыжка, необходимо преобразовать уравнения (1.5) к системе законов сохранения горизонтального импульса и массы жидкого слоя:

$$(1.6) \quad (\rho hu)_T + (\rho hu^2)_X + (2^{-1} \rho gh^2)_X = 0, \rho h_T + (\rho uh)_X = 0.$$

Из (1.6) выводятся соотношения на фронте разрыва $X = x(t)$:

$$(1.7) \quad [\rho h(u - D)^2 + 2^{-1} \rho gh^2] = 0, [\rho h(u - D)] = 0.$$

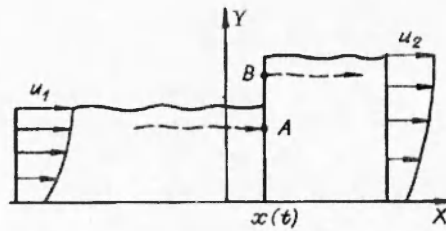
Здесь $[f] = f^+ - f^-$ — разность предельных значений функции f на линии разрыва $X = x(t)$; $D = x'(t)$ — скорость движения фронта разрыва. Знак величины $u - D$ определяет направление потока относительно фронта. Условие устойчивости разрывного течения сводится к убыванию полной

энергии слоя при пересечении линии разрыва. Следствием этого условия являются неравенства

$$(1.8a) \quad |u - D| > \sqrt{gh};$$

$$(1.8b) \quad |u - D| < \sqrt{gh}.$$

Неравенство (1.8a) должно выполняться для предельных значений параметров потока перед фронтом разрыва, а (1.8b) — за фронтом разрыва (сверхкритическое и докритическое течения относительно фронта).



Р и с. 1

Для более точного моделирования реальных течений возникает необходимость учитывать зависимость профиля горизонтальной скорости от вертикальной координаты ($u_y \neq 0$). Приближенный подход, принятый в гидравлике, связывает среднюю по глубине скорость потока U и среднее от квадрата скорости соотношением

$$(1.9) \quad \alpha U^2(X, T) = h^{-1} \int_0^h u^2 dY \quad \left(\int_0^h u dY = hU \right)$$

(α — эмпирический параметр, корректив количества движения потока). Интегрирование первого уравнения движения (1.4) по Y и использование (1.9) позволяют замкнуть уравнения для средних величин и получить соотношения на разрыве с эмпирической константой.

Цель настоящей работы — предложить модель гидравлического прыжка в завихренном течении, основанную на законах сохранения, вытекающих из основных уравнений движения. При этом предполагается с помощью соотношений на разрыве определять не только глубину слоя и среднюю скорость, но и полный профиль скорости по глубине.

Отметим основные особенности моделирования рассматриваемых разрывных течений. Разрывность траекторий частиц — характерная особенность модели, существенно отличающая гидравлические прыжки от других известных в гидродинамике типов разрывов. Частицы жидкости резко переходят на другой уровень по высоте при пересечении фронта разрыва (рис. 1, траектория частицы изображена пунктиром). Поэтому при выводе балансовых соотношений на фронте нужно связывать значения параметров течения в разных эйлеровых точках (точки A и B на рис. 1). Местоположение точки выхода частицы B , входящей в зону скачка в точке A , заранее не известно. Поэтому при построении математической модели на первом шаге нужно перейти к смешанным эйлерово-лагранжевым переменным с помощью соотношений

$$T = t, X = x, Y = \Phi(x, t, \lambda)$$

(λ — вертикальная лагранжева переменная). Здесь $\Phi(x, t, \lambda)$ — решение задачи Коши

$$(1.10) \quad \Phi_t + u(x, \Phi, t)\Phi_x = v, \quad \Phi(x, 0, \lambda) = \lambda h_0(x).$$

В новых переменных области течения соответствует полоса $0 \leq \lambda \leq 1$, а уравнения движения приобретают вид [6]

$$(1.11a) \quad u_t + uu_x + g \int_0^1 H_x dv = 0;$$

$$(1.11b) \quad H_t + (uH)_x = 0 \quad (H(x, t, \lambda) = \Phi_x(x, t, \lambda)).$$

Второй важный элемент математического моделирования — выбор системы законов сохранения. Уравнение (1.11b) выражает локальный закон сохранения массы. Из уравнения (1.11a) после умножения на H и интегрирования по λ получим закон сохранения полного горизонтального импульса слоя:

$$(1.12) \quad \left(\int_0^1 uHdv \right)_t + \left(\int_0^1 u^2Hdv + 2^{-1}gh^2 \right)_x = 0.$$

Для замыкания модели необходимо еще одно локальное соотношение. Дивергентное уравнение, являющееся следствием системы (1.4),

$$(1.13) \quad (\rho Hu)_x + (\rho Hu^2)_x + (pH)_x - (p\Phi_x)_\lambda = 0 \quad (p = \rho g \int_\lambda^1 Hdv + p_0)$$

формально имеет вид локального закона сохранения горизонтального импульса, но (1.13) теряет смысл на разрывных решениях рассматриваемого типа.

Действительно, если величины u , Φ , H , p имеют разрыв первого рода при $x = x(t)$, то последний член в (1.12) теряет смысл. Под знаком производной по переменной λ стоит величина математически не определенная: произведение функции Φ_x , имеющей при $x = x(t)$ особенность типа дельта-функции Дирака, и разрывной функции p .

В качестве дополнительного замыкающего уравнения предлагается использовать следствие уравнений движения — закон сохранения завихренности

$$(1.14) \quad (\omega H)_t + (u\omega H)_x = 0 \quad (\omega = u_y = u_x H^{-1}),$$

который формулируется в математически определенных терминах и в случае течений с разрывными траекториями. В итоге предлагается определять разрывные решения уравнений длинных волн системой законов сохранения (1.116), (1.12) и (1.14). Интегральная форма законов сохранения приводит к следующим уравнениям на фронте прыжка:

$$(1.15) \quad [H(u - D)] = 0, \quad \left[\int_0^1 H(u - D)^2 d\lambda + 2^{-1}gh^2 \right] = 0, \quad [\omega H(u - D)] = 0.$$

Заметим, что в частном случае безвихревого движения соотношения (1.15) совпадают с (1.7) (если $u_\lambda = 0$, то, согласно (1.10), $H = h(X, T)$). Из соотношений (1.15) получаем следствия (первое соотношение справедливо в точках на фронте, где $H(u - D) \neq 0$)

$$(1.16) \quad [\omega] = 0, \quad [\Psi]_\lambda = 0 \quad (\Psi = (2g)^{-1}(u - D)^2 + (\rho g)^{-1}p + Y).$$

Значит, величина завихренности сохраняется в лагранжевой частице при переходе через разрыв. Величина Ψ в гидравлике называется полным напором. Последнее соотношение означает, что скачок полного напора (вычисленного в системе координат, движущейся вместе с фронтом) не зависит от глубины (следствие гидростатичности давления).

Известно, что завихренность сохраняется вдоль траекторий в точной модели плоскопараллельного течения идеальной несжимаемой жидкости. Этот факт можно рассматривать как аргумент в пользу применения закона сохранения (1.14) в теории разрывных течений, по крайней мере для прыжков небольшой амплитуды.

Кроме соотношений (1.15) потребуем выполнения условия убывания полной энергии слоя при переходе потока через фронт скачка в случае, когда на скачке выполнено одно из двух неравенств: $D - u \geq 0$ либо $D - u \leq 0$. С учетом (1.15) это условие можно представить в виде

$$(1.17) \quad \int_0^1 H(u - D) [2^{-1}\rho(u - D)^2 + p + \rho g\Phi] d\lambda \geq 0,$$

где $[f(x, t, \lambda)] = f(x(t) + 0, t, \lambda) - f(x(t) - 0, t, \lambda)$.

2. Свойства соотношений на гидравлическом прыжке. Пусть известны параметры потока $u = u_1$, $H = H_1$ перед гидравлическим прыжком и ско-

рость D гидравлического прыжка. Рассмотрим вопрос об определении параметров течения за фронтом. Последнее соотношение (1.15) записывается как

$$[u_1(u - D)] = 0.$$

Следовательно, $K = [(u - D)^2]$ не зависит от λ . Пусть для определенности поток набегаёт на фронт разрыва слева: $u_1 - D > 0$. Тогда $[(u - D)^2] = (u_1 - D)^2 - (u_2 - D)^2$ и

$$(2.1) \quad u_2 - D = ((u_1 - D)^2 - K)^{1/2} \quad (K \leq K_* = \min_{\lambda} (u_1 - D)^2).$$

Первое соотношение (1.15) позволяет определить

$$(2.2) \quad H_2 = H_1(u_1 - D)((u_1 - D)^2 - K)^{-1/2}$$

(индекс 2 относится к параметрам за фронтом прыжка). Подставляя значения u_2 и H_2 в закон сохранения полного импульса, получим уравнение

$$(2.3) \quad F(K) - F(0) = 0$$

для определения $K \in (0, K_*)$. Здесь

$$F(K) = \int_0^1 H_1(u_1 - D)((u_1 - D)^2 - K)^{1/2} d\lambda + 2^{-1}g \int_0^1 H_1(u_1 - D)((u_1 - D)^2 - K)^{-1/2} d\lambda^2.$$

В силу (1.16) величина $[2^{-1}\rho(u - D)^2 + p + \rho g\Phi] = \rho g[\Psi]$ не зависит от λ , поэтому знак выражения в левой части (1.17) совпадает со знаком $\sigma(K) = g[\Psi]$. Производная функции $\sigma(K)$ вычисляется в виде

$$\sigma'(K) = 2^{-1}(1 - g \int_0^1 H_1(u_1 - D)((u_1 - D)^2 - K)^{-3/2} d\lambda).$$

При $K \rightarrow -\infty$ $\sigma'(K) \rightarrow 2^{-1}$, при $K \rightarrow K_*$ $\sigma'(K) \rightarrow -\infty$. Так как $\sigma''(K) < 0$, то существует единственное значение K_0 такое, что $\sigma'(K_0) = 0$. Из того, что $\sigma(0) = 0$, следует, что в точке K_0 достигается единственный положительный максимум функции $\sigma(K)$. Из этих свойств вытекает, что $\sigma(l) > 0$ для любого l в интервале от 0 до K , если $\sigma(K) \geq 0$.

Производные функций $\sigma(K)$ и $F(K)$ связаны соотношением

$$(2.4) \quad F'(K) = -h_2(K)\sigma'(K)$$

$$(h_2(K) = \int_0^1 H_1(u_1 - D)((u_1 - D)^2 - K)^{-1/2} d\lambda).$$

В качестве следствия этого соотношения получаем равенство

$$(2.5) \quad F(K) - F(0) = -h_2(K)\sigma(K) + \int_0^K h'_2(l)\sigma(l)dl.$$

Равенство (2.3) и неравенство $\sigma(K) \geq 0$ несовместны при $K < 0$. Действительно, если $\sigma(K) \geq 0$, то $\sigma(l) > 0$ для значений l между 0 и K , и так как $h'_2(l) > 0$, то оба члена в правой части равенства (2.5) отрицательны при $K < 0$. Следовательно, корни K уравнения (2.3), удовлетворяющие неравенству $\sigma(K) \geq 0$, могут располагаться только на интервале $(0, K_*)$. Функция σ будет положительна при положительных K только в том случае, когда заданные параметры потока удовлетворяют неравенству $\sigma'(0) > 0$; при этом $K_0 \in (0, K_*)$. Тогда функция F монотонно убывает на интервале $(0, K_0)$, достигая минимума $F(K_0) < F(0)$, затем монотонно возрастает на интервале

(K_0, K_*) . Если $F(K_*) > F(0)$, то уравнение (2.3) имеет единственный корень K_s на интервале (K_0, K_*) и в точке K_s $\sigma'(K_s) < 0$.

При $F(K_*) \leq F(0)$ корней уравнения (2.3) на интервале $(0, K_*)$ нет. Если $K = K_*$, то $u_2 - D$ обращается в нуль в тех точках, где $(u_1 - D)^2 = K_*$. Предположим, что минимальное значение $(u_1 - D)^2$ достигается в единственной точке $\lambda = \lambda_*$. Тогда можно найти параметры u_2 , Φ_2 за фронтом разрыва, причем Φ_2 будет иметь скачок при $\lambda = \lambda_*$:

$$(2.6) \quad \Phi_2(x(t), t, \lambda) = \Phi_2^1(x(t), t, \lambda) + \eta(x(t), t)\theta(\lambda - \lambda_*).$$

Здесь Φ_2^1 — непрерывная функция; $\theta(\lambda - \lambda_*)$ — функция Хевисайда ($\theta = 1$ при $\lambda > \lambda_*$, $\theta = 0$ при $\lambda < \lambda_*$). При этом в областях $\lambda < \lambda_*$, $\lambda > \lambda_*$ u_2 и H_2 определяются формулами (2.1), (2.2) при $K = K_*$. Полагаем $u_2 = D$ в прослойке толщины η :

$$h_* = \int_0^{\lambda_*} H_1(u_1 - D)((u_1 - D)^2 - K_*)^{-1/2} d\lambda < Y < \eta + h_*.$$

При этом полная глубина слоя жидкости за скачком определяется равенством $h = h_2(K_*) + \eta$. Из закона сохранения полного горизонтального импульса (1.15) для η получаем уравнение

$$(2.7) \quad 2^{-1}g(h_2(K_*) + \eta)^2 = 2^{-1}gh_2^2(K_*) - (F(K_*) - F(0)).$$

Правая часть равенства (2.7) положительна, так как $F(K_*) < F(0)$. Это позволяет однозначно найти толщину прослойки

$$(2.8) \quad \eta = [h_2^2(K_*) - 2g^{-1}(F(K_*) - F(0))]^{1/2} - h_2(K_*).$$

В силу равенства (2.4)

$$\sigma(K_*) = -h_2^{-1}(K_*)(F(K_*) - F(0)) - \int_0^{K_*} h_2^{-2}h_2'(l)(F(l) - F(0))dl > 0,$$

поэтому неравенство (1.17) выполнено (при $y \in (h_*, h_* + \eta)$ $u_2 = D$, а тогда прослойка не вносит вклада в поток энергии). Заметим, что при Φ_2 , определяемой формулой (2.6), первое условие (1.15) выполняется в смысле обобщенных функций.

Неравенства $\sigma'(0) > 0$, $\sigma'(K_s) < 0$ можно представить в виде

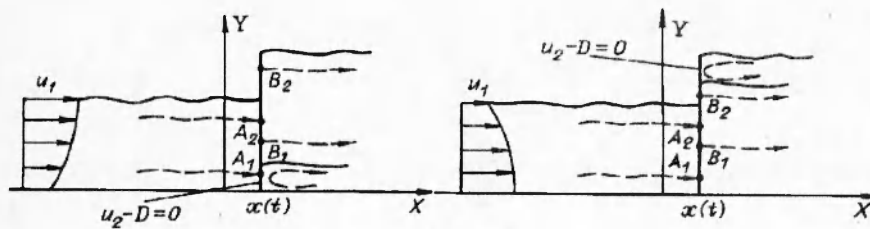
$$(2.9a) \quad 1 - g \int_0^1 H_1(u_1 - D)^{-2} d\lambda > 0;$$

$$(2.9b) \quad 1 - g \int_0^1 H_2(u_2 - D)^{-2} d\lambda < 0.$$

В [6] показано, что система уравнений (1.11) имеет вещественные характеристики, определяемые дифференциальными уравнениями $x'(t) = k^t(x, t)$ ($t = 1, 2$), где k^t — корни уравнения

$$(2.10) \quad 1 - g \int_0^1 H(u - k)^{-2} d\lambda = 0 \quad (k^1 < \min u, k^2 > \max u).$$

Тогда неравенства (2.9) представляют собой условия сверхкритичности потока перед фронтом прыжка и докритичности за фронтом. Для рассматриваемой ситуации из (2.9) следуют условия Лакса устойчивости разрыва $k_2^1 < D < k_1^1$ (нижний индекс обозначает состояние, на котором вычисляется характеристический корень k^1). Аналогичные неравенства выполнены и в



Р и с. 2

случае, когда $F(K_*) < F(0)$. Из (2.9) следует, что при стремлении амплитуды разрыва к нулю скорость фронта D стремится к характеристической скорости.

После того, как u_2 , Φ_2 , $H_2 = \Phi_{2\lambda}$ найдены, можно перейти к переменным X , Y , T , выразив λ через X , Y , T из уравнения $Y = \Phi_2(X, T, \lambda)$ (в области перед скачком $Y = \Phi_1(X, T, \lambda)$). В силу этих соотношений вертикальная эйлерова координата $Y = Y_2$ за скачком связана с эйлеровой координатой перед скачком $Y = Y_1$ зависимостью $Y_2 = Y_2(Y_1)$. Соотношения (1.15) представим как

$$(u_1 - D)dY_1 = (u_2 - D)dY_2, \quad (u_1 - D)du_1 = (u_2 - D)du_2,$$

$$\int_0^{h_1} (u_1 - D)^2 dY_1 + 2^{-1}gh_1^2 = \int_0^{h_1} (u_2 - D)^2 dY_2 + 2^{-1}gh_2^2.$$

В итоге можно заключить, что по заданному состоянию перед фронтом могут распространяться со сверхкритической (в смысле (2.9a)) скоростью D гидравлические прыжки двух типов. Для первого типа $u_2 - D \neq 0$ за фронтом. Этот тип прыжка возможен, если заданный поток и скорость прыжка D удовлетворяют условиям $F(K_*) - F(0) > 0$. Если $F(K_*) - F(0) \leq 0$ и $(u_1 - D)^2$ достигает минимума в единственной точке, то возможен прыжок с застойной (относительно фронта) зоной: на фронте за прыжком $u_2 - D = 0$ при $h_- \leq y \leq h_* + \eta$. Если $(u_1 - D)^2$ достигает минимального значения сразу в нескольких точках, то баланс полного импульса позволяет определить только суммарную толщину прослоек.

Следует отметить, что стационарные (в системе отсчета фронта) течения возникают в результате установления нестационарного процесса, и формирование застойных зон может зависеть от предыстории. Для монотонного профиля скорости, когда $u_{1Y} \neq 0$, минимальное значение $(u_1 - D)$ достигается либо на дне, либо на свободной поверхности. Возникновение застойного участка на фронте вблизи свободной поверхности может трактоваться как возможность появления выраженного «вальца» [7], либо как появление зоны возвратного течения в окрестности дна. Примеры стационарных решений уравнений (1.4), описывающих течения с замкнутыми линиями тока и зонами возвратных потоков в окрестности критического слоя $(u - D) = 0$, построены в [3]. Возможные схемы течений представлены на рис. 2. Ясно, что картина течения в зоне за фронтом определяется и условиями справа от фронта.

В качестве примера рассмотрим стационарный гидравлический прыжок на сдвиге потока. Пусть при $X < 0$ в слое $0 \leq Y \leq h_1$ задано стационарное течение со скоростью $u_1(Y) = U \exp(\gamma Y)$, $v_1(Y) = 0$ (U — положительная постоянная, $\gamma = \beta h_1^{-1}$, $\beta = \text{const}$). Закон соответствия точек входа и выхода траекторий $Y_2(Y_1)$ на фронте определяется как решение задачи

$$dY_2/dY_1 = u_1(Y_1)(u_1^2(Y_1) - K)^{-1/2}, \quad Y_2(0) = 0.$$

В результате интегрирования получим соотношение

$$\exp(\gamma Y_1) = \operatorname{ch}(\gamma Y_2) + (1 - K_1)^{1/2} \operatorname{sh}(\gamma Y_2) \quad (K_1 = KU^{-2})$$

и выражение для скорости за фронтом ($X > 0$)

$$(2.11) \quad u_2(Y_2) = U((1 - K_1)^{1/2} \operatorname{ch}(\gamma Y_2) + \operatorname{sh}(\gamma Y_2)).$$

Условие сверхкритичности потока перед фронтом (2.9а) эквивалентно неравенству

$$F_1^{-2} < 2\beta(1 - \exp(-2\beta))^{-1} \quad (F_1 = U(gh_1)^{-1}).$$

Полученные соотношения позволяют вычислить

$$\begin{aligned} F(K) - F(0) &= (2\beta)^{-1} h_1 U^2 [e^\beta (e^{2\beta} - K_1)^{1/2} - (1 - K_1)^{1/2} - \\ &\quad - K_1 \ln\{(e^\beta + (e^{2\beta} - K_1)^{1/2})(1 + (1 - K_1)^{1/2})^{-1}\} + \\ &\quad + \beta^{-1} F_1^{-2} (\ln\{(e^\beta + (e^{2\beta} - K_1)^{1/2})(1 + (1 - K_1)^{1/2})^{-1}\})^2 - e^{2\beta} + 1 - \beta F_1^{-2}]. \end{aligned}$$

При $\beta > 0$ значению $K = K_* = U^2$ соответствует $K_1 = 1$. Пусть $\beta = \ln 3$. Неравенство $F(K_*) - F(0) > 0$ выполняется для чисел Фруда F_1 , удовлетворяющих неравенствам $1,17468 > F_1 > 0,63604$. В этом случае уравнение $F(K) - F(0) = 0$ имеет единственный корень K_1 в интервале $(0,1)$. Тогда в области за скачком ($X > 0$) $u_2(Y) = 0$, $u_2(Y)$ определяется формулой (2.11), а глубина слоя жидкости — формулой

$$h_2 = h_2(K_1) = \beta^{-1} h_1 \ln\{(e^\beta + (e^{2\beta} - K_1)^{1/2})(1 + (1 - K_1)^{1/2})^{-1}\} \quad (\beta = \ln 3).$$

Если же $F_1 > 1,17468$, то полная глубина слоя жидкости за скачком определяется выражением

$$h_2 = [h_1^2(1) - 2g^{-1}(F(U^2) - F(0))]^{1/2}.$$

При $0 < Y < h_2 - h_2(1)$ $u_2(Y) = 0$, $v_2(Y) = 0$. В слое $h_2 - h_2(1) < Y < h_2$ горизонтальная компонента скорости $u_2(Y)$ задается формулой (2.11), где Y нужно заменить величиной $Y + h_2(1) - h_2$, вертикальная компонента скорости $v_2(Y) = 0$. Второе решение описывает течение с гидравлическим прыжком и застойной зоной вблизи дна.

Рассмотрим вопрос об определении параметров течения $u_2(x, t, \lambda)$, $H_2(x, t, \lambda)$ за фронтом слабого гидравлического прыжка по заданным параметрам $u_1(x, t, \lambda)$, $H_1(x, t, \lambda)$, D . Здесь удобно считать $K = \varepsilon \ll 1$. Если представить $u_2 - D$, H_2 в виде

$$u_2 - D = u_1 - D + \varepsilon \delta u_2, \quad H_2 = H_1 + \varepsilon \delta H_2$$

(δu_2 , δH_2 — искомые возмущения) и удовлетворить соотношениям на разрыве с точностью до первого порядка, то имеем

$$(2.12) \quad \delta u_2 = - (2(u_1 - D))^{-1}, \quad \delta H_2 = 2^{-1} H_1 (u_1 - D)^{-2}.$$

При этом необходимо $D = \bar{\kappa}_1^{-1}$, где $\bar{\kappa}_1^{-1}$ — корень характеристического уравнения (2.10), вычисленный на состоянии 1. В эйлеровых координатах получаются следующие представления для параметров течения за скачком:

$$\begin{aligned} u_2(Y) &= u_1(Y) - 2^{-1} \varepsilon ((u_1(Y) - D)^{-1} + u_{1Y}(Y)) \int_0^Y \frac{d\eta}{(u_1(\eta) - D)^2}, \\ h_2 &= h_1 + (2g)^{-1} \varepsilon. \end{aligned}$$

Соответствие точек на скачке задано уравнением:

$$Y_2 = Y_1 + \frac{\varepsilon}{2} \int_0^{Y_1} \frac{d\eta}{(u_1(\eta) - D)^2}.$$

В [6] было показано, что при определенных условиях (условиях гиперболичности) система уравнений (1.11) приводится к инвариантам Римана

$$R_i + uR_x = 0, \omega_i + u\omega_x = 0, r_i + k'r_{ix} = 0 \quad (i = 1, 2).$$

Здесь $R(x, t, \lambda)$, $\omega(x, t, \lambda)$, $r_i(x, t)$ определены формулами

$$R = u(\lambda) - g \int_0^1 \frac{H(v)dv}{u(v) - u(\lambda)}, \omega = u_\lambda H^{-1}, r_i = k' - g \int_0^1 \frac{H(v)dv}{u(v) - k^i}$$

(k^1, k^2 — корни характеристического уравнения, зависимость функций от переменных x, t в обозначениях не указана для краткости записи). В [8] при анализе простых волн (частных решений системы уравнений (1.11), имеющих вид $u = u(\alpha(x, t), \lambda)$, $H = H(\alpha(x, t), \lambda)$, $\alpha_t + k^1 \alpha_x = 0$) было показано, что в области простой волны $R = R(\lambda)$, $\omega = \omega(\lambda)$, $r_2 = r_2^0 = \text{const}$, если перед простой волной $R = R(\lambda)$, $\omega = \omega(\lambda)$, $r_i = \text{const}$ (сохранение инвариантов Римана R, ω, r_2 в простой волне, распространяющейся с характеристической скоростью k^1).

Для рассматриваемого течения за слабым гидравлическим прыжком

$$(2.13) \quad \delta R_2 = \delta u_2 - g \int_0^1 \frac{\delta H_2(v)dv}{u_1(v) - u_1(\lambda)} + g \int_0^1 \frac{H_1(v)(\delta u_2(v) - \delta u_2(\lambda))}{(u_1(v) - u_1(\lambda))^2} dv = 0,$$

$$\delta \omega = (\delta u_2)_\lambda H_1^{-1} - u_{1\lambda} H_1^{-2} \delta H_2 = 0,$$

$$\delta r_2 = -g \int_0^1 \frac{\delta H_2(v)dv}{u_1(v) - k_1^2} + g \int_0^1 \frac{H_1(v) \delta u_2 dv}{(u_1(v) - k_1^2)^2} = 0.$$

Равенства (2.13) проверяются непосредственно с использованием формул (2.12) и уравнения (2.10), корнями которого являются k_1^1, k_1^2 . Следовательно, при переходе через слабый гидравлический прыжок, обращенный влево, изменения инвариантов Римана R, ω, r_2 — величины более высокого порядка по сравнению с амплитудой прыжка. Здесь, как и в газовой динамике, имеется аналогия между поведением простых волн и разрывов малой амплитуды.

Предложенная модель гидравлического прыжка описывает новый тип гидродинамических разрывов, на которых претерпевают скачок не только скорость, давление, но и эйлерова координата частицы. В реальном течении переход частицы на новый уровень по высоте происходит на конечном расстоянии, но размер зоны перехода мал по сравнению с характерными масштабами длинноволновых процессов. Поэтому в приближенной теории переход моделируется разрывом траектории. Анализ модели показывает, что для описания разрывов небольшой амплитуды она вполне приемлема. В диапазоне больших амплитуд эта модель указывает на возможность изменения структуры течения в зоне за прыжком. Для выяснения соответствия теории и эксперимента нужны экспериментальные данные с измерением профилей скорости по глубине.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект 93—013—17621).

ЛИТЕРАТУРА

1. Benney D.J. Some properties of long waves // Stud. Appl. Math. — 1973. — V. 52. — P. 45.
2. Захаров В.Е. Уравнения Бенни и квазиклассическое приближение в методе обратной задачи // Функцион. анализ и его прил. — 1980. — Т. 11, вып. 2. — С. 15.
3. Varley E., Blythe P.A. Long eddies in sheared flows // Stud. Appl. Math. — 1983. — V. 68. — P. 103.
4. Freeman N.C. Simple waves on shear flows: similarity solutions // J. Fluid Mech. — 1972. — V. 56, N 2. — P. 257.
5. Blythe P.A., Kazakia Y., Varley E. The interaction of large amplitude shallow water waves with an ambient shear flow // Ibid. — P. 241.

6. Тешуков В.М. О гиперболичности уравнений длинных волн // ДАН СССР. — 1985. — Т. 284, № 3. — С. 555.
7. Спицын И.П., Соколова В.А. Общая и речная гидравлика. — Л.: Гидрометеиздат, 1990.
8. Teshukov V.M. Long wave approximation for vortex free boundary flows // Intern. Series of Numer. Mathematics. — Basel, 1991. — V. 99. — P. 413.

г. Новосибирск

Поступила 22/11 1994 г.

УДК 532.5:681.7

Ю.Д. Чашечкин, Е.В. Гуменник, Е.Я. Сысоева

ТРАНСФОРМАЦИЯ ПЛОТНОСТНОГО ПОЛЯ ТРЕХМЕРНЫМ ТЕЛОМ, ДВИЖУЩИМСЯ В НЕПРЕРЫВНО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

Введение. Возмущения, вносимые в стратифицированную жидкость обтеканием препятствий различного происхождения, интенсивно изучаются в натуральных условиях [1] методами математического [2] и физического моделирования [3]. Качественно результаты неплохо согласуются при исследовании структуры крупномасштабных явлений, в частности присоединенных (подветренных) внутренних волн [4]. Однако количественное согласие между представлениями теории и результатами измерений явно недостаточное. Одна из причин расхождения расчетов и экспериментов может быть связана с нарушением предположения о слабом влиянии тела на структуру стратификации в его окрестности (в расчетах обычно задается распределение частоты плавучести по глубине).

В серии экспериментальных работ показано, что при ламинарном обтекании как двумерных [5], так и трехмерных тел [6] на границах следа образуются достаточно тонкие высокоградиентные прослойки. Физическая природа явления обострения градиента плотности и расщепления масштабов пространственной изменчивости полей различной физической природы связана с влиянием молекулярных эффектов, так называемой дисцерсией среды — различием коэффициентов молекулярной диффузии соли и импульса, на пространственную структуру и устойчивость течений непрерывно стратифицированной жидкости. Этот эффект наблюдается даже в самом простом типе пограничного течения, индуцированного диффузией в покоящейся [7] или медленно движущейся непрерывно стратифицированной среде [8], и может сохраняться на больших расстояниях от границы при отрыве расщепленных плотностного и динамического пограничных слоев от тела.

Экспериментальное изучение эволюции плотностных полей в стратифицированных средах должно проводиться с применением адекватных методов исследования, обладающих высокой чувствительностью, пространственным разрешением, быстродействием и широким динамическим диапазоном. Для получения оперативной количественной информации о профилях градиента плотности использовался бесконтактный оптический метод [9], основанный на регистрации в реальном масштабе времени мгновенного значения угла рефракции узкого зондирующего лазерного луча, сканирующего исследуемый объект. При этом в объект не вносятся никаких возмущений, а временное разрешение (минимальное время между двумя профилями) ограничивается не физическими свойствами этого объекта, как в случае использования контактных датчиков [10], а аппаратными характеристиками измерительной системы и может быть существенно меньше 10^{-2} с.

© Ю.Д. Чашечкин, Е.В. Гуменник, Е.Я. Сысоева, 1995