

УДК 532.536

## РАЗВИТИЕ ВОЗМУЩЕНИЙ НА ПОВЕРХНОСТИ ВЯЗКОУПРУГОЙ ЖИДКОСТИ

Ю. А. Березин, Л. А. Сподарева\*

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, 630090 Новосибирск

\*Новосибирский военный институт, 630117 Новосибирск

Исследована устойчивость слоя вязкоупругой жидкости на наклонной плоскости в рамках модели с зависящей от времени “памятью” при наличии поверхностного натяжения. Аналитически и численно показано, что в зависимости от величины числа Рейнольдса такие течения могут быть устойчивыми или неустойчивыми. Найдены профили свободной поверхности в зависимости от чисел Рейнольдса и Вебера.

Описание свойств неньютоновских вязкоупругих жидкостей, называемых жидкостями второго порядка, часто проводится на основе модели с затухающей “памятью” [1–4]. В работах [5–7] показано, что поверхность слоя такой жидкости при числах Рейнольдса, превышающих некоторое критическое значение, становится неустойчивой по отношению к малым длинноволновым возмущениям, причем критическое число Рейнольдса для вязкоупругой жидкости меньше, чем для ньютоновской. В [8] изучены процессы формирования солитонов на свободной поверхности пленки жидкости второго порядка, стекающей по наклонной плоскости, при числах Рейнольдса больше критического. С помощью разложения исходных уравнений по степеням малого параметра (отношения толщины слоя к характерному пространственному масштабу вдоль слоя) получено нелинейное уравнение для формы свободной поверхности с учетом поверхностного натяжения. Для больших чисел Вебера, характеризующих отношение сил поверхностного натяжения к силам тяжести, авторы [8] исследовали стационарные решения указанного уравнения, используя методы качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, проанализировав характер особых точек и траекторий в фазовом пространстве. Кроме того, в приближении малых чисел Вебера, малых отклонений формы свободной поверхности от невозмущенной и малой надкритичности авторы [8] свели полученное нестационарное уравнение к уравнению Кортевега — де Фриза, в котором длина дисперсии возрастает с увеличением эффектов вязкоупругости, а также провели серию численных расчетов по известной конечно-разностной схеме с перешагиванием, использованной в первых работах по численному решению этого уравнения. Прослежено образование солитонов из начальных возмущений вида  $\cos(\pi x)$  при периодических, судя по полученным результатам, граничных условиях. Подробное изложение результатов аналитического и численного исследования уравнения Кортевега — де Фриза в широком диапазоне определяющих параметров, а также вычислительные алгоритмы представлены, например, в [9–12]. Подобная задача о существовании солитонов на поверхности тонкого слоя несжимаемой ньютоновской жидкости изучена в [13] с использованием качественного и численного анализа уравнений стационарной структуры.

Целью настоящей работы является изучение течения типа гидравлического скачка на свободной поверхности пленки вязкоупругой жидкости, движущейся по наклонной плоскости, в широком диапазоне чисел Вебера и отклонений чисел Рейнольдса от критического значения.

**Уравнения и граничные условия.** Рассмотрим двумерное движение слоя несжимаемой вязкоупругой жидкости по наклонной плоскости, составляющей угол  $\alpha$  с горизонталью. Исходные уравнения в тензорных обозначениях имеют вид

$$\rho \frac{dv_i}{dt} = \rho g_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}, \quad \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = 0,$$

где  $\rho = \text{const}$  — плотность жидкости;  $g_i$  — компоненты силы тяжести;  $v_i$  — компоненты скорости;  $\tau_{ij}$  — компоненты тензора напряжений, которые записываются в виде

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \beta \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial v_k}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right) + \gamma \left( \frac{\partial a_i}{\partial x_j} + \frac{\partial a_j}{\partial x_i} + 2 \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right).$$

Здесь  $p$  — давление;  $\eta$  — динамическая вязкость;  $\beta$  и  $\gamma$  — характеристики жидкости;  $a_i = \partial v_i / \partial t + v_j \partial v_i / \partial x_j$  — компоненты ускорения;  $(d/dt)_i = \partial v_i / \partial t + v_k \partial v_i / \partial x_k$ ; нижние индексы принимают значения 1, 2, 3, по повторяющимся индексам проводится суммирование.

Введем декартовы координаты с осью  $x$  вдоль и осью  $y$  поперек наклонной плоскости и безразмерные переменные, выбрав следующие масштабы:  $L_0, H_0$  — характерные расстояния вдоль и поперек слоя соответственно,  $t_0 = L_0/u_0$  — время,  $p_0 = \rho g H_0 \sin \alpha$ ,  $\tau_0 = \rho u_0^2$ , где  $u_0 = \rho g H_0^2 \sin \alpha / (2\eta)$  — продольная скорость стационарного течения на поверхности слоя. Тогда рассматриваемое здесь движение жидкости описывается уравнениями

$$u_x + v_y = 0, \quad \frac{du}{dt} = \frac{gL_0}{u_0^2} \sin \alpha + (\tau_{xx})_x + \varepsilon^{-1} (\tau_{xy})_y,$$

$$\varepsilon \frac{dv}{dt} = -\frac{gL_0}{u_0^2} \cos \alpha + (\tau_{xy})_x + \varepsilon^{-1} (\tau_{yy})_y,$$

компоненты тензора напряжений равны

$$\tau_{xx} = -p \frac{\sin \alpha}{\text{Fr}} + \frac{2\varepsilon}{\text{Re}} u_x + N[(u_y + \varepsilon^2 v_x)^2 + 4\varepsilon^2 u_x^2] - 2\varepsilon^2 M \left[ \left( \frac{du}{dt} \right)_x + u_x^2 + \varepsilon^2 v_x^2 \right],$$

$$\tau_{xy} = \frac{u_y + \varepsilon^2 v_x}{\text{Re}} - \varepsilon M \left[ \left( \frac{du}{dt} \right)_y + 2u_x u_y + \varepsilon^2 (2v_x v_y + \left( \frac{dv}{dt} \right)_x) \right],$$

$$\tau_{yy} = -p \frac{\sin \alpha}{\text{Fr}} + \frac{2\varepsilon}{\text{Re}} v_y + N[(u_y + \varepsilon^2 v_x)^2 + 4\varepsilon^2 v_y^2] - 2M \left[ u_y^2 + \varepsilon^2 (v_y^2 + \left( \frac{dv}{dt} \right)_y) \right],$$

где  $\varepsilon = H_0/L_0$ ;  $\text{Re} = u_0 H_0/\nu$ ;  $N = \beta/(\rho H_0^2)$ ;  $M = -\gamma/(\rho H_0^2)$ ;  $\text{Fr} = u_0^2/(gH_0)$ ;  $\nu$  — кинематическая вязкость. Дополним эти уравнения граничными условиями на дне и свободной поверхности жидкости

$$u = v = 0 \quad \text{при} \quad y = 0;$$

$$p_s = 0, \quad p_n = -\frac{\varepsilon^2 \text{We}}{(1 + \varepsilon^2 H_x^2)^{3/2} \sin \alpha}, \quad H_t + u H_x = v \quad \text{при} \quad y = H(x, t),$$

где  $p_s = \tau_{xy} \cos 2\varphi + (1/2)(\tau_{yy} - \tau_{xx}) \sin 2\varphi$ ,  $p_n = \tau_{yy} \cos^2 \varphi + \tau_{xx} \sin^2 \varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi$  — касательная и нормальная к свободной поверхности составляющие тензора напряжений;  $\text{tg} \varphi = \varepsilon H_x$ ;  $\text{We} = \sigma/(\rho g H_0^2)$  — число Вебера;  $\sigma$  — коэффициент поверхностного натяжения;  $H(x, t)$  — функция, описывающая форму свободной поверхности.

Предполагая, что толщина слоя значительно меньше масштаба продольных возмущений свободной поверхности, и используя известную процедуру разложения уравнений и граничных условий по параметру  $\varepsilon \ll 1$ , авторы [8] вывели уравнение для формы свободной поверхности с точностью до слагаемых порядка  $\varepsilon^3$ . Отметим, что константа  $\beta$  в нем отсутствует в силу условия несжимаемости жидкости. Поверхностное натяжение в

этом уравнении содержится в виде слагаемого, пропорционального величине  $\varepsilon^3 \text{We}$ . В случае больших чисел Вебера ( $\text{We} \sim O(\varepsilon^{-2})$ ) эффект поверхностного натяжения будет иметь первый порядок по малому параметру  $\varepsilon$ . Тогда с точностью до слагаемых порядка  $\varepsilon$  изучаемое в [8] и в данной работе уравнение для формы свободной поверхности принимает вид

$$H_t + 2H^2 H_x + (2/3)\varepsilon[A(H)H_x + B(H)H_{xxx}]_x = 0, \quad (1)$$

где

$$A(H) = [2(2/5)H^2 + M]\text{Re} H - \text{ctg} \alpha]H^3, \quad B(H) = \varepsilon^2 \text{We} H^3 / \sin \alpha.$$

**Нестационарные решения модельного уравнения.** Согласно уравнению (1) форма свободной поверхности слоя вязкоупругой жидкости изменяется вследствие нелинейного переноса со скоростью  $U = 2H^2$ ; нелинейной диффузии, которая может быть как положительной, так и отрицательной в зависимости от знака величины  $A(H)$ ; стабилизирующего воздействия сил поверхностного натяжения. Линеаризуя (1) относительно невозмущенного уровня  $H = 1 + h$ ,  $h \ll 1$  и представляя решение в виде  $h \sim \exp i[kx - (\omega_r + i\gamma)k]$ , получим, что фазовая скорость малых возмущений  $c = \omega_r/k = 2$  не зависит от волнового числа, а инкремент малых возмущений равен

$$\gamma = (2/3)\varepsilon k^2 [2(2/5 + M)\text{Re} - \text{ctg} \alpha - \varepsilon^2 \text{We} k^2 / \sin \alpha]$$

( $k$  — волновое число). Из этой формулы следует, что малые периодические возмущения устойчивы ( $\gamma < 1$ ) или неустойчивы ( $\gamma > 1$ ) в зависимости от того, меньше или больше число Рейнольдса по сравнению с критическим значением  $\text{Re}_* = 5 \text{ctg} \alpha / (4 + 10M)$ . Интервал волновых чисел неустойчивых возмущений является конечным:  $\Delta k = 0 \div k_*$ ,

$$k_*^2 = \frac{2(2 + 5M)(\text{Re} - \text{Re}_*) \sin \alpha}{5\varepsilon^2 \text{We}}.$$

Максимальное значение инкремента

$$\gamma_{\max} = \gamma(k_{\max}) = \frac{2(2 + 5M)^2 (\text{Re} - \text{Re}_*)^2 \sin \alpha}{75\varepsilon \text{We}}$$

достигается при

$$k_{\max}^2 = \frac{(2 + 5M)(\text{Re} - \text{Re}_*) \sin \alpha}{5\varepsilon^2 \text{We}}.$$

С ростом параметра вязкоупругости  $M$  критическое число Рейнольдса уменьшается, а инкремент и интервал неустойчивых волновых чисел увеличиваются. Увеличение числа Вебера не приводит к изменению критического числа Рейнольдса, но максимальный инкремент уменьшается обратно пропорционально  $\text{We}$ , а интервал неустойчивости по волновым числам — как  $\text{We}^{-1/2}$ .

Для изучения эволюции возмущений конечной амплитуды необходимо применять численные методы. Решение уравнения (1) проводилось с использованием явной конечно-разностной схемы, в которой перенос аппроксимировался односторонней разностью против потока, так как коэффициент при производной  $H_x$  равен  $2H^2$  и всегда положителен, а остальные слагаемые аппроксимировались центральными разностями:

$$H1_i = H_i - 2H_i^2 \frac{\delta t}{\delta x} (H_i - H_{i-1}) - \varepsilon \frac{\delta t}{\delta x^4} (a_i H_{i-2} - b_i H_{i-1} + c_i H_i - d_i H_{i+1} + e_i H_{i+2}), \quad (2)$$

где  $H1_i \equiv H_i^{n+1}$ ;  $H_i \equiv H_i^n$ ;  $\delta t$  — шаг по времени;  $\delta x$  — шаг по координате;  $a_i = B_{i-1/2}$ ;  $e_i = B_{i+1/2}$ ;  $b_i = B_{i+1/2} + 3B_{i-1/2} - A_{i-1/2}\delta x^2$ ;  $c_i = 3(B_{i+1/2} + B_{i-1/2}) - (A_{i+1/2} + A_{i-1/2})\delta x^2$ ;  $d_i = 3B_{i+1/2} + B_{i-1/2} - A_{i+1/2}\delta x^2$ ;  $(A, B)_{i\pm 1/2} = (1/2)[(A, B)_i + (A, B)_{i\pm 1}]$ .

Так как в уравнении (1) высшая производная четвертая, то явная схема (2) устойчива только при выполнении условия  $\delta t / \delta x^4 < 1$ , что требует достаточно малых временных шагов. В то же время использование для повышения устойчивости какой-либо неявной схемы, например схемы Кранка — Николсона, приводит к необходимости решать большие системы алгебраических уравнений для сеточных функций с пятидиагональной матрицей. При этом стандартный метод пятиточечной прогонки в рассматриваемом случае требует ограничения на временной шаг, для того чтобы обеспечить диагональное преобладание матрицы и соответственно устойчивость прогонки. Хотя это ограничение менее жесткое, чем для явной схемы, алгоритм усложняется, поэтому была выбрана схема (2).

Для того чтобы проследить движение и эволюцию формы свободной поверхности гидравлического скачка в вязкоупругой жидкости, на левой границе расчетной области  $x = 0 \div x_{\max}$  задается постоянный уровень  $H(0, t) = 1 + b$ ,  $b > 0$ , на правой — невозмущенное течение  $H(x_{\max}, t) = 1$ ; кроме того, на обеих границах расчетной области заданы условия  $H_x = H_{xx} = 0$ . Начальное возмущение выбрано в форме сглаженной ступеньки. Если наклон ступеньки небольшой, то сначала в развитии возмущения определяющую роль играет перенос возвышения свободной поверхности со скоростью  $c = 2H^2$ , зависящей от толщины слоя жидкости. Поскольку  $dc/dH > 0$ , скорость участков профиля возмущения с более высоким уровнем жидкости больше, и с течением времени фронт возмущения становится круче. Этот рост крутизны профиля соответствует увеличению производных по  $x$  функции  $H(x, t)$ , в результате чего становится существенным вклад слагаемых, описывающих диффузию и эффект поверхностного натяжения.

При  $Re < Re_*$  ширина фронта возмущения увеличивается, поэтому появляется возможность образования сглаженного скачка с постоянной шириной. Расчеты показывают, что при малом поверхностном натяжении профиль возмущения монотонный. Отметим также, что фронт содержит некоторое протяженное вниз по потоку “подножье”, являющееся следствием нелинейного характера диффузии. Если поверхностное натяжение достаточно велико ( $We \sim \varepsilon^{-2}$ ), то по-прежнему происходит постепенное формирование сглаженного скачка с постоянной шириной фронта, но на профиле вверх и вниз по течению от точки максимальной крутизны появляются возмущения. Так, вверх по течению высота свободной поверхности в небольшой области перед зоной скачка выше, чем в возмущенной части потока далеко за фронтом, а вниз по течению — ниже, чем в невозмущенном потоке далеко перед фронтом.

При  $Re > Re_*$  возникает неустойчивость пространственной структуры скачка, но эта неустойчивость может стабилизироваться силами поверхностного натяжения. На рис. 1 представлены рассчитанные профили свободной поверхности вязкоупругой жидкости для  $Re = 2,5 > Re_*$  и  $M = 0,1$  при нескольких значениях числа Вебера (линии 1–3 соответствуют форме свободной поверхности в моменты времени  $t = 0; 5; 10$ ). Когда поверхностное натяжение отсутствует (рис. 1,а), течение сильно неустойчиво и форма профиля имеет ярко выраженный пилообразный характер. Отметим, что такая изрезанность профиля является следствием именно физической, а не численной неустойчивости, поскольку каждая осцилляция содержит не менее десяти точек конечно-разностной сетки, число временных шагов составляет порядка сотни тысяч. Эффект поверхностного натяжения проявляется в стабилизации неустойчивости и заметном сглаживании профиля распространяющегося возмущения. Толщина слоя в области за скачком практически не меняется. Вблизи скачка при подходе к нему из области вверх по течению на профиле образуются пространственные осцилляции, причем амплитуда передней не мала (рис. 1,б). Крутизна фронта сглаженного скачка больше крутизны профиля начального возмущения. Перед фронтом при подходе к нему со стороны невозмущенного потока формируется небольшая область, где уровень жидкости ниже невозмущенного. С увеличением числа Вебера (рис. 1,в,г) немонотонная

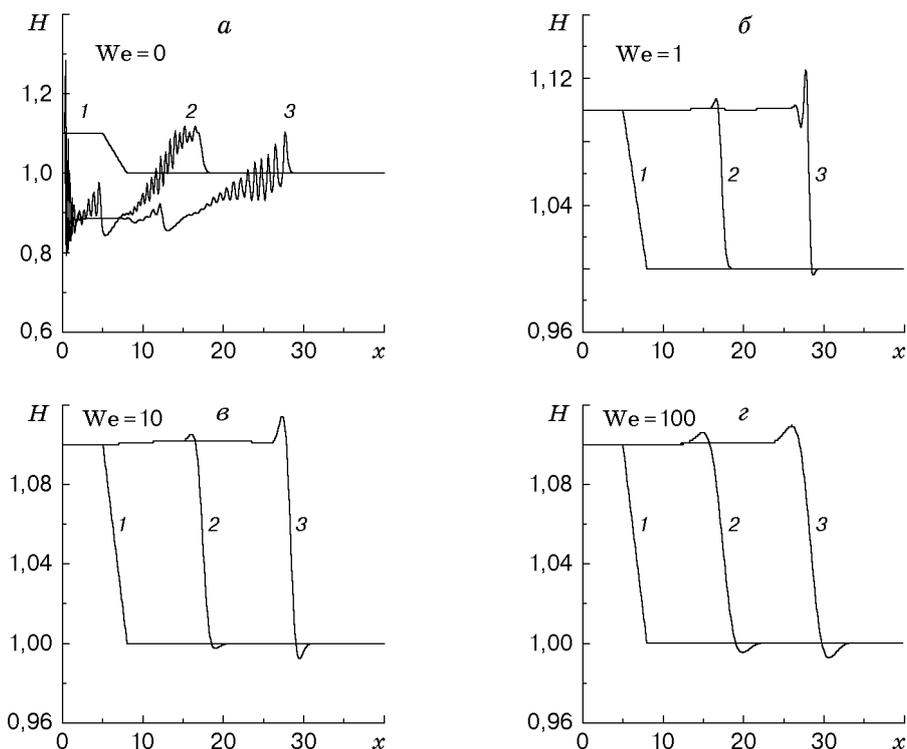


Рис. 1

структура фронта возмущений сохраняется. При этом увеличивается ширина области осцилляций, уменьшается амплитуда осцилляций за фронтом и увеличивается “провал” поверхности жидкости перед фронтом. Крутизна профиля свободной поверхности в области скачка уменьшается при переходе к большим числам Вебера.

Были проведены также расчеты эволюции возмущений указанной выше формы при увеличении числа Рейнольдса. На рис. 2 представлены результаты, соответствующие параметру вязкоупругости  $M = 0,1$ , числу Вебера  $We = 100$  и числам Рейнольдса  $Re = 5$  (рис. 2,*a*) и  $Re = 10$  (рис. 2,*б*). Сравнение профилей свободной поверхности жидкости при  $Re = 2,5$  и  $Re = 5$  показывает, что с увеличением числа Рейнольдса наблюдаются рост возвышения поверхности за скачком и большее углубление жидкости перед скачком. Кроме того, по мере продвижения в область перед скачком толщина слоя после указанного уменьшения становится больше невозмущенной, принимая затем значение  $H = 1$ .

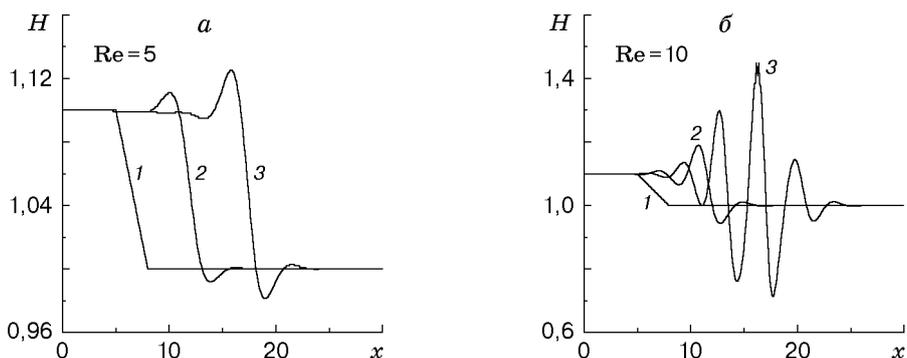


Рис. 2

При этом крутизна фронта увеличивается. Из рис. 2,б следует, что форма свободной поверхности приобретает вид плавных пространственных осцилляций большой амплитуды:  $H_{\max} \approx 1,45$ ,  $H_{\min} \approx 0,7$ . С течением времени возмущенная область течения становится похожей на набор “солитонов”, полученных в [8] при решении уравнения Кортевега — де Фриза с периодическими начальными и граничными условиями, причем их амплитуды растут монотонно, и в момент времени  $t = 10$  максимальная толщина слоя в передней осцилляции  $H_{\max} \approx 1,4$ , а минимальная толщина слоя  $H_{\min} \approx 0,5$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Coleman B. D., Noll W.** An approximation theorem for functionals, with applications in continuum mechanics // Arch. Rational Mech. Anal. 1960. V. 6. P. 355–370.
2. **Шульман З. П., Берковский Б. М.** Пограничный слой неньютоновских жидкостей. Минск: Наука и техника, 1966.
3. **Astarita G., Marucci G.** Principles of non-Newtonian fluid mechanics. L.: McGraw Hill, 1974.
4. **Уилкинсон У. Л.** Неньютоновские жидкости. М.: Мир, 1964.
5. **Gupta A. S.** Stability of a visco-elastic liquid film flowing down an inclined plane // J. Fluid Mech. 1967. V. 28. P. 17–28.
6. **Gupta A. S., Rai L.** Note on the stability of a visco-elastic liquid film flowing down an inclined plane // J. Fluid Mech. 1968. V. 33. P. 87–91.
7. **Dandapat B. S., Gupta A. S.** Long waves on a layer of a visco-elastic fluid down an inclined plane // Rheol. Acta. 1978. V. 17. P. 492–499.
8. **Dandapat B. S., Gupta A. S.** Solitary waves on the surface of a visco-elastic fluid running down an inclined plane // Rheol. Acta. 1997. V. 36. P. 135–143.
9. **Карпман В. И.** Нелинейные волны в диспергирующих средах. М.: Наука, 1973.
10. **Березин Ю. А.** Численное исследование нелинейных волн в разреженной плазме. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1977.
11. **Накоряков В. Е., Покусаев Б. Г., Шрейбер И. Р.** Распространение волн в газо- и парожидкостных средах. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1983.
12. **Березин Ю. А., Федорук М. П.** Моделирование нестационарных плазменных процессов. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 1993.
13. **Pumir A., Manneville P., Pomeau Y.** On solitary waves running down an inclined plane // J. Fluid Mech. 1983. V. 135. P. 27–50.

*Поступила в редакцию 12/VII 1999 г.*

---