

## ИССЛЕДОВАНИЕ СПЕКТРА КОРОТКОВОЛНОВЫХ ВИХРЕЙ ГЁРТЛЕРА В ГАЗЕ

В. В. Боголепов

Центральный аэрогидродинамический институт, 140160 Жуковский

Исследована линейная стадия коротковолновых вихрей Гёртлера в пограничном слое около вогнутой поверхности на режиме слабого вязко-невязкого гиперзвукового взаимодействия при больших числах Рейнольдса и Гёртлера. Принималось, что газ является совершенным, а вязкость линейным образом зависит от энтальпии. Получено, что при нулевой температуре поверхности нейтральные вихри располагаются вблизи нее, при нагреве поверхности они удаляются от нее, а все растущие вихри располагаются вблизи поверхности. Показано, что инкремент вихрей имеет максимум, а нагревание поверхности оказывает на вихри стабилизирующее воздействие.

В [1–6] построена асимптотическая (при больших числах Рейнольдса и Гёртлера) теория вихрей Гёртлера [7] в жидкости. Исследованы основные режимы в порядке возрастания длины волны вихрей:

- нейтральные коротковолновые вихри, всплывшие в основную часть пограничного слоя;
- пристеночные коротковолновые вихри с максимальным инкрементом;
- вихри с длиной волны, соизмеримой с толщиной пограничного слоя;
- длинноволновая первая мода, индуцирующая трехслойное возмущенное течение;
- длинноволновые нейтральные вихри с максимальной длиной волны, для которых необходимо учитывать «нарастание» пограничного слоя.

Для всех режимов построены модельные краевые задачи, определены параметры подобия, в линейном приближении получены численные или аналитические решения. Для отдельных режимов получены нелинейные решения [8–10].

Современное развитие гиперзвуковой летательной техники инициирует исследования вихрей Гёртлера в газе. Такие упорядоченные вихревые структуры могут существенно влиять на теплообмен в пограничном слое, структуру течений с искривлением потока (например, при его присоединении [11]). В ранних работах, например [12], исследовалось влияние различных параметров течения на собственные решения линеаризованных уравнений Навье — Стокса. Установлено, что учет сжимаемости, увеличение коэффициента вязкости или повышение температуры поверхности оказывают стабилизирующее действие на вихри, а неблагоприятный градиент давления вызывает обратное действие. Очевидно, при умеренных числах Маха набегающего потока структура вихрей не должна существенно отличаться от их структуры в жидкости. Так, в [13, 14] исследовались длинноволновые вихри в газе, для которых необходимо учитывать «нарастание» пограничного слоя. Установлено, что с ростом числа Маха неустойчивые вихри смещаются к внешней границе пограничного слоя [14]. В [15, 16] исследовалась асимптотическая структура вихрей с длиной волны, соизмеримой или превышающей толщину пограничного слоя, когда могут сказываться эффекты изменения плотности газа. Однако принято считать, что основное отличие гиперзвукового пограничного слоя от пограничного слоя в жидкости заключается в наличии «температурного слоя согласования» (temperature adjustment layer) около внешней границы пограничного слоя, где температура от величины торможения быстро

уменьшается до значения в набегающем потоке [17–19]. В [19] учитывались также реальные свойства газа.

Коротковолновые вихри в пристеночной части пограничного слоя около сильно охлажденной поверхности в режиме слабого гиперзвукового вязко-невязкого взаимодействия [20] исследовались в [21, 22]. Было показано, что при нулевой температуре поверхности нейтральные вихри не всплывают в основную часть пограничного слоя, а приведенный инкремент амплитуды вихрей имеет максимум. При температуре поверхности, отличной от нуля, нейтральные вихри удаляются от нее.

1. Рассматривается обтекание вогнутой поверхности равномерным потоком вязкого газа при больших, но докритических числах Рейнольдса  $Re_\infty = \rho_\infty u_\infty L / \mu_\infty \gg 1$ , т. е. предполагается, что течение в пограничном слое остается ламинарным. Здесь  $L$  — некоторое расстояние вдоль потока, измеренное от передней кромки поверхности;  $\rho_\infty$ ,  $u_\infty$  и  $\mu_\infty$  — плотность, скорость и коэффициент вязкости газа в набегающем потоке. Принимается, что кривизна поверхности мала  $k = L/R \ll 1$  ( $R$  — радиус кривизны поверхности). В дальнейшем используются только безразмерные переменные. Для этого все линейные размеры относятся к  $L$ , давление  $p$  и энтальпия  $h$  — к  $\rho_\infty u_\infty^2$  и  $u_\infty^2$  соответственно, остальные функции течения — к своим значениям в набегающем потоке.

Предполагается, что число Маха в набегающем потоке велико  $M_\infty \gg 1$ . Известно [20], что торможение газа в пограничном слое при больших сверхзвуковых скоростях набегающего потока приводит к очень высоким температурам в нем и значительному увеличению его толщины. Поэтому необходимо оценивать величину возмущения давления за счет вытесняющего действия пограничного слоя. Принимается, что оно мало по сравнению с давлением в набегающем потоке  $\Delta p_1 \sim \delta / M_\infty \ll 1 / M_\infty^2$  ( $\delta$  — толщина пограничного слоя). Предполагается, что малым также является возмущение давления за счет искривленности поверхности  $\Delta p_2 \sim k / M_\infty \ll 1 / M_\infty^2$ . Отсюда следует, что для функций течения в пограничном слое с характерными размерами  $\Delta x \sim 1$  и  $\Delta y \sim \delta$  (ось  $x$  направлена по потоку вдоль поверхности, ось  $y$  — по нормали к ней) справедливы оценки режима слабого гиперзвукового вязко-невязкого взаимодействия [20]:

$$u \sim h \sim 1, \quad v \sim \delta, \quad p \sim \rho \sim \frac{1}{M_\infty^2}, \quad \mu \sim M_\infty^{-2}, \quad \delta \sim \frac{M_\infty^2}{Re_\infty^{1/2}}, \quad C_f \sim C_q \sim \frac{\delta}{M_\infty^2}, \quad (1.1)$$

где  $u$  и  $v$  — компоненты скорости вдоль осей  $x$  и  $y$ ;  $C_f$  и  $C_q$  — коэффициенты напряжения трения и теплового потока. При получении оценок (1.1) использовались линейная зависимость коэффициента вязкости от энтальпии

$$\mu = A M_\infty^2 h \quad (1.2)$$

и уравнение состояния для совершенного газа

$$\gamma p = (\gamma - 1) \rho h, \quad (1.3)$$

где  $A$  — некоторая постоянная;  $\gamma$  — отношение удельных теплоемкостей.

Полагая, что коэффициенты  $C_f$  и  $C_q$  сохраняют порядки своих величин в пристеночной части пограничного слоя при  $y/\delta \ll 1$ , из (1.1) и (1.2) можно получить

$$C_q = \frac{\delta}{M_\infty^2} \frac{B}{Pr} = \frac{\mu}{Re_\infty Pr} \left( \frac{\partial h}{\partial y} \right)_w, \quad C_f = \frac{\delta}{M_\infty^2} C = \frac{\mu}{Re_\infty} \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)_w, \quad (1.4)$$

$$h = \left( \frac{2B}{A} \frac{y}{\delta} + h_w^2 \right)^{1/2}, \quad u = \frac{C}{B} \left( \frac{2B}{A} \frac{y}{\delta} + h_w^2 \right)^{1/2} - \frac{C}{B} h_w,$$

где  $B$  и  $C$  — некоторые постоянные;  $Pr$  — число Прандтля;  $h_w$  — значение энтальпии газа около поверхности. При больших сверхзвуковых скоростях набегающего потока величина

$h_w$  на охлаждаемой поверхности будет малой ( $h_w \ll 1$ ). Это существенно меняет свойства пограничного слоя по сравнению со случаем при конечных значениях  $h_w$  [23].

При конечных значениях  $h_w$  ( $(y/\delta)^{1/2} \ll h_w \leq 1$ ) из соотношений (1.4) можно получить

$$h \approx h_w + \frac{B}{Ah_w} \frac{y}{\delta}, \quad u \approx \frac{C}{Ah_w} \frac{y}{\delta}. \quad (1.5)$$

Соотношения (1.5) показывают, что в этом случае пристеночная часть пограничного слоя является изотермической с линейным профилем продольной компоненты скорости.

Известно, что при некоторых условиях двумерный ламинарный пограничный слой около вогнутой поверхности может потерять устойчивость [7]. Тогда внутри пограничного слоя образуются вытянутые в продольном направлении стационарные вихри Гёртлера и течение из двумерного становится трехмерным. Такой переход происходит при превышении некоторого критического значения числа Гёртлера  $G_\infty = 2(\text{Re}_\infty^{1/2}/M_\infty^2)(L/R)$ . Ниже исследуется возмущенное течение при больших числах Гёртлера  $G_\infty \sim \alpha/\delta \gg 1$ ,  $k = \alpha K$ ,  $K \sim 1$ ,  $\alpha \ll 1$ , когда вихри заведомо существуют.

2. Исследуется возмущенная вихревая область течения с характерной толщиной  $\Delta y \ll \delta$  вблизи поверхности на расстоянии  $\Delta x \sim 1$  от ее передней кромки, в которой локализуются вихри. Предполагается, что потеря устойчивости пограничного слоя при образовании вихрей вызывает нелинейные возмущения функций течения в этой области (например,  $\Delta u \sim u$ ). Если через  $u_0$  и  $h_0$  обозначить порядки величин продольной компоненты скорости и энтальпии, то из уравнений (1.2) и (1.3) при учете (1.1) можно получить

$$p \sim 1/M_\infty^2, \quad \rho \sim 1/M_\infty^2 h_0, \quad \mu \sim M_\infty^2 h_0. \quad (2.1)$$

Из сопоставления порядков величин конвективных членов уравнений Навье — Стокса следует, что в поле центробежных сил дополнительно возникает возмущение давления

$$\Delta p \sim k\rho u^2 \Delta y \sim \alpha u_0^2 \Delta y / M_\infty^2 h_0, \quad (2.2)$$

которое индуцирует поперечную компоненту скорости  $w$  в направлении оси  $z$ , перпендикулярной к плоскости  $xy$ ,

$$w \sim (\Delta p / \rho)^{1/2} \sim \alpha^{1/2} u_0 \Delta y^{1/2}. \quad (2.3)$$

Принимая, что в общем случае поперечные размеры возмущенной области по осям  $y$  и  $z$  одинаковы по порядкам величин  $\Delta y \sim \Delta z$ , из уравнения неразрывности получим

$$v \sim w, \quad \Delta y \sim \Delta z \sim \alpha \Delta x^2 \quad (2.4)$$

( $\Delta x$  — характерная протяженность возмущенной области). Сопоставление порядков величин основных конвективных и диссипативных членов уравнений Навье — Стокса позволяет получить выражение

$$\Delta x^3 \sim \delta^2 h_0^2 / \alpha^2 u_0. \quad (2.5)$$

Оценки для поперечной компоненты скорости  $w$ , представляющей вихревые возмущения пограничного слоя, найдены из сопоставления порядков величин конвективных членов уравнений Навье — Стокса. Поэтому механизм конвекции является основным при возникновении вихрей Гёртлера.

При малых значениях  $h_w$  ( $0 \leq h_w \leq (\Delta y / \delta)^{1/2} \ll 1$ ) из соотношений (1.4) и оценок (2.4) и (2.5) следуют оценки для  $u_0$ ,  $h_0$  и характерных размеров возмущенной области

$$u_0 \sim h_0 \sim \left(\frac{\Delta y}{\delta}\right)^{1/2}, \quad \Delta x \sim \left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^{3/4} \ll 1, \quad \Delta y \sim \Delta z \sim \delta \left(\frac{\delta}{\alpha}\right)^{1/2} \ll \delta. \quad (2.6)$$

Если  $(\Delta y/\delta)^{1/2} \ll h_w \leq 1$ , то из (1.5), (2.4) и (2.5) следует, что

$$h_0 \sim h_w, \quad u_0 \sim \Delta y/\delta h_w, \quad \Delta x \sim (\delta h_w/\varepsilon)^{3/5} \ll 1, \quad \Delta y \sim \Delta z \sim \delta h_w (\delta h_w/\varepsilon)^{1/5} \ll \delta. \quad (2.7)$$

Оценки (2.6) и (2.7) показывают, что нагрев поверхности приводит к увеличению размеров вихрей. При  $h_w \sim 1$  из (2.7) получаются оценки для размеров возмущенной области в жидкости [3, 4, 6].

Оценки (2.1)–(2.5) позволяют ввести новые переменные и асимптотические разложения функций течения для возмущенной области

$$\begin{aligned} x &= (\delta^2 h_0^2/\varepsilon^2 u_0)^{1/3} x_1, \quad y = (\delta^4 h_0^4/\varepsilon u_0^2)^{1/3} y_1, \quad z = (\delta^4 h_0^4/\varepsilon u_0^2)^{1/3} z_1, \quad u = u_0 u_1 + \dots, \\ v &= (\varepsilon \delta^2 u_0^2 h_0^2)^{1/3} v_1 + \dots, \quad w = (\varepsilon \delta^2 u_0^2 h_0^2)^{1/3} w_1 + \dots, \quad \mu = M_\infty^2 h_0 \mu_1 + \dots, \\ \rho &= (1/M_\infty^2 h_0) \rho_1 + \dots, \quad h = h_0 h_1 + \dots, \quad p = 1/\gamma M_\infty^2 + (\varepsilon^{2/3} \delta^{4/3} u_0^{4/3} h_0^{1/3}/M_\infty^2) p_1 + \dots \end{aligned} \quad (2.8)$$

Подстановка (2.8) в уравнения Навье — Стокса и в (1.2), (1.3) и предельный переход при  $M_\infty \rightarrow \infty$ ,  $\delta \rightarrow 0$ ,  $\delta \ll \varepsilon \ll 1$ ,  $M_\infty \delta \ll 1$ ,  $M_\infty \varepsilon \ll 1$  показывают, что в первом приближении течение в возмущенной области описывается системой уравнений

$$\begin{aligned} (\rho_1 u_1)_{x_1} + (\rho_1 v_1)_{y_1} + (\rho_1 w_1)_{z_1} &= 0, \quad \rho_1 (u_1 u_{1x_1} + v_1 u_{1y_1} + w_1 u_{1z_1}) = (\mu_1 u_{1y_1})_{y_1} + (\mu_1 u_{1z_1})_{z_1}, \\ \rho_1 (u_1 v_{1x_1} + v_1 v_{1y_1} + w_1 v_{1z_1} + K u_1^2) + p_{1y_1} &= (\mu_1 v_{1y_1})_{y_1} + (\mu_1 v_{1z_1})_{z_1}, \\ \rho_1 (u_1 w_{1x_1} + v_1 w_{1y_1} + w_1 w_{1z_1}) + p_{1z_1} &= (\mu_1 w_{1y_1})_{y_1} + (\mu_1 w_{1z_1})_{z_1}, \\ \text{Pr} \rho_1 (u_1 h_{1x_1} + v_1 h_{1y_1} + w_1 h_{1z_1}) &= (\mu_1 h_{1y_1})_{y_1} + (\mu_1 h_{1z_1})_{z_1}, \quad (\gamma - 1) \rho_1 h_1 = 1, \quad \mu_1 = A h_1. \end{aligned} \quad (2.9)$$

На поверхности задаются обычные условия для компонент скорости и энтальпии

$$u_1 = v_1 = w_1 = 0, \quad h_1 = h_{1w} \quad (y_1 = 0), \quad (2.10)$$

где  $h_{1w} = h_w/h_0$ , а внешние и начальные краевые условия получаются из сращивания с решением для пристеночной части пограничного слоя (1.4)

$$\begin{aligned} u_1 \rightarrow \frac{C}{B} \left( \frac{2B}{A} y_1 + h_{1w}^2 \right)^{1/2} - \frac{C}{B} h_{1w}, \quad h_1 \rightarrow \left( \frac{2B}{A} y_1 + h_{1w}^2 \right)^{1/2}, \quad \rho_1 \rightarrow 1/(\gamma - 1) \left( \frac{2B}{A} y_1 + h_{1w}^2 \right)^{1/2}, \\ \mu_1 \rightarrow A \left( \frac{2B}{A} y_1 + h_{1w}^2 \right)^{1/2}, \quad v_1, w_1 \rightarrow 0, \quad p_{1y_1} \rightarrow -K \rho_1 u_1^2 \quad (x_1 \rightarrow -\infty \text{ или } y_1 \rightarrow \infty). \end{aligned} \quad (2.11)$$

В поперечном направлении задается условие периодичности

$$f(x_1, y_1, z_1) = f(x_1, y_1, z_1 + \lambda), \quad f = u_1, v_1, w_1, p_1, \rho_1, h_1, \mu_1 \quad (2.12)$$

( $\lambda$  — длина волны вихрей).

Решение краевой задачи (2.9)–(2.12) описывает коротковолновые вихри Гёртлера в пристеночной части пограничного слоя в жидкости или газе при  $\Delta y \sim \Delta z \ll \delta$ ,  $\Delta x \ll 1$  в зависимости от величины  $h_{1w}$ . Эволюция вихрей в первом приближении происходит в плоскопараллельном потоке, так как на малом расстоянии ( $\Delta x \ll 1$ ) несущественно продольное изменение функций течения в пограничном слое.

В дальнейшем удобно переменные  $x_1$ ,  $y_1$ ,  $z_1$ ,  $u_1$ ,  $v_1$ ,  $w_1$ ,  $p_1$ ,  $\rho_1$ ,  $h_1$  и  $\mu_1$  отнести к следующим величинам:  $(\lambda/2\pi K)^{1/2}$ ,  $\lambda/2\pi$ ,  $\lambda/2\pi$ ,  $C(\lambda/AB\pi)^{1/2}$ ,  $(K/2AB)^{1/2} C\lambda/\pi$ ,  $(K/2AB)^{1/2} C\lambda/\pi$ ,  $(\lambda^3/AB^3\pi^3)^{1/2} KC^2/2(\gamma-1)$ ,  $(A\pi/B\lambda)^{1/2}/(\gamma-1)$ ,  $(B\lambda/A\pi)^{1/2}$  и  $(AB\lambda/\pi)^{1/2}$ . В новых переменных (без индекса 1) краевая задача (2.9)–(2.12) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} (\rho u)_x + (\rho v)_y + (\rho w)_z &= 0, \quad \text{Re} \rho (u u_x + v u_y + w u_z) = (\mu u_y)_y + (\mu u_z)_z, \\ \text{Re} [\rho (u v_x + v v_y + w v_z + u^2) + p_y] &= (\mu v_y)_y + (\mu v_z)_z, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Re}[\rho(uw_x + vw_y + ww_z) + p_z] &= (\mu w_y)_y + (\mu w_z)_z, \\
\operatorname{Re} \operatorname{Pr} \rho(uh_x + vh_y + wh_z) &= (\mu h_y)_y + (\mu h_z)_z, \quad \rho h = 1, \quad \mu = h, \\
u = v = w = 0, \quad h &= D \quad (y = 0), \\
u \rightarrow h_0 - D, \quad v, w &\rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow 1/h_0, \quad \mu, h \rightarrow h_0, \\
p \rightarrow -\frac{2}{3}(h_0^3 - D^3) + 2Dy - 2D^2(h_0 - D) &\quad (x \rightarrow -\infty \text{ или } y \rightarrow \infty), \\
f(x, y, z) &= f(x, y, z + 2\pi), \quad f = u, v, w, p, \rho, h, \mu, \\
\operatorname{Re} &= \frac{CK^{1/2}\lambda}{2^{3/2}\pi A^{1/2}B^{3/2}(\gamma - 1)}, \quad D = h_{1w} \left( \frac{A\pi}{B\lambda} \right)^{1/2}, \quad h_0(y) = (y + D^2)^{1/2},
\end{aligned} \tag{2.13}$$

где  $\operatorname{Re}$  — местное число Рейнольдса;  $D$  — приведенная энтальпия газа у поверхности;  $h_0(y)$  — профиль энтальпии в пристеночной части невозмущенного пограничного слоя.

При больших значениях параметра  $D \gg y_*^{1/2}$  ( $y_*$  — некоторая толщина возмущенной области) внешние и начальные краевые условия (2.13) преобразуются к виду

$$u \rightarrow \frac{y}{2D}, \quad v, w \rightarrow 0, \quad \rho \rightarrow \frac{1}{D} - \frac{y}{2D^3}, \quad \mu, h \rightarrow D + \frac{y}{2D}, \quad p \rightarrow -\frac{y^3}{12D^3}. \tag{2.14}$$

Из этих выражений видно (см. также соотношения (1.5)), что течение тогда будет несжимаемым и изотермическим с постоянным коэффициентом вязкости. Легко убедиться, что при перенормировке переменных краевая задача (2.13) преобразуется к виду, моделирующему коротковолновые вихри в пристеночной части пограничного слоя жидкости [3, 4, 6], где единственным параметром подобия будет местное число Рейнольдса для жидкости  $\operatorname{Re}_*$ :

$$\operatorname{Re}_* = \operatorname{Re}/2D^3 \sim K^{1/2}(\lambda/2\pi)^{5/2}. \tag{2.15}$$

3. Для малых возмущений исходного течения в пограничном слое возможна линеаризация (2.13) относительно начальных краевых условий

$$\begin{aligned}
u = h_0 - D + \alpha U + \dots, \quad v = \alpha V + \dots, \quad w = \alpha W + \dots, \quad h = h_0 + \alpha H + \dots, \quad \mu = h_0 + \alpha H + \dots, \\
p = -\frac{2}{3}(h_0^3 - D^3) + 2Dy - 2D^2(h_0 - D) + \alpha P + \dots, \quad \rho = \frac{1}{h_0} - \alpha \frac{H}{h_0^2} + \dots,
\end{aligned} \tag{3.1}$$

где  $\alpha \ll 1$  и уже учтены конечные соотношения из (2.13) для  $\rho$  и  $\mu$ . В новых переменных (3.1) краевая задача (2.13) принимает вид

$$\begin{aligned}
2h_0^2(U_x + V_y + W_z - H_x) + 2Dh_0H_x - V &= 0, \\
2\operatorname{Re} h_0[2h_0(h_0 - D)U_x + V] &= 4h_0^4(U_{yy} + U_{zz}) + 2h_0^2(U_y + H_y) - H, \\
2\operatorname{Re} h_0 \left[ \frac{h_0 - D}{h_0} V_x + 2 \frac{h_0 - D}{h_0} U - \frac{(h_0 - D)^2}{h_0^2} H + P_y \right] &= 2h_0^2(V_{yy} + V_{zz}) + V_y, \\
2\operatorname{Re} h_0 \left[ \frac{h_0 - D}{h_0} W_x + F_z \right] &= 2h_0^2(W_{yy} + W_{zz}) + W_y, \\
2\operatorname{Re} \operatorname{Pr} h_0[2h_0(h_0 - D)H_x + V] &= 4h_0^4(H_{yy} + H_{zz}) + 4h_0^2H_y - H, \\
U, V, W, H, P &\rightarrow 0 \quad (y = 0 \text{ или } x \rightarrow -\infty \text{ или } y \rightarrow \infty), \\
F(x, y, z) &= F(x, y, z + 2\pi), \quad F = U, V, W, H, P.
\end{aligned} \tag{3.2}$$

Краевая задача (3.2) допускает нормально-модовое представление решения [24]

$$F(x, y, z) = F_1(y) \exp(\beta x)(\sin z, \cos z),$$

которое позволяет уравнения в частных производных (3.2) преобразовать в обыкновенные дифференциальные уравнения

$$\begin{aligned} 2h_0^2(\beta U_1 + V_1' + W_1 - \beta H_1) + 2D\beta h_0 H_1 - V_1 &= 0, \\ 2\text{Re } h_0[2h_0(h_0 - D)\beta U_1 + V_1] &= 4h_0^4(U_1'' - U_1) + 2h_0^2(U_1' + H_1') - H_1, \\ 2\text{Re } h_c \left[ \frac{h_0 - D}{h_0} \beta V_1 + 2 \frac{h_0 - D}{h_0} U_1 - \frac{(h_0 - D)^2}{n_0^2} H_1 + P_1' \right] &= 2h_0^2(V_1'' - V_1) + V_1', \\ 2\text{Re } h_0 \left[ \frac{h_0 - D}{h_0} \beta W_1 - P_1 \right] &= 2h_0^2(W_1'' - W_1) + W_1', \\ 2\text{Re } \text{Pr } h_0[2h_0(h_0 - D)\beta H_1 + V_1] &= 4h_0^4(H_1'' - H_1) + 4h_0^2 H_1' - H_1, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$U_1(0) = V_1(0) = W_1(0) = H_1(0) = U_1(\infty) = V_1(\infty) = W_1(\infty) = H_1(\infty) = P_1(\infty) = 0.$$

Решением краевой задачи (3.3) являются ее собственные функции, соответствующие паре значений параметров  $\text{Re}$  и  $\beta$  (например, при фиксированных значениях параметров  $\text{Pr}$  и  $D$ ).

4. При больших значениях местного числа Рейнольдса  $\text{Re} \gg 1$  в уравнениях (3.3) становятся несущественными диссипативные члены, на поверхности могут выполняться только условия непротекания. В этом случае краевая задача (3.3) существенно упрощается и она может быть сведена к уравнению для функции  $V_1(y)$ :

$$V_1'' - \frac{V_1'}{2h_0^2} + \left[ \frac{h_0 + D}{2h_0^2(h_0 - D)\beta^2} + \frac{1}{2h_0^3(h_0 - D)} - 1 \right] V_1 = 0, \quad V_1(0) = V_1(\infty) = 0. \quad (4.1)$$

При больших значениях параметра  $D \gg y_*^{1/2}$  это уравнение преобразуется к виду для жидкости [3, 4, 6], для которого получена аналитическая зависимость

$$1/\beta^2 = n, \quad n = 1, 2, 3 \dots \quad (4.2)$$

( $n$  — номер моды). Собственные решения (4.1) вычислялись методом обратных итераций со смещением [25]. На рис. 1 представлены зависимости значений  $1/\beta^2$  от  $D$  для первых трех мод (кривые 1–3). Видно, что уже при  $D = 60$  результаты вычислений незначительно отличаются от точных аналитических (4.2). При этих значениях  $D$  для  $\text{Re} \gg 1$  газ уже можно считать несжимаемым и изотермическим. Для оценки скорости роста амплитуды вихрей целесообразно использовать приведенную к характерной длине  $\Delta x \sim 1$  величину инкремента

$$\text{Ve} = (1/\Delta x)\beta(2\pi K/\lambda)^{1/2}. \quad (4.3)$$

Из рис. 1 видно, что величина  $\beta$  для всех мод несколько возрастает при увеличении  $D$ . Однако, как следует из оценок (2.7), при этом  $\Delta x$  и  $\lambda$  возрастают по порядку величины, т. е. с ростом  $D$  при нагревании поверхности величина  $\text{Ve}$  уменьшается при  $\text{Re} \gg 1$ . Здесь нагревание поверхности оказывает стабилизирующее воздействие на вихри, что объясняется увеличением размеров возмущенной области и уменьшением завихренности набегающего потока (см. соотношения (2.7) и (2.14)).

В результате расчетов получено, что при нулевой температуре поверхности  $D = 0$  собственное решение краевой задачи (4.1) существует только для первой моды. При увеличении  $D$  до значения  $D \approx 1$  удается отыскать вторую моду. И так далее, по мере

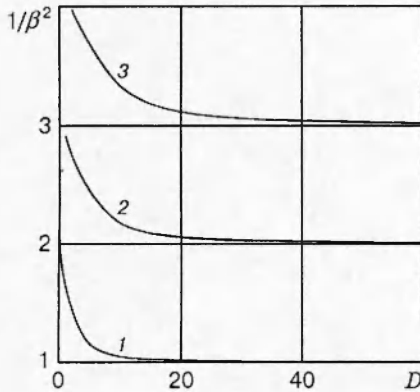


Рис. 1

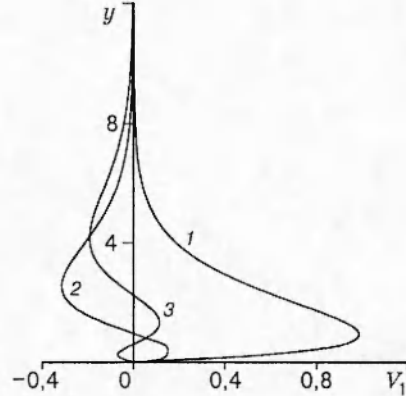


Рис. 2

увеличения  $D$  появляются все более высокие моды. Это можно интерпретировать как возбуждение высших степеней свободы некоторой системы при повышении ее температуры. При  $D = 0$  уравнение (4.1) допускает аналитическое решение

$$V_1(1/\beta^2, y) = y \exp(-y) \left[ {}_1F_1\left(\frac{3 - 1/\beta^2}{4}, \frac{3}{2}, 2y\right) - \left( \Gamma\left(\frac{1 - 1/\beta^2}{4}\right) / 2\Gamma\left(\frac{3 - 1/\beta^2}{4}\right) \sqrt{2y} \right) {}_1F_1\left(\frac{1 - 1/\beta^2}{4}, \frac{1}{2}, 2y\right) \right],$$

где  ${}_1F_1(a, b, x)$  — вырожденная гипергеометрическая функция Похгаммера;  $\Gamma(x)$  — гамма-функция. Нетрудно убедиться, что это решение имеет только один экстремум, т. е. оно представляет только первую моду. На рис. 2 показаны вычисленные профили функции  $V_1(y)$  для первых трех мод при  $D = 5$ .

5. Для численного интегрирования краевой задачи (3.3) используются новые зависимые переменные  $U_* = U_1$ ,  $V_* = \text{Re}V_1$ ,  $W_* = \text{Re}W_1$ ,  $P_* = \text{Re}^2P_1$ ,  $H_* = H_1$ . Из числа переменных исключаются функции  $W_*$  и  $P_*$ , и краевая задача (3.3) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} &4h_0^4 U_*'' + 2h_0^2 U_*' - 4h_0^2 [h_0^2 + \beta_*(h_0 - D)] U_* = 2h_0 V_* - 2h_0^2 H_*' + H_*, \\ &4h_0^4 H_*'' + 4h_0^2 H_*' - [4h_0^4 + 1 + 4\text{Pr}\beta_* h_0^2 (h_0 - D)] H_* = 2\text{Pr}h_0 V_*, \\ &-4h_0^4 V_*'''' - 2h_0^2 V_*'' + [8h_0^4 + 4\beta_* h_0^2 (h_0 - D) - 3] V_*'' + \left[ 2h_0^2 - 2\beta_*(2 - \text{Pr})(h_0 - D) + \frac{15}{2h_0^2} \right] V_*' + \\ &+ \left[ 1 - \frac{15}{2h_0^4} - 4h_0^4 - 4\beta_* h_0^2 (h_0 - D) + \frac{4\beta_*}{h_0} \left( 1 - \frac{\text{Pr}}{2} \right) + \frac{3\beta_* D}{h_0^2} (2\text{Pr} - 1) \right] V_* = \quad (5.1) \\ &= 4Gh_0^2 (h_0 - D) \left( U_* - \frac{h_0 - D}{2h_0} H_* \right) + \left[ \frac{15D\beta_*}{h_0} + 4\beta_*^2 (1 - \text{Pr}) h_0 (h_0 - D)^2 \right] H_*' - \\ &\quad - \beta_* D \left[ 6h_0 + \frac{15}{2h_0^3} + 2\beta_* \frac{h_0 - D}{h_0} (5\text{Pr} - 2) \right] H_*, \\ &U_*(0) = V_*(0) = V_*'(0) = U_*(\infty) = V_*(\infty) = V_*'(\infty) = 0 \end{aligned}$$

( $\beta_* = \text{Re}\beta$ , местное число Гёртлера  $G = 2\text{Re}^2$ ). Для определения собственных решений краевой задачи (5.1) использовался тот же метод обратных итераций [25]. По известным функциям  $U_*$ ,  $V_*$ ,  $H_*$  из следующего уравнения определялась функция  $W_*$ :

$$W_* = \frac{V_*}{2h_0^2} - V_*' - \beta_* \left( U_* - \frac{h_0 - D}{h_0} H_* \right).$$

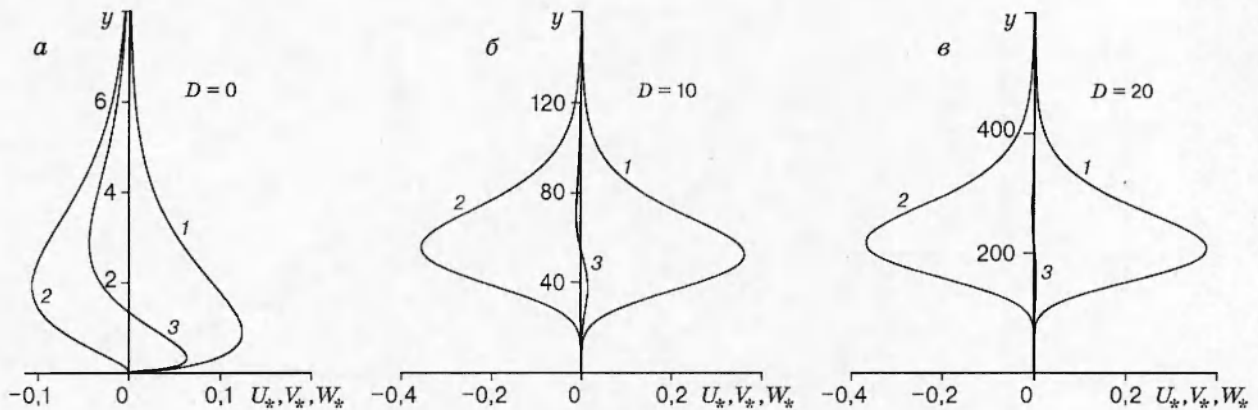


Рис. 3

В расчетах задавались значения числа Прандтля  $P_r$  и параметра  $D$ , из решения (5.1) определялись собственные функции  $U_*$ ,  $V_*$ ,  $H_*$  и собственное значение  $G$  для различных величин  $\beta_*$ . Все расчеты выполнены только для первой моды. Для расчета последующих мод необходимо приведение системы уравнений (5.1) к одному уравнению и использование затем прежнего метода, что требует большой аналитической и вычислительной работы, тогда как полученные результаты не будут иметь принципиального значения.

На рис. 3 представлены профили функций  $U_*$ ,  $V_*$ ,  $W_*$  (кривые 1–3) для нейтральных ( $\beta_* = 0$ ) вихрей при  $D = 0, 10$  и  $20$  и  $P_r = 1$  (легко убедиться, что тогда  $U_* = H_*$ ). Видно (рис. 3, а), что при  $D = 0$  вихри располагаются непосредственно на поверхности, а не всплывают в основную часть пограничного слоя, как это происходит в жидкости. По мере увеличения  $D$  нейтральные вихри удаляются от поверхности, их размеры в вертикальном направлении возрастают (вихри становятся сплюснутыми в поперечном направлении), течение около поверхности остается невозмущенным (рис. 3, б и 3, в). Расчеты показывают, что по мере увеличения  $\beta_*$  всплывшие вихри постепенно приближаются к поверхности.

На рис. 4 представлены зависимости инкремента  $\beta$  (кривые 1) и величины  $(\beta/Re^{1/2}) \cdot 10^m$ , пропорциональной приведенному инкременту  $Ve$  (кривые 2)

$$Ve = \frac{1}{\Delta x} \tilde{\beta} \left( \frac{2\pi K}{\lambda} \right)^{1/2} \sim \frac{\beta}{Re^{1/2}},$$

от местного числа Рейнольдса  $Re$  при  $D = 0, 10$  и  $20$  ( $m = 1, 2$  и  $3$  соответственно) и  $P_r = 1$ . Видно, что величина  $\beta$  монотонно возрастает, при  $Re \gg 1$  она должна прибли-

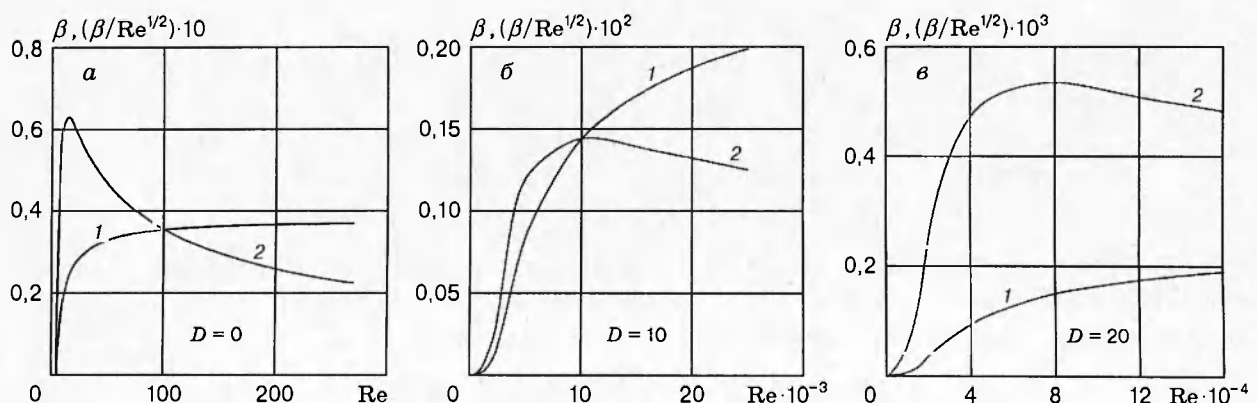


Рис. 4



жаться к своему асимптотическому значению, определяемому из решения краевой задачи (4.1) (см. рис. 1). Величина  $\beta/Re^{1/2}$ , очевидно, должна иметь максимум, так как на одном конце кривых  $\beta = 0$ , а на другом —  $Re \rightarrow \infty$  при  $\beta \rightarrow const$ . Изгиб кривых на рис. 4, б, в около начала координат связан с перестройкой течения: здесь вихри опускаются, приближаются к поверхности. Из картины распределений величин  $\beta/Re^{1/2}$  можно заключить, что при увеличении  $D$  (нагреве поверхности) точка максимума смещается в область больших значений местного числа  $Re$ , а сама величина экстремума значительно уменьшается. Это доказывает стабилизирующее воздействие нагрева поверхности на вихри и при конечных значениях  $Re$  (см. п. 4).

На рис. 5 представлены зависимости величины  $Re$  и  $Re_* \cdot 3000$  для нейтральных вихрей (см. (2.15)) от  $D$  (кривые 1 и 2). Видно, что нагрев поверхности приводит к резкому повышению минимального значения местного числа Рейнольдса, при котором наступает неустойчивость течения, т. е. он оказывает сильное стабилизирующее воздействие на процесс зарождения вихрей. Кроме увеличения размеров вихрей и уменьшения завихренности в набегающем потоке, при нагреве поверхности сказывается также всплывание вихрей в основную часть пограничного слоя, где завихренность еще меньше, чем у поверхности. Изменение числа Прандтля  $P_r$  от 0,7 до 1,0 приводит к увеличению значений  $Re$  примерно на 1,5%, которое неразлично на рис. 5. Резкое уменьшение величины  $Re_*$  показывает, что с ростом  $D$  течение приближается к состоянию, характерному для жидкости ( $Re_* \rightarrow 0$  при  $\beta \rightarrow 0$  [3, 4, 6]).

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 96-01-01537).

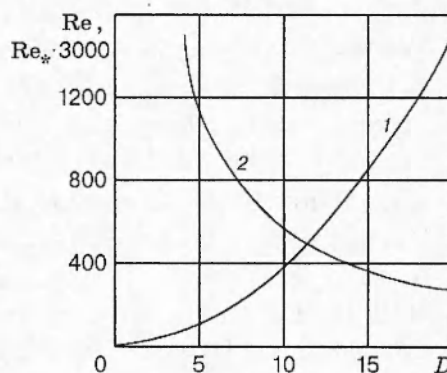


Рис. 5

## ЛИТЕРАТУРА

1. Hall P. Taylor-Goertler vortices in fully developed or boundary-layer flows: linear theory // J. Fluid Mech. 1982. V. 124. P. 475–494.
2. Hall P. The linear development of Goertler vortices in growing boundary layers // J. Fluid Mech. 1983. V. 130. P. 41–58.
3. Боголепов В. В., Дегтярев Л. М., Дроздова О. М., Липатов И. И. Асимптотическая структура вихрей Тейлора — Гёртлера в пограничном слое. М., 1988 (Препр. / ИПМ АН СССР; № 156).
4. Боголепов В. В., Липатов И. И. Асимптотический анализ развития вихрей Гёртлера в пограничном слое жидкости около вогнутой поверхности. Жуковский, 1990 (Препр. / ЦАГИ; № 8).
5. Тимошин С. Н. Асимптотический анализ пространственно-неустойчивого спектра вихрей Гёртлера // Изв. АН СССР. МЖГ. 1990. № 1. С. 32–41.
6. Боголепов В. В., Липатов И. И. К асимптотической теории вихрей Гёртлера в пограничном слое жидкости // ПМТФ. 1992. № 3. С. 58–68.
7. Goertler H. Über eine dreidimensionale instabilität laminarer grenzschichten an concaven wänden // ZAMM. 1941. Bd 21, H. 2. S. 250–252.
8. Hall P. On the nonlinear evolution of Goertler vortices in non-parallel boundary layers // IMA J. Appl. Math. 1982. V. 29, N 2. P. 173–196.

9. Hall P. The nonlinear development of Goertler vortices in growing boundary layers // J. Fluid Mech. 1988. V. 193. P. 243-266.
10. Боголепов В. В. Нелинейное развитие вихрей Гёртлера в пристеночной части пограничного слоя // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1994. № 1. С. 29-35.
11. Бражко В. Н. Периодические структуры течения и теплообмен в сверхзвуковой области присоединения // Учен. зап. ЦАГИ. 1979. Т. 10, № 2. С. 113-119.
12. Kobayashi R., Kohama Y. Taylor-Goertler instability of compressible boundary layers // AIAA J. 1977. V. 15, N 12. P. 1723-1727.
13. Spall R. E., Malik M. R. Goertler vortices in supersonic and hypersonic boundary layers // Phys. Fluids. 1989. V. A 1. P. 1822-1835.
14. Wadey P. On the linear development of Goertler vortices in compressible boundary layers // Eur. J. Mech. 1992. V. 11. P. 231-248.
15. Lipatov I. I. Influence of compressibility on Goertler vortices structure at high Reynolds number // Proc. 8th Couette-Taylor Meeting, Nice, France, 1993.
16. Боголепов В. В., Липатов И. И. Влияние сжимаемости на развитие вихрей Тейлора — Гёртлера при больших числах Рейнольдса // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1997. № 1. С. 36-47.
17. Hall P., Fu Y. On the Goertler vortex instability mechanism at hypersonic speeds // Theor. Comput. Fluid Dynam. 1989. V. 1. P. 125-134.
18. Dando A. H., Seddougui S. O. The compressible Goertler problem in two-dimensional boundary layers // IMA J. Appl. Math. 1993. V. 51. P. 317-332.
19. Fu Y., Hall P., Blackaby N. D. On the Goertler instability in hypersonic flow: Sutherland law and real gas effects // Philos. Trans. Roy. Soc. London. 1993. V. A 342. P. 451-476.
20. Хейз У. Д., Пробстин Р. Ф. Теория гиперзвуковых течений. М.: Изд-во иностр. лит., 1962.
21. Bogolepov V. V. Goertler vortices incipience in compressible boundary layer near strongly cooled surface // Effects of Organized Vortex Motion on Heat and Mass Transfer: Abstracts of Euromech Colloquium 327. Kiev, 1994.
22. Bogolepov V. V. Investigation of surface temperature influence on Goertler vortices incipience. N. Y., 1995 (Paper / AIAA, N 95-2297).
23. Боголепов В. В., Липатов И. И. Структура возмущенного пограничного слоя около холодной поверхности // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1991. № 1. С. 19-27.
24. Smith A. M. O. On the growth of Taylor-Goertler vortices along highly concave walls // Quart. Appl. Math. 1955. V. 13, N 3. P. 233-262.
25. Воеводин В. В., Кузнецов Ю. А. Матрицы и вычисления. М.: Наука, 1984.

*Поступила в редакцию 24/XII 1996 г.*

---