

ЛИТЕРАТУРА

1. Бленд Д. Нелинейная динамическая теория упругости. М., «Мир», 1972.
2. Coleman B. D., Gurtin M. E., Herrera I. R., Truesdell C. Wave propagation in dissipative materials. N. Y., Springer-Verlag, 1965.
3. Леонов А. И. Неравновесная термодинамика и реология упруговязких полимерных сред. Препринт ИТМО АН БССР им. А. В. Лыкова. Минск, 1975.
4. Леонов А. И. Nonequilibrium thermodynamics and rheology of viscoelastic polymer media. — «Rheologica Acta», 1976, Bd 15, N. 2, S. 85—98.
5. Соколовский В. В. Распространение упруговязких пластических волн в стержнях. — ПММ, 1948, т. XII, вып. 3.
6. Зверев И. Н. Распространение возмущений в вязкоупругом и вязкопластическом стержне. — ПММ, 1950, т. XIV, вып. 3.
7. Баренблатт Г. И., Ишлинский А. Ю. Об ударе вязкопластического стержня о жесткую преграду. — ПММ, 1962, т. XXVI, вып. 3.
8. Курант Р., Фридрихс К. Сверхзвуковое течение и ударные волны. М., Ил, 1950.
9. Кестенбойм Х. С., Росляков Г. С., Чудов Л. А. Точечный взрыв. Методы расчета. Таблицы. М., «Наука», 1974.

УДК 534.222.2

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ
ДИНАМИЧЕСКОЙ ПЛАСТИЧНОСТИ

Н. С. Козин, А. А. Тузовский, Н. Н. Холин

(Красноярск, Москва)

В работе строятся интерполяционные формулы упругой энергии ряда металлов (Fe(α -фаза), Al, Cu, Ni, Pb, Ti, Be, Au, Cd, Pt, Ag, Zn, Mg, Sn, Sb, V, Nb, Ta, Mo, W, Co, Th, U, Zr), учитывающие формоизменение и дефектообразование в кристаллической решетке. Для этого в уравнение внутренней энергии среды вводится зависимость от инвариантов второго и третьего порядка тензора упругих деформаций, а также скалярного параметра, характеризующего плотность дефектов кристаллической решетки. Формулы справедливы в диапазоне сжатий $0,6 \leq \rho^0/\rho \leq 1$ и диапазоне температур $0 \leq T(K) \leq \Theta_e$, где Θ_e — температура вырождения электронов. Проводится сравнение интерполяционных коэффициентов для упругой энергии с модулями теории упругости второго приближения. На основе построенных уравнений состояния проводится оценка величины работы сил на пластических деформациях, идущей на образование дефектов.

1. Для замыкания полной системы механических уравнений в случае, когда важны эффекты изменения температуры в процессах упруго-пластического деформирования твердого тела, необходимо рассматривать термодинамические соотношения в теории динамической пластичности. При этом следует иметь в виду, что в ряде важных для практических приложений случаев пластическое деформирование приводит к изменению величины внутренней энергии материала за счет изменения его структуры. Так, в высокополимерах в процессе деформирования происходит разрыв внутренних межмолекулярных связей, в металлах при пластическом деформировании происходит накопление дислокаций и т. д. Поэтому в зависимости внутренней энергии от тензора упругих деформаций и энтропийного параметра, который учитывает перераспределение внутренней

энергии за счет тепловыделения, необходимо учитывать зависимость от некоторого параметра накопления, характеризующего плотность образующихся дефектов. В общем случае этот параметр имеет тензорную природу. Таким образом, определяя модель вязкоупругопластического тела, для плотности внутренней энергии можно написать

$$(1.1) \quad E = E(\varepsilon_{ij}^e, S, n_{ij}),$$

где ε_{ij}^e — тензор упругих деформаций; S — энтропия единицы массы среды; n_{ij} — тензор дефектов (или тензор плотности дислокаций [1]). Второй закон термодинамики имеет вид

$$TdS = dq' + dq^e,$$

где T — абсолютная температура; dq' — некомпенсированное тепло [2]; $dq^{(e)}$ — внешний приток тепла. Для зависимости (1.1) примем предположение

$$(1.2) \quad E(\varepsilon_{ij}^e, S, n_{ij}) = E_e(\varepsilon_{ij}^e, S) + E_d(n_{ij}) + E_*,$$

где E_* — нормирующая постоянная.

Это предположение обосновано требованием, чтобы тензор напряжений σ_{ij} , который определяется следующим образом [2]:

$$(1.3) \quad \sigma_{ij} = \rho \frac{\partial E}{\partial \varepsilon_{ij}^e},$$

не зависел от параметра n_{ij} , а определялся только упругими внутренними связями* (в (1.3) ρ — плотность среды).

2. Следуя [4], упругую часть внутренней энергии изотропной среды зададим в виде

$$(2.1) \quad E_e = E_p + E_t,$$

где E_p и E_t — соответственно холодная и тепловая составляющие внутренней энергии. Зависимость внутренней энергии от упругих деформаций будем учитывать следующим образом. Обозначим через ε_i^e ($i = x, y, z$) логарифмы упругих удлинений λ_i ($i = x, y, z$) вдоль главных осей упругих деформаций x, y, z :

$$(2.2) \quad \varepsilon_x^e = \ln \lambda_x, \quad \varepsilon_y^e = \ln \lambda_y, \quad \varepsilon_z^e = \ln \lambda_z.$$

Симметрические функции от $\{\varepsilon_i^e : \varepsilon, D$ и Δ , вида

$$\begin{aligned} \varepsilon &= -(\varepsilon_x^e + \varepsilon_y^e + \varepsilon_z^e) = \ln \rho / \rho^0, \quad D = \frac{1}{2}(d_x^2 + d_y^2 + d_z^2), \\ \Delta &= \frac{1}{3}(d_x^3 + d_y^3 + d_z^3), \quad d_x = \varepsilon_x^e + \frac{\varepsilon}{3}, \quad d_y = \varepsilon_y^e + \frac{\varepsilon}{3}, \quad d_z = \varepsilon_z^e + \frac{\varepsilon}{3} \end{aligned}$$

представляют собой инварианты тензора упругих деформаций ε_{ij}^e . Воспользуемся представлением холодной части внутренней энергии изотропной

* При исследовании конечных деформаций следует пользоваться формулами Мурнагана [3]

$$\sigma_{ij} = \rho(\delta_{i\alpha} - 2\varepsilon_{i\alpha})\partial E/\partial \varepsilon_{\alpha j}.$$

среды в виде полиномов по степеням инвариантов ε , D и Δ :

$$(2.3) \quad \begin{aligned} E_p &= h(\varepsilon) + 2d^2(\varepsilon)D + \bar{M}\Delta, \\ h(\varepsilon) &= \frac{1}{2} a_0^2 \varepsilon^2 (1 + l_1 \varepsilon + l_2 \varepsilon^2), \\ d^2(\varepsilon) &= d_0^2 (1 + l_3 \varepsilon + l_4 \varepsilon^2 + l_5 \varepsilon^3), \end{aligned}$$

где d_0 , a_0 — скорости поперечных и объемных волн при $\varepsilon = 0$, $T = 0$; постоянные $l_1 - l_5$, \bar{M} имеют смысл интерполяционных коэффициентов. Величины холодного давления p_p и модуль объемного сжатия K вычисляются следующим образом:

$$\begin{aligned} p_p &= \rho \left. \frac{\partial E}{\partial \varepsilon} \right|_{D=\Delta=0} = \rho a_0^2 \left(1 + \frac{3}{2} l_1 \varepsilon + 2l_2 \varepsilon^2 \right) \varepsilon, \\ K(\varepsilon) &= a^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_0}{\partial \varepsilon} = a_0^2 \left[1 + (1 + 3l_1) \varepsilon + \left(\frac{3}{2} l_1 + 6l_2 \right) \varepsilon^2 + 2l_2 \varepsilon^3 \right]. \end{aligned}$$

Продольная скорость звука c равна $\sqrt{a^2 + (4/3)d^2}$, квадрат поперечной скорости в условиях данной интерполяции не зависит от температуры и задается выражением

$$d^2 = \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial D} = d_0^2 (1 + l_3 \varepsilon + l_4 \varepsilon^2 + l_5 \varepsilon^3).$$

Модуль упругости \bar{M} третьего порядка считается постоянным.

Слагаемое E_t , представляющее тепловую часть энергии, задается параметрически через энтропный параметр $s > 0$

$$E_t = \Theta(\varepsilon)g(s) + g(s_0)\Theta_0 l_6 \rho^0 e^{-\varepsilon}.$$

Дебаевская температура Θ , абсолютная температура T , энтропия S и функция $q = c_v T / \Theta$, равная произведению удельной теплоемкости на приведенную температуру, являются заданными функциями

$$\Theta(\varepsilon) = \Theta_0 (1 + l_6 \varepsilon + l_7 \varepsilon^2 + l_8 \varepsilon^3), \quad T = \Theta(\varepsilon)s.$$

Для функций $S(s)$ и $g(s)$ в целях удобства проведения вычислений использовались следующие представления. При $s = T/\Theta < 1$

$$\begin{aligned} g(s) &= \frac{3R}{\mu_a} \left[\frac{3}{8} \frac{\pi^4}{5} s^4 - 3s \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k} e^{-\frac{k}{s}} \left(1 + 3 \frac{s}{k} + 6 \left(\frac{s}{k} \right)^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 6 \left(\frac{s}{k} \right)^3 \right) \right] + \frac{9R}{\mu_a} \bar{D}(N, s), \\ S(s) &= \frac{4R\pi^4}{5\mu_a} s^3 - \frac{9R}{\mu_a} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{e^{-\frac{k}{s}}}{k} \left(1 + 4 \frac{s}{k} + 8 \left(\frac{s}{k} \right)^2 + 8 \frac{s^3}{k^3} \right) + \frac{3R}{\mu_a} \hat{D}(N, s), \end{aligned}$$

где остаточные члены \bar{D} и \hat{D} допускают оценку

$$|\bar{D}| < \frac{6e^{-\frac{N}{s} + \frac{1}{s}}}{\left(e^{\frac{1}{s}} - 1 \right) N} \frac{1 - (s/N)^4}{1 - (s/N)}, \quad |\hat{D}| < \frac{8e^{-\frac{N-1}{s}}}{\left(e^{\frac{1}{s}} - 1 \right) N} \frac{1 - (s/N)^4}{1 - (s/N)}.$$

Для достаточно больших температур ($s = T/\Theta \geq 1$) удобно использовать формулы

$$g(s) = \frac{9R}{\mu_a} \sum_{k=0}^{N-1} \frac{B_{2k}}{(2k+3)(2k)!} s^{1-2k} + \bar{H}(N, s),$$

$$S(s) = \frac{3R}{\mu_a} (1 + \ln s) + \frac{9R}{\mu_a} \sum_{k=1}^{N-1} \frac{B_{2k}(2k-1)}{(2k)(2k+3)(2k)!} s^{-2k} + \hat{H}(N, s),$$

где

$$|\bar{H}(N, s)| < \frac{9R}{\mu_a} \frac{|B_{2N}|}{(2N+3)(2N)!} s^{1-2N}; \quad |\hat{H}(N, s)| < \frac{9R}{\mu_a} \frac{|B_{2N}|(2N-1)}{2N(2N+3)(2N)!} s^{-2N}.$$

Здесь μ_a — атомный вес; $R = 8,31 \cdot 10^7$ г·см/(с²·град·моль); коэффициенты B_{2k} — числа Бернулли [4], $B_0 = 1$, $B_2 = 1/6$, $B_4 = -1/30$ и т. д.

Вычисления $g(s)$ и $S(s)$ проводились по указанным формулам, которые были оформлены в виде стандартных процедур с автоматическим выбором числа членов при заданной абсолютной погрешности. Быстрая сходимость рядов позволяла фактически использовать небольшое число членов, например, при $N = 3$ абсолютная величина остаточных членов не превосходила 10^{-6} .

Для дефектной части E_d упругой энергии используем представление

$$E_d = b^2 d^2 n,$$

которое выражает энергию дислокаций, сосредоточенную в единице массы [5]. Скалярная величина n представляет собой плотность дефектов (размерность n см⁻²), b — вектор Бюргера, а d — скорость распространения сдвиговых волн.

Нормирующая постоянная E_* в формуле (1.2) подбиралась из тех соображений, что в недеформированном состоянии при нормальных условиях $E = 0$, откуда $E_* = \Theta_0 g(s_0)(1 + l_6)$.

Приведенное уравнение упругой энергии позволяет с помощью соотношений

$$\sigma_i = -\rho \frac{\partial E}{\partial \varepsilon} + \rho d_i \frac{\partial E}{\partial D} - \rho \left(\frac{2}{3} D - d_i^2 \right) \frac{\partial E}{\partial \Delta}$$

рассчитывать напряженное состояние среды ($i = x, y, z$)

$$\sigma_i = -p + 2\rho d^2 d_i - \rho \left(\frac{2}{3} D - d_i^2 \right) \bar{M},$$

$$p = a_0^2 \rho \left(1 + \frac{3}{2} l_1 \varepsilon + 2l_2 \varepsilon^2 \right) + g(s) \rho \Theta_0 (l_6 + 2l_7 \varepsilon + 3l_8 \varepsilon^2) - \rho_0 g(s_0) \Theta_0 l_6.$$

В табл. 1—4 приведены значения коэффициентов построенных выше интерполяционных формул внутренней энергии для следующих металлов: Fe (α -фаза), Al, Cu, Ni, Pb, Ti, Be, Au, Cd, Pt, Ag, Zn, Mg, Sn, Sb, V, Nb, Ta, Mo, W, Co, Th, U, Zr.

3. При построении интерполяционных зависимостей (2.1) за исходное уравнение холодной энергии брался Борн—Майеровский потенциал

$$E_p = \frac{3A}{B\rho^0} \exp[B(1 - \delta^{-1/3})] - \frac{3\kappa}{\rho^0} \delta^{1/3}, \quad \delta = \rho/\rho^0,$$

Т а б л и ц а 1

Материал	ρ^0 , г/см ³	$c_0 \cdot 10^{-6}$, см/с	$d_0 \cdot 10^{-6}$, см/с	$a_0^2 \cdot 10^{-12}$, см ² /с ²	Θ_0 , К	μ_a , г/моль
Fe	7,84	0,5694	0,2866	0,2147	420	55,85
Al	2,785	0,6122	0,2941	0,2594	390	26,98
Cu	8,9	0,4651	0,2141	0,1552	315	63,54
Ni	8,86	0,5437	0,2485	0,2133	375	58,71
Pb	11,34	0,2151	0,0812	0,0375	88	207,21
Ti	4,51	0,5858	0,2963	0,2261	380	47,90
Be	1,845	1,289	0,89543	0,5925	1000	9,013
Au	19,24	0,324	0,10704	0,0897	170	197,0
Cd	8,64	0,278	0,12941	0,05496	120	112,41
Pt	21,37	0,396	0,13083	0,13399	230	195,09
Mg	1,725	0,575	0,30731	0,2047	318	24,32
Sn	7,28	0,332	0,16416	0,0743	260	118,70
Ag	10,5	0,37	0,17199	0,09746	215	107,88
Zn	7,135	0,417	0,25666	0,08606	235	65,38
Sb	6,67	0,342	0,21059	0,05783	200	121,76
V	6,1	0,6	0,27775	0,25714	273	50,95
Nb	8,6	0,49	0,17325	0,20008	280	92,91
Ta	16,46	0,34	0,07967	0,10712	225	180,95
Mo	10,2	0,619	0,30241	0,26144	380	95,95
W	19,17	0,5174	0,28446	0,15981	310	183,86
Co	8,82	0,472	0,06696	0,21681	385	58,94
Th	11,68	0,29	0,17134	0,04496	100	232,05
U	18,9	0,315	0,1619	0,06428	160	235
Zr	6,49	0,38	0,087037	0,1343	250	91,22

значения постоянных которого приведены для ряда металлов в [4]. Выражение для холодной энергии позволяет вычислить модуль объемного сжатия

$$(3.1) \quad K(\delta) = \frac{\partial}{\partial \delta} \left(\delta^2 \frac{\partial E_p}{\partial \delta} \right)$$

и температуру Дебая [4]

$$(3.2) \quad \Theta(\delta) = \Theta_0 \delta^{\xi+1/3} \sqrt{K(\delta)/K(1)}.$$

Скорость поперечных волн вычислена, согласно [6], где предложено использовать соотношение между скоростями продольных и поперечных волн, которое вытекает из теории Дебая

$$(3.3) \quad 1/c^3 + 2/d^3 = L\delta/\Theta^3(\delta)$$

(L — некоторая постоянная).

На основании соотношений (3.1)—(3.3) составлены таблицы функций $K(\epsilon)$, $d^2(\epsilon)$ и $\gamma(\epsilon) = \Theta(\epsilon)/\Theta_0$ в интервале $0,6 \leq \epsilon^{-\xi} \leq 1$, которые были

Таблица 2

Материал	I_1	I_2	I_3	I_4	I_5	I_6	I_7	I_8
Fe	0,61316	0,1819	2,6809	1,4574	-0,045029	1,6774	0,35916	0,13524
Al	1,089	0,9191	3,5566	3,0028	0,66827	2,1227	0,65135	0,28279
Cu	0,9657	0,6596	3,3876	2,7782	0,64406	2,0321	0,63782	0,26862
Ni	1,4402	2,1385	9,0771	-3,5491	141,57	4,0408	4,7945	10,012
Pb	0,9126	0,5436	5,2163	5,24	22,145	2,7905	2,2017	2,1319
Ti	3,2763	14,4552	1,3142	-3,9454	2,6334	1,1416	-2,0709	1,247
Be	2,3408	6,2564	1,3095	-4,0019	2,7124	1,1349	-1,7525	0,8685
Au	0,7331	0,2935	5,9804	4,8636	43,158	3,0739	3,0576	3,9354
Cd	-0,2004	-0,1098	3,9206	8,0497	6,0906	2,2459	2,394	-0,08589
Pt	0,8011	0,3942	4,7643	5,6743	15,677	2,634	2,0491	1,7391
Mg	0,4705	0,0493	2,2446	0,72076	-0,22009	1,4582	0,18465	0,078827
Sn	1,1673	1,1482	3,3443	2,1237	0,047028	2,0234	0,37292	0,24017
Ag	1,4078	1,9230	4,2489	4,7586	3,2775	2,4618	1,0956	0,62151
Zn	1,2326	1,2782	4,0653	4,2969	2,4556	2,3732	0,98194	0,53796
Sb	1,3147	1,6367	2,3329	-1,0353	-0,023972	1,5557	-0,51577	0,179
V	0,6511	0,2051	1,8784	-0,44865	-0,19492	1,2869	-0,21908	0,069473
Nb	0,3176	-0,0144	2,7073	2,205	0,96843	1,6787	0,70413	0,2482
Ta	0,7120	0,2749	2,7057	1,3655	-0,17432	1,686	0,30081	0,11195
Mo	0,6508	0,2034	2,487	0,92009	-0,27769	1,5838	0,19861	0,084946
W	0,6738	0,2331	2,3824	0,62205	-0,33734	1,5369	0,11185	0,0713
Co	-0,1627	-0,1017	3,2762	5,0707	1,8339	1,976	1,6809	-0,1007
Th	0,8111	0,4087	1,4824	-1,4803	0,3644	1,182	-0,5877	0,1699
U	1,0383	0,8435	2,9404	1,2554	-0,34692	1,8236	0,18638	0,12971
Zr	0,8089	0,4105	0,85405	-2,0773	1,0133	0,76438	-0,88348	0,33723

Таблица 3

Материал	$\bar{l} \cdot 10^{-11}$, $\frac{\text{ДИН}}{\text{СМ}^2}$	$\bar{m} \cdot 10^{-11}$, $\frac{\text{ДИН}}{\text{СМ}^2}$	$\bar{n} \cdot 10^{-11}$, $\frac{\text{ДИН}}{\text{СМ}^2}$	$\bar{A} \cdot 10^{-11}$, $\frac{\text{ДИН}}{\text{СМ}^2}$	$\bar{B} \cdot 10^{-11}$, $\frac{\text{ДИН}}{\text{СМ}^2}$	$\bar{C} \cdot 10^{-11}$, $\frac{\text{ДИН}}{\text{СМ}^2}$
Fe	-3,48±6,5	-103,0±7,0	110±110	110±110	-158±62	123,2±68,5
Al	—	—	-31,2±1,2	-31,2±1,2	—	—

приближены кубическими полиномами по ε . С помощью квадратур

$$p_p = \int_0^\varepsilon \rho K(\varepsilon) d\varepsilon, \quad E_p = \int_0^\varepsilon \frac{p_p}{\rho} d\varepsilon + 2d^2(\varepsilon)D + \bar{M}\Delta$$

была восстановлена холодная энергия $E_p(\varepsilon, D, \Delta)$, шаровая часть которой затем снова интерполировалась полиномом 4-й степени по ε (формулы (2.3)). Для нахождения постоянной \bar{M} использовались данные, приведенные в [7] и полученные путем измерений модулей упругости третьего порядка ультразвуковыми методами. В табл. 3 приведены значения модулей упругости Мурнагана \bar{l} , \bar{m} , \bar{n} для ряда металлов, которые определяются путем разложения внутренней энергии E по инвариантам I_1, I_2, I_3 тензора деформаций:

$$(3.4) \quad \rho^0 E(I_1, I_2, I_3, S) = \left[-2\mu I_2 + \frac{1}{2} \left(K + \frac{4}{3} \mu \right) I_1^2 \right] + \\ + \left\{ \bar{n} I_3 - 2\bar{m} I_1 I_2 + \frac{1}{3} (2\bar{m} + \bar{l}) I_1^3 \right\} + \dots$$

Здесь

$$(3.5) \quad I_1 = \text{Sp } u_{ik}, \quad I_2 = \text{Sp } u_{ik} u_{kl}, \quad I_3 = \text{Sp } u_{ik} u_{kl} u_{lm}, \\ u_{ik} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{\partial u_l}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right),$$

где u_{ik} — компоненты тензора деформаций; u_i — компоненты перемещений. Наряду с параметрами $\bar{m}, \bar{n}, \bar{l}$, определяемыми по формулам

$$(3.6) \quad \rho^0 \left(\frac{\partial^2 E}{\partial I_1 \partial I_2} \right)_S = -4\bar{m}, \quad \rho^0 \left(\frac{\partial^3 E}{\partial I_1^3} \right)_S = 4\bar{m} + 2\bar{l}, \\ \rho^0 \left(\frac{\partial E}{\partial I_2} \right)_S = -2\mu, \quad \rho^0 \left(\frac{\partial E}{\partial I_3} \right)_S = \bar{n}, \quad \rho^0 \left(\frac{\partial^2 E}{\partial I_1^2} \right)_S = K + \frac{4}{3} \mu,$$

Таблица 4

Материал	$b, \text{ \AA}$	Материал	$b, \text{ \AA}$	Материал	$b, \text{ \AA}$	Материал	$b, \text{ \AA}$
Fe	2,48	Be	2,24	Ag	2,89	Mo	2,72
Al	2,86	Au	2,88	Zn	2,66	W	2,74
Cu	2,56	Cd	2,98	Sb	—	Co	2,51
Ni	2,49	Pt	2,77	V	2,63	Th	3,60
Pb	3,49	Mg	3,21	Nb	2,86	U	—
Ti	2,95	Sn	3,02	Ta	2,86	Zr	3,20

часто используются модули упругости $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$, связанные с $\bar{l}, \bar{m}, \bar{n}$ формулами

$$\begin{aligned}\bar{l} &= \bar{B} + \bar{C}, \quad \bar{A} = \bar{n}, \quad \bar{m} = \bar{A}/2 + \bar{B}, \\ \bar{B} &= \bar{m} - \bar{n}/2, \quad \bar{C} = \bar{l} - \bar{m} + \bar{n}/2.\end{aligned}$$

Значения $\bar{A}, \bar{B}, \bar{C}$ для ряда металлов приведены в табл. 3. Формулы (3.4)–(3.6) нелинейной теории упругости второго приближения (пятиконстантной теории упругости) позволяют сравнить выражения для энергий $E(I_1, I_2, I_3, S)$ и $E(\varepsilon, D, \Delta, S)$.

Для этого необходимо сравнить выражение для инвариантов I_1, I_2, I_3 и ε, D, Δ в главных осях деформации:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= -I_1 + I_1^2 + 2I_2 - \frac{4}{3}I_1^3 + 4I_1I_2 - 4I_3, \\ D &= \frac{1}{3}I_1^2 - I_2 - \frac{7}{3}I_1I_2 + \frac{2}{3}I_1^3 + 3I_3, \\ \Delta &= \frac{2}{27}I_1^3 - \frac{1}{3}I_1I_2 + I_3.\end{aligned}$$

Полагая

$$\begin{aligned}\bar{Q} &= \left. \frac{\partial E}{\partial D} \right|_{\varepsilon=\Delta=0}, & \bar{R} &= \left. \frac{\partial^2 E}{\partial \varepsilon^2} \right|_{\varepsilon=D=0}, \\ \bar{L} &= \left. \frac{\partial^2 E}{\partial \varepsilon \partial D} \right|_{\varepsilon=D=0}, & \bar{M} &= \left. \frac{\partial E}{\partial \Delta} \right|_{\varepsilon=D=0}, \\ \bar{N} &= \left. \frac{\partial^3 E}{\partial \varepsilon^3} \right|_{\varepsilon=D=0},\end{aligned}$$

получаем связь

$$\begin{aligned}\frac{2\mu}{\rho^0} - \bar{Q}, \quad \frac{\bar{A}}{\rho^0} &= 3\bar{Q} + \bar{M}, \quad \frac{K + 4/3\mu}{2\rho^0} = \frac{\bar{Q}}{3} + \frac{\bar{R}}{2}, \\ -\bar{A} - 2\bar{B} &= -\frac{7}{3}\bar{Q} - 2\bar{R} + \frac{1}{2}\bar{L} - \frac{1}{3}\bar{M}, \\ \frac{\bar{A} + 3\bar{B} + \bar{C}}{3} &= \frac{2}{3}\bar{Q} + \bar{R} - \frac{1}{6}\bar{L} - \frac{1}{6}\bar{N} + \frac{2}{27}\bar{M}\end{aligned}$$

между коэффициентами пятиконстантной теории упругости и значениями интерполяционных коэффициентов формул (2.3). Именно, раскладывая энергию E_p в ряд по ε, D, Δ

$$(3.7) \quad E_p = \bar{Q}D + \frac{\bar{R}}{2}\varepsilon^2 + \bar{M}\Delta + \frac{1}{2}\bar{L}\varepsilon D + \frac{1}{6}\bar{N}\varepsilon^3 + \dots,$$

находим

$$\bar{Q} = 2d_0, \quad \bar{R} = a_0^2, \quad \bar{L} = 2d_0^2l_3, \quad \bar{N} = 3a_0^2l_1,$$

а значит,

$$(3.8) \quad d_0^2 = \mu/\rho^0, \quad \bar{M} = \frac{\bar{A} - 6\mu}{\rho^0}, \quad \frac{K}{\rho^0} = a_0^2, \\ l_1 = 2 - \frac{1}{K} \left(\frac{11}{27}\bar{A} + \bar{B} + \frac{\bar{C}}{3} + \frac{\bar{m}}{3}(I_3 - 8) \right), \quad l_3 = \frac{8}{3} + \frac{2}{\mu} \left(K - \frac{\bar{A}}{3} - 2\bar{B} \right).$$

Полученные выражения позволяют пользоваться в выражениях (2.1), (2.2) упрощенной формулой холодной энергии, пересчитываемой из теории упругости второго приближения

$$h(\varepsilon) = \frac{K}{2\rho^0} \varepsilon^2 (1 + l_1 \varepsilon), \quad d^2(\varepsilon) = \frac{\mu}{\rho^0} (1 + l_3 \varepsilon),$$

где коэффициенты l_1 и l_3 находятся из (3.7), (3.8).

4. При построении моделей упругоупругоупругой среды, когда неупругое деформирование сопровождается изменением внутренней структуры материала, необходимо учитывать изменение внутренней энергии материала за счет изменения его структуры. В этом случае процессы деформирования в отличие от упругости не будут обратимы. Иначе говоря, если предположить отсутствие внешних притоков тепла $dq^{(e)} = 0$, то для физически бесконечно малых частиц среды имеет место соотношение

$$(4.1) \quad \rho T dS = dq' > 0,$$

где dq' — некомпенсированное тепло [2].

Некомпенсированное тепло определим следующим соотношением:

$$(4.2) \quad dq' = \gamma \frac{\sigma_{ij}}{\rho} d\varepsilon_{ij}^p,$$

где γ — доля элементарной работы на пластических деформациях, переходящая в тепло; ε_{ij} — тензор пластических деформаций.

Если внешний приток тепла отсутствует, то уравнение притока тепла имеет вид

$$(4.3) \quad \rho dE = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij},$$

причем для ε_{ij} примем

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p.$$

Перепишем соотношение (4.3) в виде *

$$(4.4) \quad \rho \left(\frac{\partial E}{\partial \varepsilon_{ij}^e} d\varepsilon_{ij}^e + \frac{\partial E}{\partial S} dS + \frac{\partial E}{\partial n_{ij}} dn_{ij} \right) = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^e + \gamma \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p + (1 - \gamma) \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p.$$

Учитывая соотношения (4.1), (4.2), из (4.4) получим, кроме соотношения (1.3), следующие:

$$T = \frac{\partial E}{\partial S}, \quad (1 - \gamma) \sigma_{ij} \frac{d\varepsilon_{ij}^p}{dt} = \rho \frac{\partial E}{\partial n_{ij}} \frac{dn_{ij}}{dt}.$$

Последнее соотношение может служить для определения γ

$$(4.5) \quad \gamma = 1 - \left(\rho \frac{\partial E}{\partial n_{ij}} \frac{dn_{ij}}{dt} \right) / \left(\sigma_{ij} \frac{d\varepsilon_{ij}^p}{dt} \right).$$

Таким образом, решается вопрос о перераспределении работы на пластических деформациях между тепло- и дефектообразованием.

* При рассмотрении конечных деформаций формулы (4.4) также справедливы, если при этом использовать определение тензора упругих деформаций, данное в п. 2, формулы Мурнагана для напряжений; для пластических деформаций верны соотношения (4.6).

Для скорости изменения работы пластического деформирования используется соотношение

$$\frac{dW_p}{dt} = \tau_{ij} \frac{d\varepsilon_{ij}^p}{dt},$$

в котором скорость тензора пластических деформаций остается неопределенной. Определение тензора скоростей пластических деформаций зависит от выбора физической модели. В ряде случаев можно предполагать соотношение типа

$$(4.6) \quad \frac{d\varepsilon_{ij}^p}{dt} = J_{ij}(\sigma_{ij}, n_{ij}, T),$$

где J_{ij} — тензор плотности потока дефектов структуры (или тензор плотности потока дислокаций [1]).

Для определения тензора n_{ij} необходимо записывать кинетическое уравнение, исходя из определенных физических соображений [6, 7],

$$dn_{ij}/dt = \dot{n}_{ij}(\sigma_{ij}, n_{ij}, T).$$

Рассмотрим задачу о деформировании тонкого длинного стержня из малоуглеродистой стали при постоянном напряжении $\sigma_{11} = \text{const}$ (ползучесть). В качестве зависимости (4.6) используем соотношение Орована [8, 9]

$$d\varepsilon_{11}^p/dt = \frac{4}{3} bnu,$$

где u — средняя скорость дислокаций.

Предполагая, что плотность дислокаций поликристаллического материала удовлетворительно описывается скалярным параметром n , используем опытную зависимость [9]

$$(4.7) \quad \frac{dn}{dt} = \frac{4}{3} m \frac{d\varepsilon_{11}^p}{dt},$$

где m — коэффициент размножения дислокаций.

Значения коэффициента m , заимствованные из [10], приведены в табл. 5.

Для приведенного в п. 2 уравнения упругой энергии соотношение (4.5) переписывается в виде

$$\gamma = 1 - \rho d^2 b^2 \frac{dn}{dt} / \sigma_{11} \frac{d\varepsilon_{11}^p}{dt}.$$

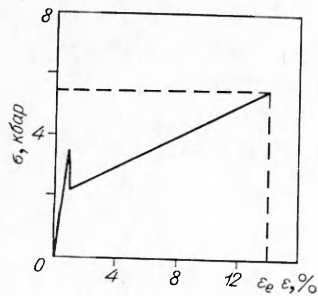
Учитывая соотношение (4.7), получим

$$(4.8) \quad \gamma = 1 - \rho d^2 b^2 \frac{4}{3} m / \sigma_{11}.$$

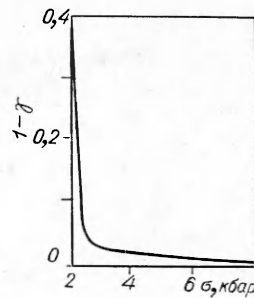
Таблица 5

Материал	$m \cdot 10^{-9}$, см ⁻²	Материал	$m \cdot 10^{-9}$, см ⁻²
Al	80	Mo	80—90
Cu	50	U	400
Ni	8	Fe	33—250

Для параметров малоуглеродистой стали в [8, 9] получены значения $m = 10^{-12}$ см⁻² и использовались значения $b = 2,5 \cdot 10^{-8}$ см, $\mu = \rho d^2 = 906$ кбар. Подставляя эти значения в соотношение (4.8), при $\sigma_{11} = 2,5$ кбар получим $1 - \gamma = 0,302$, что соответствует данным calorиметрических измерений.



Ф и г. 1



Ф и г. 2

Если квазистатическое деформирование образца сопровождается упрочнением (фиг. 1), а дефектообразование начинается с некоторого σ_S , то значение $(1 - \gamma)$ будет уменьшаться по мере увеличения σ_{11} (фиг. 2). При $\sigma_{11} = 5$ кбар $1 - \gamma = 0,15$. В работе [9] показано, что для ударных волн сравнительно небольшой интенсивности ($\sigma_{11} \approx 50$ кбар) используемая выше дислокационная модель также имеет место (при больших интенсивностях ударных волн механизм консервативного скольжения дислокаций уже не будет преобладающим). Поэтому для расчета величины $1 - \gamma$ в случае распространения ударных волн в стержнях из малоуглеродистой стали можно использовать формулу (4.8), откуда следует, что основная диссипация за счет образования дефектов происходит на фронте ударной волны там, где происходит нарастание импульса от значения σ_S (упругий предвестник) до конечного σ_l на фронте пластической волны.

Поступила 7 II 1977

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. М., «Наука», 1965.
2. Седов М. И. Механика сплошной среды. М., «Наука», 1970.
3. Гольденблат И. И. Некоторые вопросы механики деформируемых сред. М., ГИТТЛ, 1955.
4. Жарков В. Н., Калинин В. А. Уравнение состояния твердых тел при высоких давлениях и температурах. М., «Наука», 1968.
5. Смирнов В. С. Теория обработки металлов давлением. М., «Металлургия», 1973.
6. Годунов С. К., Козин Н. С., Роменский Е. И. Уравнение состояния упругой энергии металлов при нешаровом тензоре деформаций. — ПМТФ, 1974, № 2.
7. Ноздрев В. Ф., Федорищенко Н. В. Молекулярная акустика. М., «Высш. школа», 1974.
8. Нигматулин Р. И., Холин Н. Н. Закалывание текучести и упрочнение при скоростном деформировании металлов. — «Докл. АН СССР», 1973, т. 209, № 1.
9. Нигматулин Р. И., Холин Н. Н. К модели упругопластической среды с дислокационной кинетикой пластического деформирования. — МТТ, 1974, № 4.
10. Гилман Дж. Динамика дислокаций и поведение материала при ударном воздействии. — Сб. пер. Механика, 1970, № 2.