

УДК 519.63:536.24

Математическое моделирование процесса теплообмена в слоистых материалах с учетом фазовых превращений в отдельных слоях*

О.Н. Любимова, К.Н. Пестов

Дальневосточный федеральный университет, Владивосток

E-mail: berms@mail.ru

Построена математическая модель определения температурных полей и движения границ фазовых переходов без использования классического условия Стефана и сосредоточенной теплоемкости. Модель позволяет более точно определять положение фронта фазового перехода и может быть использована при расчетах для слоистых материалов в случаях, когда фронтов несколько, и они могут сливаться. Выполнено моделирование задачи об определении границы плавления для одномерного случая в трехслойном материале.

Ключевые слова: фазовый переход первого рода, теплопроводность, плавление, кристаллизация.

Введение

Требование высоких технико-эксплуатационных свойств материалов, используемых современной промышленностью, непрерывно стимулирует совершенствование технологии изготовления новых композиционных материалов, среди которых особое место принадлежит слоистым композитам. Технологические процессы изготовления некоторых слоистых композиционных материалов, например, биметаллов, триметаллов, стеклометаллических материалов [1], предполагают изменение агрегатного состояния материалов. Моделирование процесса теплообмена при изготовлении таких материалов позволит в дальнейшем контролировать величину возникающих вследствие температурных и структурных неоднородностей напряжений, особенно на границах контакта разных материалов. Математические модели процессов теплообмена, связанные с изменением агрегатного состояния или физико-химической природы материалов, разделяют на модели с образованием границы раздела фаз (классическая фронтальная задача Стефана) и модели с образованием зоны фазовых превращений.

В задачах, аналогичных формулировке Стефана, рассматриваемый материал имеет точку фазового превращения, т.е. при определенной температуре он плавится или затвердевает. Физическое требование, из которого вытекают классическое условие

* Исследование выполнено при поддержке ФЦП (мероприятие 1.2, соглашение № 14.575.21.0009, уникальный идентификатор ПНИ REMEF157514X0009).

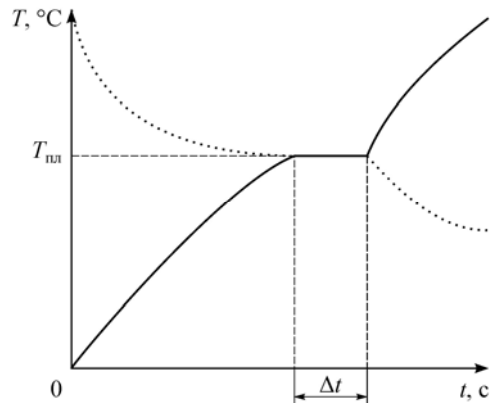
Стефана на границе фазового перехода и обобщенная постановка задачи Стефана, состоит в том, что при температуре фазового перехода энергия как функция температуры изменяется скачком на величину, которая называется теплотой фазового перехода. Решение таких задач состоит в определении полей температуры разных фаз в областях с подвижной границей раздела, положение и скорость перемещения которой должны рассчитываться из условия баланса энергии при переходе среды из одного агрегатного состояния в другое (условие Стефана). Ввиду нелинейности основными методами решения подобных задач являются численные методы, основные из них были предложены в 60-х годах прошлого века, а именно: метод ловли фронта в узел сетки [2], метод выпрямления фронтов [3], схемы сквозного счета [4] и метод сглаживания коэффициентов [5]. Все перечисленные методы обладают достоинствами и недостатками, например, метод ловли фронта в узел сетки применяется только для одномерных однофронтных задач, а метод выпрямления фронтов — для двумерных задач. Характерной особенностью этих методов является явное выделение искомого фронта фазового превращения, при этом положение свободной границы раздела фаз отслеживается на каждом временном слое и определяется положением соответствующих узлов. Это достигается за счет использования динамических сеток с переменным шагом либо по координатам, либо по времени (например, метод ловли фронта в узел пространственной сетки) или введением новых динамических независимых переменных (методы с выпрямлением фронта). Основным недостатком таких методов является их плохая адаптация к решению многомерных задач и к задачам с циклическим изменением температуры на границе, когда немонотонно движущихся фронтов несколько, причем некоторые из них могут сливаться друг с другом или исчезать. Схема сквозного счета и метод со сглаживанием коэффициентов основаны на одной и той же идее сглаживания. Схема сквозного счета характеризуется тем, что граница раздела фаз явно не выделяется и используются однородные разностные схемы. Основным достоинством этого подхода является возможность использования экономичных разностных схем при решении многомерных задач. К недостаткам можно отнести неопределенность в выборе метода сглаживания, который зависит от используемой сетки и определяется чаще всего эмпирически в результате расчетов.

В настоящей работе предлагается способ слежения за движением фронта фазового перехода без использования классического условия Стефана и сосредоточенной теплоемкости, что, с одной стороны, упрощает задачу, а с другой стороны, позволяет усложнить геометрию, граничные и начальные условия, увеличить количество слоев в рассматриваемом материале с возможным фазовым переходом в них и в рамках одной модели проследить за всеми тепловыми процессами, включая проплавление отдельных слоев в процессе нагрева и кристаллизацию в процессе дальнейшего остывания.

Определяющие соотношения и математическая модель

Рассмотрим модель плавления (кристаллизации) слоистого материала, каждый слой которого является чистым веществом. Основное предположение при моделировании фазовых превращений в кристаллических материалах состоит в том, что фазовый переход происходит при постоянной заданной температуре фазового перехода T_k^* (каждому слою, определяемому областью Ω_k , соответствует своя температура плавления), здесь $k = \overline{1, K}$ — номер слоя композита. Переход кристаллического тела в жидкое состояние требует затраты тепла Q_k^* , которое принято называть удельной (отнесенной к единице массы) теплотой плавления, для многих материалов эта величина известна.

Рис 1. Характерная зависимость температуры от времени при плавлении (сплошная линия) и кристаллизации (пунктирная линия) слоистого материала.



Пусть малый объем ΔV k -го слоя в момент времени t^* достиг температуры плавления, тогда уравнение баланса энергии с учетом закона Фурье за малое время $\Delta t = t - t^*$ можно записать в виде

$$\int_{\Delta V} \lambda_k (\text{grad } T, \vec{n}) ds \Delta t = \int_V \Delta Q dV, \quad (1)$$

здесь ΔQ — приращение тепла за время Δt . Формула (1) имеет простой физический смысл: весь внешний тепловой поток расходуется на аккумулирование энергии, необходимой для разрушения кристаллической решетки в случае плавления или для выделения энергии в случае, когда материал приобретает кристаллическую структуру. При этом естественно положить, что в момент времени t^* , когда температура ΔV только достигла температуры плавления, $Q = 0$.

Если изначально объем ΔV находился в жидком состоянии ($T|_{t=t^*-0} > T_k^*$), то этот объем закристаллизуется при $\Delta Q = -\rho_k^+ Q_k^* \Delta V$ (при охлаждении суммарный внешний тепловой поток отрицательный). При дальнейшем остывании ($t > t^* + \Delta t$) температура в объеме ΔV может меняться. Аналогично, если изначально объем находился в твердом состоянии ($T|_{t=t^*-0} < T_k^*$), то он расплавится при $\Delta Q = \rho_k^- Q_k^* \Delta V$ (при плавлении суммарный внешний тепловой поток положительный). При плавлении график зависимости температуры от времени будет иметь вид, как на рис. 1.

В случае, когда температура малого объема ΔV отлична от температуры плавления, уравнение баланса энергии с учетом закона Фурье для него имеет вид:

$$\int_{\Delta V} \lambda_k (\text{grad } T, \vec{n}) ds \Delta t = \int_V c_k \rho_k \Delta T dV, \quad (2)$$

здесь ΔT — приращение температуры в ΔV k -го слоя за время ΔT .

Формулы (1) и (2) можно записать (с учетом изменения Q) в виде

$$\int_{\Delta V} \lambda_k (\text{grad } T, \vec{n}) ds \Delta t = \begin{cases} \int_V c_k \rho_k \Delta T dV, & T \neq T_k^* \text{ или } Q = \rho_k^- Q_k^* \text{, или } Q = -\rho_k^+ Q_k^* \text{,} \\ \int_V \Delta Q dV, & T = T_k^* \text{ и } Q < \rho_k^- Q_k^* \text{ и } Q > -\rho_k^+ Q_k^* \text{,} \end{cases} \quad (3)$$

при ΔT таких, что малый объем ΔV не изменил своего агрегатного состояния.

Доопределим коэффициент теплопроводности для каждой точки M на границе раздела фаз следующим образом:

$$\lambda(T) = \begin{cases} \lambda_k^+, & \text{если } T \leq T_k^* - T'_k, \quad M \in \Omega_k, \\ \lambda_k^*, & \text{если } T_k^* - T'_k < T < T_k^* + T'_k, \quad M \in \Omega_k, \quad T'_k \rightarrow 0, \\ \lambda_k^-, & \text{если } T \geq T_k^* + T'_k, \quad M \in \Omega_k. \end{cases} \quad (4)$$

При этом требуется выполнение следующих равенств:

$$\lambda_k^*(T_k^* - T_k' + 0) = \lambda_k^+, \quad \lambda_k^*(T_k^* + T_k' - 0) = \lambda_k^-. \quad (5)$$

Учитывая (4) и (5) в формуле (3), воспользуемся теоремой Остроградского–Гаусса, разделяя обе части на Δt и переходя к пределу $\Delta t \rightarrow 0$, получим

$$\operatorname{div}(\lambda_k \operatorname{grad} T) = \begin{cases} c_k \rho_k \frac{\partial T}{\partial t}, & T \neq T_k^* \text{ или } Q = \rho_k^- Q_k^*, \text{ или } Q = -\rho_k^+ Q_k^*, \\ \partial Q / \partial t, & T = T_k^* \text{ и } Q < \rho_k^- Q_k^*, \text{ и } Q > -\rho_k^+ Q_k^*. \end{cases} \quad (6)$$

Введем две функции, позволяющие учесть непрерывное накопление (выделение) энергии, затрачиваемой на фазовый переход (или выделяемой при фазовом переходе) в уравнении теплопроводности (6) следующим образом:

$$\gamma(M, t) = \begin{cases} 1, & T = T_k^* \text{ и } -\rho_k^+ Q_k^* < \bar{Q}(M, t) < \rho_k^- Q_k^*, \quad M \in \Omega_k, \\ 0, & T \neq T_k^* \text{ или } \bar{Q} = \rho_k^- Q_k^*, \text{ или } \bar{Q} = -\rho_k^+ Q_k^*, \quad M \in \Omega_k, \end{cases} \quad (7)$$

$$Q(M, t) = \begin{cases} \bar{Q}(M, t), & \gamma(M, t) = 1, \\ 0, & \gamma(M, t) = 0, \end{cases} \quad (8)$$

здесь $\bar{Q}(M, t)$ — ограниченная функция, характеризующая удельное (отнесенное к единице объема) тепло, затраченное на фазовый переход, которая определяется в процессе решения.

Используя формулы (7) и (8), уравнение (6) можно переписать в виде

$$\rho(T)c(T)(1 - \gamma(M, t)) \frac{\partial T(M, t)}{\partial t} = \operatorname{div}(\lambda(T) \operatorname{grad} T(M, t)) - \gamma(M, t) \frac{\partial Q(M, t)}{\partial t}. \quad (9)$$

При температуре $T = T_k^*$ плотность и теплоемкость в уравнении (9) отсутствуют, поэтому они не требуют дополнительного определения в отличие от коэффициента теплопроводности (4), и их можно записать в кусочно-непрерывном виде:

$$c(T), \rho(T) = \begin{cases} c_k^+(T), \rho_k^+(T), & \text{если } T < T_k^*, \quad M \in \Omega_k, \\ c_k^-(T), \rho_k^-(T), & \text{если } T > T_k^*, \quad M \in \Omega_k. \end{cases} \quad (10)$$

Для замыкания математической модели необходимо задать граничные условия на внешней границе всего композита, условия сопряжения слоев и начальные условия. В качестве наиболее общего случая задания граничных условий для уравнения теплопроводности выберем условия теплообмена по закону Ньютона (краевые условия третьего рода):

$$\lambda \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} - \chi(T - T_e(t)) \Big|_{\Gamma} = 0, \quad (11)$$

где χ — коэффициент теплоотдачи, который в общем случае зависит от способа нагрева (охлаждения) внешней поверхности и для определенных режимов нагрева–охлаждения может принимать постоянные значения, функция $T_e(t)$ — температура окружающей среды и зависит от температурного режима технологического процесса, \vec{n} — вектор нормали к внешней поверхности, Γ — внешняя поверхность слоистого материала.

Предполагая, что на границах сопряжения слоев Γ_{kn} осуществляется идеальный контакт, можно утверждать, что температура должна быть непрерывна и потоки равны:

$$[T]_{\Gamma_{kn}} = 0, \quad \left[\lambda \frac{\partial T}{\partial \bar{n}} \right]_{\Gamma_{kn}} = 0. \quad (12)$$

В случае неидеального контакта (возникающего, например, при соприкосновения шероховатых тел) можно воспользоваться более сложными условиями, при которых тепловой поток непрерывен (в силу закона сохранения энергии), а температура терпит скачок на величину, пропорциональную величине теплового потока:

$$[T]_{\Gamma_{kn}} = \frac{\lambda_k}{\beta} \cdot \frac{\partial T}{\partial \bar{n}} \Big|_{\Gamma_{kn}}, \quad \left[\lambda \frac{\partial T}{\partial \bar{n}} \right]_{\Gamma_{kn}} = 0, \quad (13)$$

здесь β — коэффициент контактного теплообмена, который определяется из условий контакта.

Если считать, что в начальный момент времени распределение температуры во всем слоистом материале известно, тогда

$$T|_{t=0} = T_k^0, \quad M \in \Omega_k. \quad (14)$$

Математическая модель, содержащая уравнение (9), условия (11)–(14), является замкнутой, т.к. все необходимые для однозначной разрешимости граничные и начальные условия заданы. Для численной реализации модели (9)–(14) конечно-разностным методом строится пространственно-временная сетка $\bar{\omega} = \bar{\omega}_x \times \bar{\omega}_t$ кусочно-равномерная по координате с шагами Δ_k : $\bar{\omega}_x = \{x_{i+1} = x_i + \Delta_k, k = 1, i = 0, \dots, n_1 - 1, k = 2, i = n_1, \dots, n_2 - 1, \dots, k = K, i = n_{k-1}, \dots, n_K - 1\}$, и неравномерная по времени с переменным шагом $\Delta_{t,j}$ на некотором отрезке времени $t \in [0, t_{\text{end}}]$ технологического процесса: $\bar{\omega}_t = \{t_j = t_{j-1} + \Delta_{t,j}, j = \overline{1, m}\}$. Сетка по времени динамически адаптируется к процессу плавления (кристаллизации) следующим способом: задается основной шаг по времени Δ_t , который связывается с шагом $\Delta_{t,j}$ зависимостью

$$\Delta_{t,j} = \begin{cases} \Delta_t, & \text{если } -\rho^+ Q_k^* - \varepsilon < Q_i^j < \rho^- Q_k^* + \varepsilon, \\ \frac{\Delta_t}{2^s}, & \text{если } -\rho^+ Q_k^* + \varepsilon \geq Q_i^j \text{ или } Q_i^j \geq \rho^- Q_k^* - \varepsilon, \end{cases}$$

где s — номер итерации на j -ом временном слое, ε — малая величина порядка Δ_t , характеризующая погрешность определения Q_i^j . Если Q_i^j попадает в интервал $(-\rho^+ Q_k^* - \varepsilon, -\rho^+ Q_k^*]$ или $[\rho^- Q_k^*, \rho^- Q_k^* + \varepsilon)$, то итерации прекращаются.

Аппроксимация уравнения (9) на заданной сетке выглядит следующим образом (в случае, если $\lambda(T)$ слабо зависит от температуры):

$$\rho(T_i^{j-1})c(T_i^{j-1})(1 - \gamma_i^j) \frac{T_i^j - T_i^{j-1}}{\Delta_{t,j}} = \lambda(T^{j-1}) \frac{T_{i+1}^j - 2T_i^j + T_{i-1}^j}{\Delta_k^2} - \gamma_i^j \frac{Q_i^j - Q_i^{j-1}}{\Delta_{t,j}}. \quad (15)$$

Положение границы фазового перехода можно отследить по сеточной функции γ_i^j , которая определяется как

$$\gamma_i^j = \begin{cases} 1, & \text{если } -\rho^+ Q_k^* + \varepsilon < Q_i^{j-1} < \rho^- Q_k^* - \varepsilon \text{ и } T_k^* - \varepsilon < T_i^{j-1} < T_k^* + \varepsilon, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Если $\gamma_i^j = 1$, то в данной точке в текущий момент времени находится граница фазового перехода. Если $\gamma_i^j = 0$, то уравнение (9) в рассматриваемой точке превращается в обыкновенное уравнение теплопроводности, и фазовый переход не происходит.

После аппроксимации начального (14) и граничных (11–12) условий получается система уравнений с трехдиагональной матрицей, которая может быть решена стандартными методами, например, методом прогонки [6].

Результаты тестовых расчетов

В качестве первого тестового сравнения была выбрана классическая задача Стефана о проплавлении в области $0 \leq x < \infty$, при $t \geq 0$, имеющая автомодельное решение. При получении приближенного решения были приняты следующие допущения: полупространство моделировалось как один слой ($K = 1$) большой толщины ($0 \leq x < H$, $t \geq 0$), $H = 1$ (м). В качестве материала был выбран алюминий, начальная температура задавалась постоянной и равной температуре плавления ($T_0 = T^*$), температура на границе $x = 0$ также была постоянной, $T_e = 670$ °С. На границе $x = H$ задавалось условие равенства нулю теплового потока. Задача является однофазной, поскольку температура в одной фазе постоянна и равна начальной температуре.

Графики изменения толщины проплавления h по времени на рис. 2а соответствуют автомодельному решению Стефана (1), решению по предложенному методу при разных шагах по координате и времени (2–5): 2 — $\Delta_x = 0,00125$, $\Delta_t = 0,00125$, 3 — $\Delta_x = 0,0025$, $\Delta_t = 0,0025$, 4 — $\Delta_x = 0,005$, $\Delta_t = 0,005$, 5 — $\Delta_x = 0,01$, $\Delta_t = 0,01$.

Сравнивалось также решение, полученное предложенным методом, с решением Лейбензона в задаче о проплавлении неограниченного полого алюминиевого цилиндра большой толщины $H = 1$ (м) при температуре $T_0 = T^*$. В начальный момент времени температура на внутренней боковой поверхности цилиндра мгновенно повышается до некоторой температуры $T_e > T^*$ ($T_e = 670$ °С), которая поддерживается постоянной на протяжении всего процесса проплавления.

Графики изменения толщины проплавления h по времени на рис. 2б соответствуют решению Лейбензона (1), решениям, полученным по предложенному методу при разных шагах по координате и времени (2–4): 2 — $\Delta_x = 0,001$, $\Delta_t = 0,07$, 3 — $\Delta_x = 0,002$, $\Delta_t = 0,14$, 4 — $\Delta_x = 0,004$, $\Delta_t = 0,28$.

Проводилось сравнение предложенного метода со схемой сквозного счета (рис. 2с) при решении задачи о проплавлении в области $0 \leq x < H$ ($H = 1$ м) при $t \geq 0$. Начальная температура и температура на границе $x = 0$ были постоянными — $T_0 = 650$ °С и $T_e = 670$ °С,

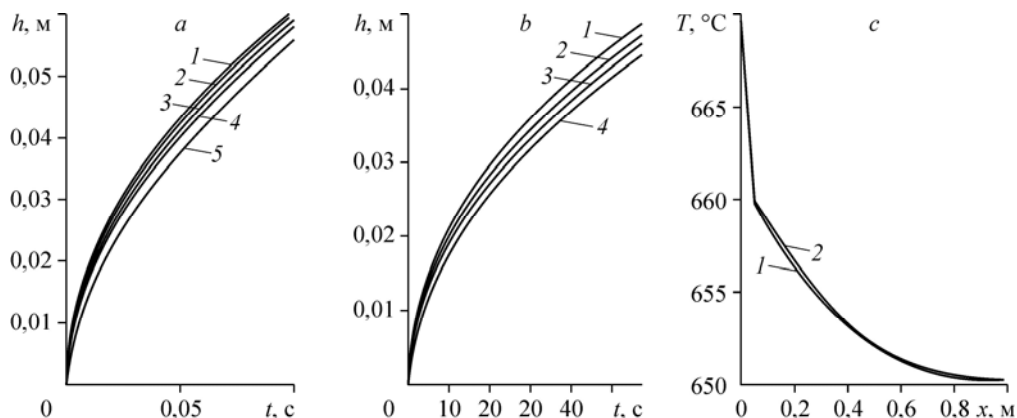


Рис. 2. Сравнение тестовых расчетов с автомодельным решением задачи Стефана (а), с решением Лейбензона (б) и с методом сквозного счета (с).

Таблица

Теплофизические свойства материалов

Материал	T^* , °C	c , Дж/(кг·м ³)		λ , Вт/(м·°C)		ρ , кг/м ³		Q^* , кДж/кг
		c^+	c^-	λ^+	λ^-	ρ^+	ρ^-	
Алюминий	660	1131,8	732,8	229	132	2700	2300	398
Олово	232	228	184	86	66,8	7310	7420	59,3
Цинк	420	387	357	142	116	7133	7300	111
Стекло	–	678		8,5		2200		–
Сталь	1451	1230		75		7800		84

на границе $x = H$ задавалось условие равенства нулю теплового потока; данная задача в отличие от предыдущих является двухфазной. Значения теплофизических характеристик приведены в таблице.

На рис. 2с изображено распределение температуры по толщине слоя через 60 с после начала процесса, которое соответствует решению, полученному по схеме сквозного счета [6] (1), и решению по математической модели (9), (11), (14) при шагах по координате и времени, равных соответственно $\Delta_x = 0,05$ и $\Delta_t = 0,1$ (2).

Полученные графики на рис. 2а, 2б демонстрируют сходимость численной схемы как к автомодельному решению, так и к приближенному методу Лейбензона. При сравнении с методом сквозного счета (рис. 2с) видно, что значения температуры практически одинаковые, незначительная разница наблюдается лишь в окрестности температуры плавления.

Результаты модельных расчетов для слоистых материалов

Для проверки адекватности и универсальности модель численно реализована для трех различных вариантов возможного плавления (кристаллизации) слоев в трехслойном композите, выполненном из разных материалов.

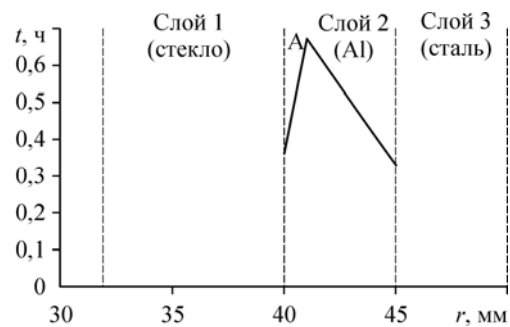
В первом случае модель применялась к описанию процесса формирования композиционного материала на базе стекла и стали, соединяемых через прокладку из легкоплавкого металла. Рассматривается охлаждение трехслойного цилиндра (начальная температура $T_0 = 900$ °C) с внутренним радиусом $r_0 = 32$ мм. Внутренний (первый) слой выполнен из стекла ($h_1 = 8$ мм), средний (второй) слой выполнен из легкоплавкого материала — алюминия ($h_2 = 5$ мм), внешний (третий) слой выполнен из стали ($h_3 = 3$ мм). Условия сопряжения слоев задаются по типу идеального контакта. Коэффициент теплоотдачи на внутренней поверхности $\chi_1 = 1680$ Вт/м², на внешней — $\chi_2 = 280$ Вт/м², температура окружающей среды определяется в соответствии с режимом технологического процесса:

$$T_e(t) = \begin{cases} 900 - \frac{25}{114}t, & 0 \leq t \leq 1140, \\ 650, & 1140 \leq t \leq 4740, \end{cases}$$

где t — время в секундах.

Результаты расчета положения границ фазового перехода приведены на рис. 3. Отчетливо выделяются два фронта фазового перехода, которые в итоге сливаются в точке А и исчезают в том смысле, что слой полностью закристаллизовывается.

Рис. 3. Положение границ фазового перехода во времени для системы стекло–Al–сталь.



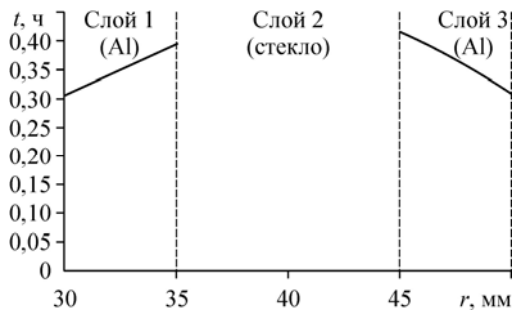


Рис. 4. Положение границ фазового перехода во времени для системы Al–стекло–Al.

Вертикальные пунктирные линии показывают границу раздела материалов.

Во втором случае рассматривается остывание трехслойного цилиндра с внутренним радиусом $r_0 = 30$ мм. Внутренний и внешний слои выполнены из алюминия ($h_1 = h_3 = 5$ мм), средний слой выполнен

из стекла ($h_2 = 10$ мм). Коэффициент теплоотдачи на внутренней поверхности задавался $\chi_1 = 1120$ Вт/м², на внешней — $\chi_2 = 1680$ Вт/м². Температура окружающей среды и условия сопряжения задавались как в предыдущем случае.

Графики на рис. 4 передают динамику границы раздела фаз, количество фаз в любой момент времени, начало и завершение процессов фазового перехода во внешних слоях. Ниже кривой материал слоя находится в жидком состоянии, а выше — в твердом. На графиках можно выделить время, при котором в композите одновременно существует два фронта фазового перехода.

В третьем случае решалась модельная задача о нагревании трехслойной пластины, состоящей из алюминия ($h_1 = 0,5$ м), олова ($h_2 = 0,3$ м) и цинка ($h_3 = 0,2$ м). Рассматривалась возможность проплавления всех трех слоев (рис. 5). Температура окружающей среды задавалась $T_e(t) = 2200$ °С, начальной — $T_0 = 20$ °С. Коэффициент теплоотдачи на внутренней и внешней поверхностях задавался $\chi_1 = 500$ Вт/м².

Графики на рис. 5 передают динамику границы раздела фаз, количество фаз, начало и завершение процессов фазового перехода во всех трех слоях. Выше кривой материал находится в жидком состоянии, ниже — в твердом. Изломы на графиках характеризуют время встречи фронтов, их исчезновения (это означает — весь слой полностью расплавился) в процессе изменения температуры во всем объеме. Отсюда же можно получить информацию о положении и времени существования двух фронтов одновременно. На рис. 6 представлены кривые распределения температуры во всех слоях в различные моменты времени, отмеченные на рис. 5 горизонтальными штриховыми линиями. Номера штриховых линий рис. 5 соответствуют кривым распределения температур на рис. 6 в заданный момент времени.

Особый интерес для практики представляет временной интервал, при котором слой находится в жидком состоянии, а также распределение температуры во времени в точках,

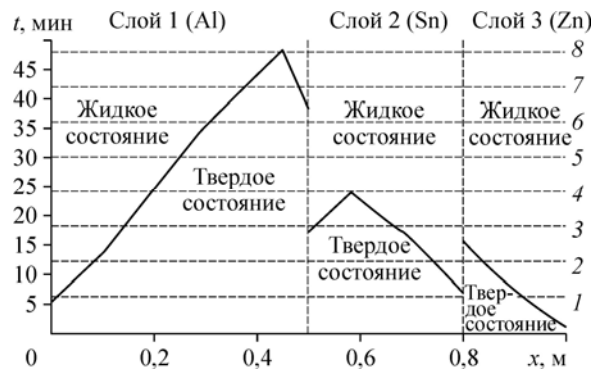


Рис. 5. Положение границ фазового перехода во времени для системы Al–Sn–Zn.

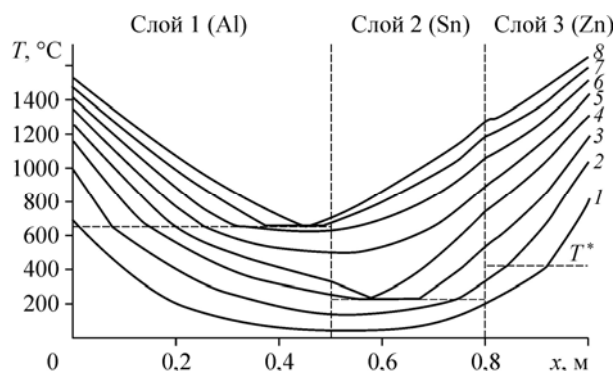


Рис. 6. Температурный профиль трехслойного материала в различные моменты времени.

близких к границе раздела сред в слоистом композите, поскольку от этого зависит скорость протекания диффузионных процессов, например, при сварке разнородных материалов.

Заключение

Процесс формирования композиционных материалов при условии плавления и последующей кристаллизации отдельных слоёв, как правило, включают три основных этапа: нагрев, выдержка, охлаждение. В первые два этапа обычно протекают процессы соединения композиционного материала, в некоторых случаях с образованием промежуточной фазы на границе сопряжения слоев. Задача слежения за фронтом фазового перехода позволяет определять напряжения, формирующиеся температурной и структурной неоднородностями в слоистых материалах, особенно на границах контакта разных материалов и разных фаз.

В настоящей работе для определения движения и формы границы раздела фаз предложена модель, содержащая функцию (8), которую можно назвать «фиктивным источником тепла». Введение этой функции позволяет с одной стороны упростить задачу, а с другой усложнить геометрию, граничные и начальные условия и рассматривать слоистый материал с произвольным количеством слоев и возможностью фазовых переходов в каждом слое.

Список литературы

1. Пат. 2428388 РФ, МПК^{С1} С03С 27/02. Способ изготовления стеклометаллокомпозита / Гридасова Е.А., Любимова О.Н., Пестов К.Н., Каяк Г.Л.; заявитель и патентообладатель Гос. образ. учр. высш. професс. образ. Дальневосточный гос. техн. ун-т. № 2009149790/03; заяв. 31.12.2009; опубл. 10.09.2011, Бюл. № 25. 6 с.
2. Никитенко Н.И. Исследование процессов тепло- и массообмена методом сеток. К.: Наук. думка, 1978. 213 с.
3. Будаков Б.М., Успенский А.Б. Разностный метод с выпрямлением фронтов для решения задач типа Стефана // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 1969. Т. 9, № 6. С. 1299–1315.
4. Самарский А.А., Моисеенко Б.Д. Экономичная схема сквозного счета для многомерной задачи Стефана // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 1965. Т. 9, № 5. С. 816–827.
5. Будаков Б.М., Соловьева Е.Н., Успенский А.Б. Разностный метод со сглаживанием коэффициентов для решения задач Стефана // Журн. вычисл. математики и матем. физики. 1965. Т. 5, № 5. С. 828–840.
6. Самарский А.А., Вабищевич П.Н. Вычислительная теплопередача. М.: Едиториал УРСС, 2003. 784 с.

Статья поступила в редакцию 22 мая 2014 г.,
после переработки — 14 октября 2014 г.