

Р и с. 5

участки, прилегающие к углам пластины (рис. 5, а, $\tau = 0,8$). При дальнейшем удалении вихря от плоскости пластины его «угловые» участки могут на короткое время догонять участки, соответствующие ребрам пластины (рис. 5, б, $\tau = 1,4$), но никогда не опережают их. Мелкомасштабных колебаний вихря для квадратной пластины не наблюдается.

При действии на тело некруглой формы в плане (эллиптическая или квадратная пластина и т. п.) сферической УВ различные элементы вихревого кольца испытывают значительные периодические колебания друг относительно друга [1]. Указанное различие в поведении вихревых колец в случае плоской и сферической УВ, по-видимому, связано с тем обстоятельством, что за фронтом сферической волны скорость потока быстро падает со временем и смещение вихревого кольца относительно пластины мало. За плоской УВ скорость потока сохраняет постоянное значение, вследствие чего вихрь быстро удаляется от тела. Таким образом, близость тела и взаимодействие с ним индуцированного вихрем потока газа — одна из основных причин возникновения крупномасштабных колебаний вихревого кольца.

ЛИТЕРАТУРА

1. Иванов А. Н., Михайлов В. И. Исследование отрывного течения за плоскими и пространственными телами при действии на них сферической ударной волны.— ПМТФ, 1984, № 4.
2. Прандтль Л. Гидроаэромеханика.— М.: ИЛ, 1951.
3. Pierce D. Photographic evidence of the formation and growth of vorticity behind plates accelerated from rest in still air.— J. Fluid Mech., 1961, v. 11, pt 3.
4. Чжен П. Отрывные течения.— М.: Мир, 1973, т. 2.
5. Widnall S., Sullivan J. P. On the stability of vortex rings.— Proc. Roy. Soc. London, 1973, A 332, 335—353.
6. Ламб Г. Гидродинамика.— М.— Л.: Гостехиздат, 1947.
7. Maxworthy T. Turbulent vortex rings.— J. Fluid Mech., 1974, v. 64, pt 2.

Поступила 9/X 1985 г.

УДК 534.222.2

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О РАСПРОСТРАНЕНИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЫ В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

Н. А. Кудряшов, С. С. Кучеренко, А. И. Побережный

(Москва)

Лабораторные исследования по термоядерному синтезу [1], некоторые астрофизические процессы [2] и активные эксперименты в космосе [3] сопровождаются распространением в магнитном поле сильной ударной волны (УВ), понижующей окружающую среду. В этой связи представляет интерес изучить взаимное влияние ионизирующей УВ и магнитного поля.

Распространение цилиндрического газового облака и сильной цилиндрической УВ рассматривалось в [4, 5]. Бесстолкновительное расширение ионизованного облака в однородную плазму изучалось в [4]. Задача о распространении цилиндрической

УВ с учетом влияния магнитного поля и излучения решена в [5]. Численное решение задачи о взрыве сферического заряда в магнитном поле в приближении малых чисел Рейнольдса (без учета деформации начального магнитного поля) представлено в [6]. Решения некоторых задач о взрыве с учетом влияния магнитного поля для случая точечного взрыва даны в [7]. В [8] исследовалось распространение ионизирующей УВ в однородном магнитном поле в предположении, что вся масса газа находится вблизи поверхности фронта.

В данной работе на основе численного решения системы уравнений магнитной гидродинамики проанализировано влияние магнитного поля на распространение цилиндрической УВ в полностью ионизованном и в слабоионизованном газе атмосферы Земли.

В [9] показано, что потери энергии на ионизацию воздуха при расширении нагретого облака плазмы сравнительно невелики, поэтому при постановке данной задачи потери энергии на излучение и ионизацию окружающего газа не учитываются.

Рассмотрим газодинамическое расширение цилиндрического облака плазмы в разреженную среду. Вектор напряженности магнитного поля направлен параллельно оси цилиндра. Задача в такой постановке становится одномерной и описывается системой уравнений магнитогидрогазодинамики (используется цилиндрическая система координат r, φ, z)

$$(1) \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{v}) = 0;$$

$$(2) \quad \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} = - \frac{\nabla p}{\rho} + \mathbf{f}, \quad \mathbf{f} = \frac{1}{c} [\mathbf{j} \times \mathbf{H}];$$

$$(3) \quad \frac{\partial e}{\partial t} + (\mathbf{v} \nabla) e = - \frac{p}{\rho} \operatorname{div} \mathbf{v} + \frac{1}{\rho} (\mathbf{j} \cdot \mathbf{E});$$

$$(4) \quad \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot} [\mathbf{v} \times \mathbf{H}] - c \operatorname{rot} \mathbf{E};$$

$$(5) \quad \mathbf{j} = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathbf{H},$$

где ρ — плотность; p — давление, $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ — скорость; e — внутренняя энергия; $\mathbf{E} = (0, E, 0)$ — напряженность электрического поля; $\mathbf{H} = (0, 0, H)$ — напряженность магнитного поля; $\mathbf{f} = (f, 0, 0)$ — ponderomotorная сила; $\mathbf{j} = (0, j, 0)$ — плотность тока; c — скорость света; t — время.

Газ предполагается невязким и нетеплопроводным. Течение газа, описываемое системой (1)–(5), удобно рассматривать в переменных Лагранжа ($dm = \rho r dr$):

$$(6) \quad \frac{1}{\rho} = r \frac{\partial r}{\partial m};$$

$$(7) \quad \frac{\partial v}{\partial t} + r \frac{\partial}{\partial m} \left(p + \frac{H^2}{8\pi} \right) = 0, \quad v = \frac{\partial r}{\partial t};$$

$$(8) \quad \frac{\partial e}{\partial t} + p \frac{\partial}{\partial m} \left(\frac{1}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} (jE);$$

$$(9) \quad \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{H}{\rho} \right) = -c \frac{\partial}{\partial m} (rE);$$

$$(10) \quad j = - \frac{c}{4\pi} \rho r \frac{\partial H}{\partial m}.$$

Для замыкания системы уравнений (6)–(10) используем уравнения состояния идеального газа

$$(11) \quad p = \rho RT, \quad e = p / [\rho(\gamma - 1)]$$

и обобщенный закон Ома

$$(12) \quad j = \sigma E.$$

Здесь R — универсальная газовая постоянная; γ — показатель адиабаты; T — температура; σ — проводимость.

Ввиду симметрии решение ищется в области $r > 0$ с граничными условиями $r = 0, v = 0, E = 0$ и на бесконечности с $v = 0, H = H_0,$

$\rho = \rho_0$, $p = p_0$, где H_0 — напряженность внешнего магнитного поля, ρ_0 и p_0 — начальные плотность и давление окружающего газа.

В начальный момент времени плазма находится внутри цилиндрической поверхности радиуса r_0 с параметрами ρ_1 , p_1 , T_1 , v_1 , причем $p_1 > p_0$, $T_1 > T_0$. Начальное значение напряженности магнитного поля в облаке H_1 .

Под действием избыточного давления облако плазмы начинает расширяться (предполагается, что $p_1 + H_1^2/8\pi > p_0 + H_0^2/8\pi$), образуется УВ, которая нагревает и при достижении некоторой температуры T_* ионизует окружающий газ. В результате движения электропроводного газа поперек магнитных силовых линий возникают индуцированные токи, что приводит к торможению разлетающегося облака пондеромоторными силами и изменению начального магнитного поля.

Проведем обезразмеривание МГД-уравнений. В качестве основных определяющих постоянных выберем r_0 , ρ_0 , p_0 , R , масштабы измерения остальных величин выражаются через определяющие параметры следующим образом:

$$\begin{aligned} v_0 &= (\gamma p_0/\rho_0)^{1/2}, \quad t_0 = r_0/v_0, \quad \varepsilon_0 = p_0/\rho_0, \\ T_0 &= p_0/R\rho_0, \quad H_0 = p_0^{1/2}, \quad E_0 = v_0 H_0/c, \\ j_0 &= cH_0/r_0, \quad \sigma_0 = c^2/(v_0 r_0). \end{aligned}$$

В дальнейшем все величины, кроме начальных определяющих параметров, приводятся в безразмерных единицах.

Решение задачи (6)–(12) проводилось численно конечно-разностным методом. Газодинамическая часть разностных уравнений строилась по предложенной в [10] схеме с введением линейной и квадратичной вязкости. Функции r , E определяются в целых временных точках и центрах массовых интервалов p , ρ , T , e — в целых временных и «половинных» точках массовых интервалов, v — в «половинных» временных и «половинных» точках массовых интервалов. На каждом шаге по времени сначала по явной схеме вычисляем газодинамические функции, затем методом потоковой прогонки [11] решаем неявные уравнения электромагнитного поля и находим E и H . Шаг по времени выбираем из условия Куранта, в котором в качестве скорости звука используется скорость быстрой магнитной волны, и условия, связанного с искусственной вязкостью [10].

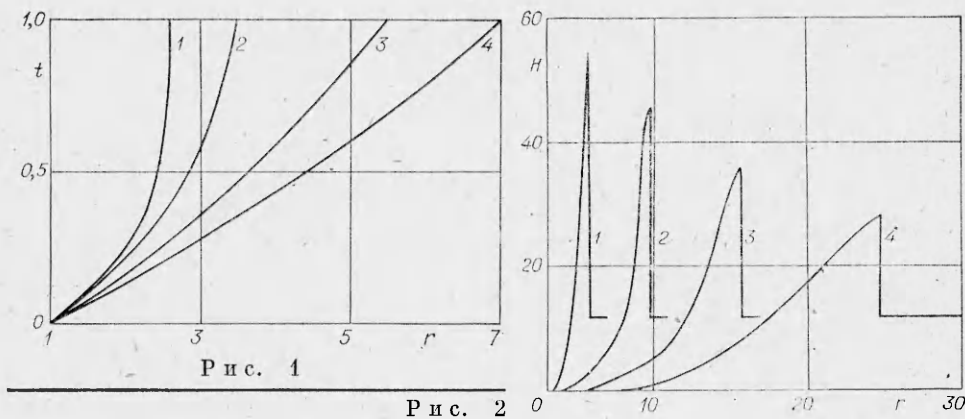
Описанным методом решалась задача о разлете облака плазмы в полностью ионизованную фоновую среду. Проводимость в этом случае принималась в виде [12]

$$\sigma = \sigma_* T^{3/2}.$$

В качестве окружающего газа взят воздух при $p_0 = 0,18 \cdot 10^{-2}$ дин/см², $\rho_0 = 0,43 \cdot 10^{-12}$ г/см³. Начальный радиус цилиндрического плазменного облака $r_0 = 0,5 \cdot 10^5$ см, $H_0 = 0,5$ Э.

На рис. 1 представлена зависимость координат границы облака и фронта УВ от времени при $p_1 = 10^2$, $\rho_1 = 1$, $v_1 = 0$, $H_1 = 0$. Кривые 1 и 4 характеризуют положение контактной границы и фронта УВ с учетом влияния магнитного поля при расширении облака плазмы и распространении УВ, 2, 3 — газодинамический расчет без учета влияния магнитного поля. Как видно из рис. 1, магнитное поле замедляет расширение облака плазмы, однако фронт УВ распространяется быстрее. В предельном случае (малые возмущения) это соответствует тому, что скорость распространения быстрой МГД-волны равна $(a_s^2 + H^2/(4\pi\rho))^{1/2}$, где a_s — скорость звука в газе. Движение контактной границы с учетом магнитного поля медленнее из-за действия пондеромоторных сил.

Распределение напряженности магнитного поля для моментов времени $t = 0,13; 0,34; 0,80; 1,72$ (кривые 1–4) при $p_1 = 10^4$, $\rho_1 = 1$, $v_1 = 0$, $H_1 = 0$ изображено на рис. 2. Видно, что поле вытесняется из объема, занятого плазмой. При этом из-за высокой проводимости плазмы реа-



лизуются условия, близкие к условиям замороженности, и пику в распределении плотности соответствует пик в распределении напряженности магнитного поля.

Расчеты, проведенные при начальных условиях, когда поля в плазме нет ($H_1 = 0$), и при $H_1 = H_0$, показали, что существенной разницы в поведении решений для указанных случаев нет.

На рис. 3, а представлены зависимости газодинамического давления p , магнитного давления $H^2/8\pi$ и полного давления $p + H^2/8\pi$ для $t = 1,9$ ($p_1 = 10^2$). При распространении УВ без учета магнитного поля характерным является острый пик газодинамического давления на фронте УВ. Из проведенных расчетов следует, что при распространении УВ в магнитном поле на фронте имеется скачок давления плазмы (кривая 1), но острый пик соответствует лишь полному давлению (кривая 3). Линия 2 на рис. 3 описывает распределение магнитного давления. Такое распределение газодинамического давления плазмы и магнитного давления устанавливается на относительно поздней стадии процесса распространения УВ.

На рис. 3, б показана зависимость давления p газа с учетом (сплошные) и без учета (штриховые линии) магнитного поля для $t = 0,13; 0,25; 0,34$ (кривые 1—3) при $p_1 = 10^4$. Видны отличия в качественном поведении давления газа при учете и без учета влияния магнитного поля.

Рассмотрена также задача о разлете плазменного облака в атмосфере Земли с параметрами $p_0 = 0,18 \cdot 10^{-2}$ дин/см², $\rho_0 = 0,43 \cdot 10^{-12}$ г/см³, $H_0 = 0,5$ Э, $r_0 = 10^5$ см. УВ, распространяющаяся по окружающему воздуху, нагревает и ионизует газ. Учет ионизации приводит к необходимости учета структуры УВ, так как обычные законы сохранения не образуют, вообще говоря, полного набора граничных условий на УВ ионизации. В [13] предложена численная модель течения, позволяющая избежать непосредственного расчета фронта ионизации. Считается, что ионизация происходит при достижении газом некоторого критического значения температуры T_* (при расчетах $T_* \sim 30$ эВ), т. е. фронт иони-

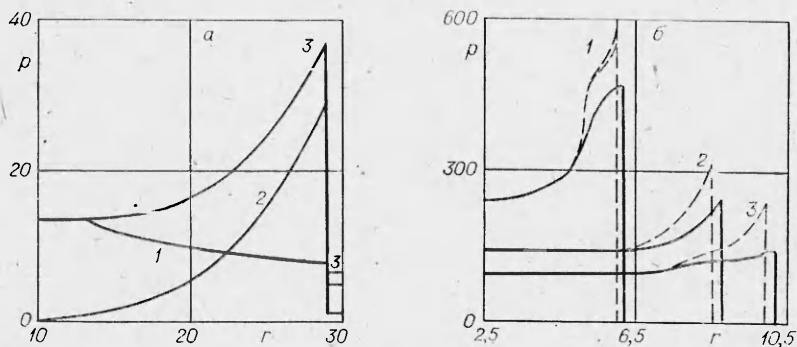
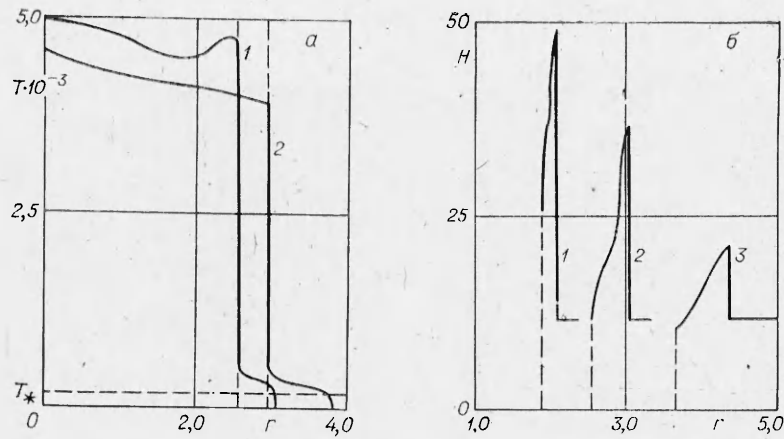


Рис. 3



Р и с. 4

зации — поверхность $T = T_*$. Фоновый газ имеет постоянную проводимость σ_1 , возникающую, например, из-за фотоионизации. Будем полагать, что за фронтом ионизации газ полностью ионизован и проводимость плазмы задается в виде $\sigma = \sigma_2 T^{3/2}$.

Таким образом, учет ионизации приводит к зависимости проводимости от температуры:

$$(13) \quad \sigma = \begin{cases} \sigma_1, & T < T_*, \\ \sigma_2 T^{3/2}, & T > T_*. \end{cases}$$

По-прежнему будем пользоваться законом Ома (12), применимость которого для рассматриваемых высот от 90 км и выше вытекает из данных, приведенных в [14]. Кроме того, перед фронтом ионизирующей УВ всегда имеется область предшествующей ионизации, вызывающей возрастание концентрации заряженных частиц. Вследствие этого параметр Холла $\chi = \omega \tau^e \ll 1$, что позволяет расширить область применимости закона Ома в форме (12) и до высот ниже 90 км.

Коэффициенты в формуле (13) брались равными $\sigma_1 = 10^{-6}$, $\sigma_2 = 10^2$.

На рис. 4, а, б представлены распределения температуры для $t = 0,08$; $0,12$ (кривые 1, 2) и напряженности магнитного поля для $t = 0,04$; $0,08$; $0,2$ (линии 1—3) при $p_1 = 10^4$. Вертикальными штриховыми линиями отмечена граница плазменного облака, горизонтальная соответствует $T = T_*$. Ступенька в распределении температуры перед контактной границей появляется из-за нагревания окружающего газа УВ. При этом для рассматриваемых моментов времени температура за фронтом УВ выше T_* и, следовательно, УВ ионизует окружающий газ. Магнитное поле из-за высокой проводимости плазмы в области течения ведет себя аналогично рассмотренному выше случаю полностью ионизованной среды. Однако максимумы магнитного поля имеют меньшую величину и убывают быстрее, чем в полностью ионизованной окружающей среде.

Рис. 5 иллюстрирует характер поведения плотности тока за фронтом УВ (кривые 1—3 для $t = 0,04$; $0,05$; $0,08$). Максимумы в области отрицательных и положительных значений появляются из-за разрыва в распределении магнитного поля на контактной границе и разрыва на фронте УВ.

Результаты расчетов течения при $p_1 = 10^2$ показали, что УВ нагревает окружающий газ до температур ниже T_* и ионизация не происходит. Вследствие малой проводимости окружающего газа ($Re_m = 4\mu\sigma_1 \ll \ll 1$) индуцированное магнитное поле пренебрежимо мало по сравнению с H_0 . В то же время из плазменного облака поле вытесняется (здесь $Re_m \gg 1$). На рис. 6 представлено распределение газодинамического давления p для $t = 1,6$; $2,4$ при $H_0 = 11,7$ (кривые 1, 2) и $t = 2,4$ при $H_0 =$

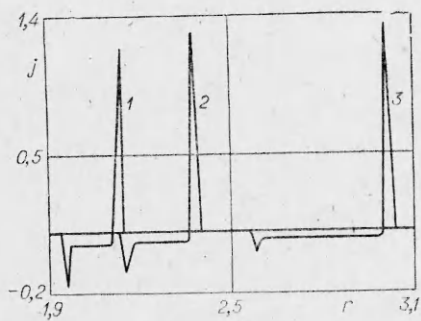


Рис. 5

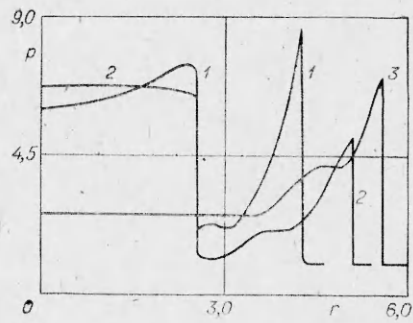


Рис. 6

$= 0$ (кривая 3). Взаимодействие внешнего магнитного поля на контактной поверхности с плазмой приводит при рассматриваемых временах к сильному торможению плазмы ($\beta = 8\pi r/H_0^2 \ll 1$). В облаке сохраняется область высокого давления, которое уравновешивается внешним магнитным давлением. Из-за сильного торможения облака магнитным полем УВ, бегущая по окружающему газу, значительно слабее и имеет скорость фронта, меньшую, чем в случае, когда внешнего магнитного поля нет.

Результаты расчетов при других значениях коэффициентов σ_1 , σ_2 в формуле (13) показали, что варьирование этих коэффициентов ($\sigma_1 = 10^{-4}$, 10^{-8} , $\sigma_2 = 10^4$) не приводит к заметным отличиям в результатах.

Таким образом, из проведенных расчетов следует, что магнитное поле изменяет качественное и количественное поведение физических характеристик при распространении УВ как в полностью ионизованной, так и в слабоионизованной окружающей среде. Происходит замедление контактной границы при расширении облака плазмы, причем из-за высокой проводимости плазмы (реализуются условия, близкие к условиям замороженности) поле вытесняется из облака. Имеются отличия в качественном поведении газодинамического давления при учете и без учета магнитного поля. Характер поведения магнитного поля так же, как и скорость фронта УВ, зависит от степени ионизации окружающего газа.

ЛИТЕРАТУРА

1. Friedman H. W., Patrick R. M. Momentum transfer in plasma flows at high Alfen Mach numbers.— *Phys. Fluids*, 1971, v. 14, N 9.
2. Dryer Murray, Maxwell Alan. Radio data and theoretical model for the fast-mode MHD shock wave generated by the solar flare of 1973 September 5, 1826 UT.— *Astrophys. J.*, 1979, v. 231, N 3, pt 1.
3. Операция «Аргус».— М.: Атомиздат, 1960.
4. Голубев А. И., Соловьев А. А., Терехин В. А. О бесстолкновительном разлете ионизованного облака в однородную замагниченную плазму.— *ПМТФ*, 1978, № 5.
5. Коробейников В. П., Марков В. В., Путятин Б. В. О распространении цилиндрических взрывных волн с учетом излучения и магнитного поля.— *Изв. АН СССР. МЖГ*, 1977, № 4.
6. Коробейников В. П., Путятин Б. В. Взрыв сферического заряда в магнитном поле.— *ПМТФ*, 1984, № 2.
7. Коробейников В. П. Задачи теории точечного взрыва в газах.— М.: Наука, 1973.
8. Кудряшов П. А. Распространение ионизирующей ударной волны в однородном магнитном поле.— *ПМТФ*, 1983, № 3.
9. Colgate S. A. The phenomenology of the mass motion of a high altitude nuclear explosion.— *J. Geophys. Res.*, 1965, v. 70, N 13.
10. Брод Г. Л. Динамика газа с излучением: общий численный метод.— В кн.: Действие ядерного взрыва. М.: Мир, 1971.
11. Дегтярев Л. М., Фаворский А. П. Поточный вариант метода прогонки для разностных задач с сильно меняющимися коэффициентами.— *ЖВММФ*, 1969, т. 9, № 6.
12. Брагинский С. И. Явления переноса в плазме.— В кн.: Вопросы теории плазмы. М.: Атомиздат, 1963, вып. 1.
13. Брушлинский К. В., Морозов А. И. Расчет двумерных течений плазмы в каналах.— В кн.: Вопросы теории и плазмы. М.: Атомиздат, 1974, вып. 8.
14. Околоземное космическое пространство (справ. данные).— М.: Мир, 1966.

Поступила 13/IX 1985 г.