

УДК 519.634

ДИНАМИКА ТОЧЕК ОТРЫВА ПОСЛЕ МГНОВЕННОЙ ОСТАНОВКИ КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА В ВОЗМУЩЕННОЙ ЖИДКОСТИ

М. В. Норкин

Южный федеральный университет, 344090 Ростов-на-Дону, Россия

E-mail: norkinmi@mail.ru

Исследуется динамика тонкой присоединенной каверны, образовавшейся в результате мгновенной остановки (удара) кругового цилиндра в возмущенной жидкости. Течение жидкости в момент, непосредственно следующий за ударом, и первоначальная зона отрыва определяются с использованием классической модели удара с отрывом. Для изучения процесса схлопывания каверны применяется прямой асимптотический метод, в котором разложения основных гидродинамических характеристик ведутся по малому параметру, равному безразмерному ускорению цилиндра до удара. В главном асимптотическом приближении формулируется задача с односторонними ограничениями, из решения которой определяется движение точек отрыва и описывается процесс схлопывания тонкой каверны. С учетом специальных уравнений пограничного слоя проводится анализ внутренней свободной границы жидкости.

Ключевые слова: идеальная несжимаемая жидкость, круговой цилиндр, мгновенная остановка, отрыв жидкости, динамика точек отрыва, схлопывание каверны, число кавитации.

DOI: 10.15372/PMTF20220408

Введение. Классические смешанные задачи о гидродинамическом ударе играют важную роль в теории взаимодействия твердых тел с жидкостью [1]. Об актуальности таких задач свидетельствуют работы, в которых для их решения применяются аналитические методы [2–5]. При этом рассматривается как безотрывный удар, так и удар с отрывом. Использование классической модели удара с отрывом позволяет получить начальные условия для решения более сложной динамической кавитационной задачи. Первые исследования динамики отрыва после кавитационного удара проведены в работе [6], в которой для случая горизонтального удара полупогруженного в жидкость кругового цилиндра изучалась начальная асимптотика точки отрыва. Далее этот результат был обобщен на случай цилиндра, полностью погруженного в жидкость [7]. Положение точек отрыва в каждый момент времени определялось таким образом, чтобы выполнялось условие Кутты — Жуковского. Было показано, что при не очень большом (порядка атмосферного) давлении в каверне точки отрыва внутренней свободной границы жидкости начинают двигаться навстречу друг другу. Дальнейшую динамику точек отрыва удастся проследить при малых скоростях движения цилиндра, которые соответствуют небольшим числам Фруда [8, 9]. В настоящей работе результаты работ [8, 9] обобщаются на случай мгновенной остановки кругового цилиндра в возмущенной жидкости. Как и в [8, 9], получено полное

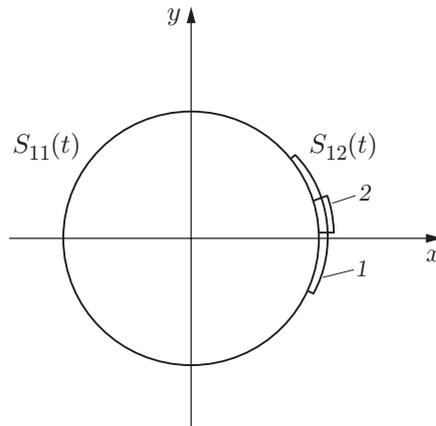


Рис. 1. Схема течения и формы каверн при значениях безразмерного времени $\tau = 0,1$ (1), $\tau = 0,2$ (2)

решение задачи об образовании и схлопывании присоединенной каверны после кавитационного удара, но в отличие от этих работ в качестве малой величины рассматривается не скорость тела после удара, а ускорение, с которым оно двигалось до удара. Давление в каверне полагается постоянным и равным давлению насыщенных паров жидкости или газа (естественная ситуация) или давлению газа при искусственной кавитации. С точки зрения технических приложений следует отметить, что положение кавитатора (или кавитаторов) на теле можно определить с использованием классической модели удара, которая не зависит от числа кавитации. Искусственная кавитация проявляется после мгновенного удара.

Заметим, что подобные проблемы возникают при исследовании задач о проникании твердых тел в жидкость. Обзор соответствующих работ приведен в [10].

1. Постановка задачи. Рассматривается плоская задача о мгновенной остановке (ударе) кругового цилиндра в возмущенной идеальной несжимаемой тяжелой жидкости. После удара перед телом образуется присоединенная каверна, форма которой зависит от начального возмущения жидкости, искусственного поддува воздуха, а также от физических и геометрических параметров задачи. Требуется изучить процесс схлопывания каверны при малых возмущениях внутренней свободной границы жидкости, обусловленных медленным разгоном цилиндра до удара. В общей математической постановке задача, записанная в безразмерных переменных в системе координат, связанной с цилиндром, имеет вид (рис. 1)

$$\begin{aligned}
 \Delta\Phi &= 0, \quad r \in \Omega(t), & \frac{\partial\Phi}{\partial n} &= 0, \quad r \in S_{11}(t), \\
 \frac{\partial\Phi}{\partial t} + 0,5(\nabla\Phi)^2 + y - H - 0,5\chi &= 0, \quad r \in S_{12}(t), \\
 \frac{\partial\Phi}{\partial R} &= \frac{\partial\eta}{\partial\theta} \dot{\theta}(t) + \frac{\partial\eta}{\partial t}, \quad \dot{\theta}(t) = R^{-2} \frac{\partial\Phi}{\partial\theta}, \quad r \in S_{12}(t), \\
 \frac{\partial\Phi}{\partial t} + 0,5(\nabla\Phi)^2 + y - H &= 0, \quad r \in S_2(t), \\
 \frac{\partial\Phi}{\partial y} &= \frac{\partial\xi}{\partial x} \frac{\partial\Phi}{\partial x} + \frac{\partial\xi}{\partial t}, \quad r \in S_2(t),
 \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = 0, \quad y = -H_b, \quad \nabla \Phi \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \pm\infty,$$

$$\Phi(x, y, t_0) = \Phi_0(x, y), \quad \xi(x, t_0) = \xi_*(x), \quad \eta(\theta, t_0) = 0.$$

Потенциал скоростей Φ_0 , приобретенных частицами жидкости в момент t_0 , следующий непосредственно за ударом, и начальная зона отрыва находятся на основе классической модели удара с отрывом [1]:

$$\Delta \Phi_0 = 0, \quad r \in \Omega(t_0); \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial n} = 0, \quad \Phi_0 \leq \Phi_*, \quad r \in S_{11}(t_0); \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial n} \geq 0, \quad \Phi_0 = \Phi_*, \quad r \in S_{12}(t_0); \tag{1.4}$$

$$\Phi_0 = \Phi_*, \quad r \in S_2(t_0); \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial y} = 0, \quad y = -H_b, \quad \nabla \Phi_0 \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \pm\infty. \tag{1.6}$$

В силу того что зона отрыва $S_{12}(t_0)$ не известна, задача (1.2)–(1.6) является нелинейной и относится к классу задач со свободными границами.

В данной работе используются следующие обозначения: $\Omega(t)$ — область, которая занята жидкостью и полагается неограниченной в горизонтальном направлении; $S_{11}(t)$ — часть поверхности цилиндра, где не происходит отрыва частиц жидкости; $S_{12}(t)$ — внутренняя свободная граница жидкости (граница каверны); $S_2(t)$ — внешняя свободная поверхность, которая до начала процесса (до разгона цилиндра) была невозмущенной ($y = H$ — невозмущенный уровень); $\Phi = \Phi(x, y, t)$ — потенциал скоростей в момент времени $t > t_0$; Φ_* , $\xi_*(x)$ — потенциал скоростей и возмущение внешней свободной поверхности непосредственно перед остановкой цилиндра (последняя функция совпадает с возмущением данной границы непосредственно после остановки); $\eta = \eta(\theta, t)$, $\xi = \xi(x, t)$ — возмущения внутренней и внешней свободных границ жидкости при $t > t_0$; a — радиус цилиндра; координата $y = -H_b$ соответствует положению дна бассейна; R, θ — полярные координаты ($x = R \cos \theta$, $y = R \sin \theta$); r — радиус-вектор с координатами (x, y) ; $\chi = 2(p_a - p_c)/(p_g a)$ — число кавитации; p_a — атмосферное давление; p_c — давление в каверне; ρ — плотность жидкости.

Безразмерные переменные вводятся по формулам

$$t' = \frac{a}{v} t, \quad x' = ax, \quad y' = ay, \quad \Phi' = av\Phi, \quad p' = \rho v^2 p,$$

где штрих означает размерные величины; $v = \sqrt{ga}$ — характерная скорость.

На внутренней и внешней свободных границах

$$R = 1 + \eta(\theta, t), \quad y = H + \xi(x, t)$$

выполняются динамические и кинематические условия. В точках пересечения внутренней свободной границы жидкости с поверхностью цилиндра (точках отрыва) ставится условие Кутты — Жуковского, означающее, что скорость жидкости в этих точках должна быть конечной.

Возмущенное течение жидкости непосредственно перед остановкой цилиндра описывается при дополнительном предположении, что внешняя свободная граница находится на достаточно большом расстоянии от тела (фактически рассматривается задача Неймана в полуплоскости с выброшенным кругом). При этом влияние дна бассейна учитывается с помощью альтернирующего метода Шварца, использование которого наряду с методом

малого параметра приводит к решению в виде асимптотики потенциала скоростей Φ_* , справедливой в любой фиксированной (не зависящей от H_b) окрестности смоченной поверхности тела ($H_b \rightarrow \infty$):

$$\begin{aligned} \Phi_* &= \omega g^{-1} t_0 u, \\ u &= -\frac{x}{x^2 + y^2} - \frac{1}{4} \left(x + \frac{x}{x^2 + y^2} \right) H_b^{-4} + \frac{1}{4} \left(xy + \frac{xy}{(x^2 + y^2)^2} \right) H_b^{-5} + \\ &+ \frac{1}{16} \left(x(x^2 - 3y^2 - 1) + \frac{4x^3}{(x^2 + y^2)^3} - \frac{3x}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{x}{x^2 + y^2} \right) H_b^{-6} + O(H_b^{-7}), \end{aligned}$$

где первое слагаемое соответствует движению цилиндра в неограниченной жидкости.

2. Асимптотический анализ задачи при малых значениях ω . Исследование схлопывания присоединенной каверны после удара (после мгновенной остановки) в основном сводится к исследованию динамики точек отрыва. При их движении зона отрыва монотонно уменьшается и схлопывание происходит в момент, когда эта зона полностью исчезает. Такая модель схлопывания оправдана при малом возмущении внутренней свободной границы жидкости и небольшом давлении в каверне (порядка атмосферного). Малые поперечные размеры каверны могут быть обусловлены движением цилиндра до удара с небольшим постоянным ускорением. Рассмотрим это явление более подробно. Введем параметр ε , равный безразмерному ускорению цилиндра до удара:

$$\varepsilon = \omega/g \quad (2.1)$$

(ω — ускорение цилиндра до удара; g — ускорение свободного падения). Обозначим через τ растянутое время, связанное с $t - t_0$ равенством $t - t_0 = \varepsilon\tau$. Первая степень ε в (2.1) обусловлена согласованием порядков рассматриваемых величин в главном асимптотическом приближении. После введения новых функций

$$\varphi(x, y, \tau) = \varepsilon^{-1} \Phi(x, y, t_0 + \varepsilon\tau), \quad \zeta(\theta, \tau) = \eta(\theta, t_0 + \varepsilon\tau), \quad \psi(x, \tau) = \xi(x, t_0 + \varepsilon\tau)$$

задача (1.1) записывается в виде

$$\Delta\varphi = 0, \quad r \in \Omega(t); \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = 0, \quad r \in S_{11}(t); \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} + 0,5\varepsilon^2(\nabla\varphi)^2 + y - H - 0,5\chi = 0, \quad r \in S_{12}(t); \quad (2.4)$$

$$\varepsilon \frac{\partial\varphi}{\partial R} = \varepsilon R^{-2} \frac{\partial\zeta}{\partial\theta} \frac{\partial\varphi}{\partial\theta} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial\zeta}{\partial\tau}, \quad r \in S_{12}(t); \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\tau} + 0,5\varepsilon^2(\nabla\varphi)^2 + y - H = 0, \quad r \in S_2(t); \quad (2.6)$$

$$\varepsilon \frac{\partial\varphi}{\partial y} = \varepsilon \frac{\partial\psi}{\partial x} \frac{\partial\varphi}{\partial x} + \varepsilon^{-1} \frac{\partial\psi}{\partial\tau}, \quad r \in S_2(t); \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0, \quad y = -H_b; \quad (2.8)$$

$$\nabla\varphi \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \pm\infty; \quad (2.9)$$

$$\varphi(x, y, 0) = \varphi_0(x, y), \quad \psi(x, 0) = \xi_*(x), \quad \zeta(\theta, 0) = 0, \quad (2.10)$$

где функция φ_0 определяется путем решения задачи (1.2)–(1.6), в которой функция Φ_0 заменена на φ_0 , а Φ_* на φ_* ($\Phi_* = \varepsilon\varphi_*$).

Заметим, что в общем случае при учете возмущения внешней свободной границы жидкости до удара функция φ_* зависит от ε . Однако, поскольку дальнейшие исследования проводятся в главном асимптотическом приближении, можно считать, что предельный переход уже выполнен и под φ_* следует понимать соответствующее предельное значение. При этом свободная граница до удара является плоской и при больших H потенциал φ_* на ней равен нулю. В случае больших значений H можно использовать приближение неограниченной жидкости ($H = \infty$) и получить явное выражение для этого потенциала в окрестности смоченной поверхности цилиндра ($\varphi_* = t_0 u$).

Основная трудность при решении задачи (2.2)–(2.10) заключается в том, что зависимость положения точек отрыва от параметра ε неизвестна и определяется в процессе решения задачи. Главные характеристики рассматриваемой задачи будем искать в виде следующих асимптотических разложений по малому параметру:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, \tau) &= \varphi_1(x, y, \tau) + \dots, \\ \zeta(\theta, \tau) &= \varepsilon^2 \zeta_1(\theta, \tau) + \dots, \quad \psi(x, \tau) = \varepsilon^2 \psi_1(x, \tau) + \dots, \\ \theta_{s1}(t_0 + \varepsilon\tau) &= \theta_1(\tau) + \dots, \quad \theta_{s2}(t_0 + \varepsilon\tau) = \theta_2(\tau) + \dots, \end{aligned}$$

где $\theta_{s1}(t)$, $\theta_{s2}(t)$ — угловые координаты точек отрыва, многоточием обозначены члены более высокого порядка малости по ε . Для определенности будем полагать, что $\theta_{s1}(t) < \theta_{s2}(t)$, $-\pi < \theta \leq \pi$.

Подставляя данные разложения в уравнение и краевые условия задачи (2.2)–(2.10), осуществляя с помощью формулы Тейлора перенос краевых условий с возмущенных участков границы области на первоначально невозмущенный уровень, а затем приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε , в главном приближении получаем смешанную краевую задачу теории потенциала в области $\Omega(t_0)$. Учитывая, что зона отрыва монотонно уменьшается, проинтегрируем динамическое условие по времени от 0 до τ при фиксированном значении $\theta \in (\theta_1(\tau), \theta_2(\tau))$. Интегрируя также динамическое условие на внешней свободной границе, получаем

$$\Delta\varphi_1 = 0, \quad r \in \Omega(t_0), \quad \varphi_1 = 0, \quad y = H; \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} = 0, \quad (0,5\chi + H - y)\tau - \varphi_1 + \varphi_0 \geq 0, \quad r \in S_1(\tau); \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial n} \geq 0, \quad (0,5\chi + H - y)\tau - \varphi_1 + \varphi_0 = 0, \quad r \in S_2(\tau); \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial\varphi_1}{\partial y} = 0, \quad y = -H_b, \quad \nabla\varphi_1 \rightarrow 0, \quad x \rightarrow \pm\infty, \tag{2.14}$$

где $S_1(\tau)$, $S_2(\tau)$ — зоны контакта и отрыва.

В модели (2.11)–(2.14) используются краевые условия типа неравенств, которые не являются прямым следствием задачи (2.2)–(2.10). По аналогии с [9] можно показать, что неравенства в (2.12), (2.13) (по крайней мере, локально) эквивалентны условию Кутты — Жуковского. Неравенство в (2.12) является следствием динамического условия, согласно которому давление в зоне контакта не может быть меньше давления в каверне (проводится интегрирование по времени от 0 до τ). Неравенство в (2.13) означает, что жидкие частицы не могут проникать внутрь твердого тела. При его выводе полагается, что жидкие частицы, расположенные на внутренней свободной границе (в силу малости ее возмущения), фактически находятся на поверхности цилиндра.

Заметим, что краевые условия в виде неравенств целесообразно использовать для решения задач со свободными границами (типа (2.11)–(2.14)) с помощью прямых численных методов. При построении аналитических решений лучше использовать условие Кутты — Жуковского.

При $t = t_0$ ($\tau = 0$) решение задачи (2.11)–(2.14) совпадает с решением классической модели удара с отрывом, что обеспечивает выполнение начального условия. Следует отметить, что для решения классической задачи об ударе справедлива теорема о существовании и единственности решения [11].

3. Анализ внутренней свободной границы жидкости. Проведем асимптотический анализ возмущения внутренней свободной границы жидкости при малых ε . Интегрируя кинематическое уравнение (2.5) по времени от 0 до τ и ограничиваясь только главным приближением, находим функцию $\zeta_1(\theta, \tau)$, удовлетворяющую начальному условию при $\tau = 0$:

$$\zeta_1(\theta, \tau) = \int_0^\tau \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} d\tau.$$

При таком определении $\zeta_1(\theta, \tau)$ функция $\varepsilon^2 \zeta_1(\theta, \tau)$, соответствующая главному приближению, адекватно описывает возмущение внутренней свободной границы жидкости всюду, за исключением малых окрестностей точек отрыва (однородные условия в точках отрыва не выполняются). Однако данное замечание не является препятствием для определения формы каверны в главном асимптотическом приближении. Результаты анализа близких по тематике работ показывают, что при медленных движениях цилиндра после удара внутренняя свободная граница пересекает поверхность тела практически под прямым углом [9]. В работах, посвященных асимптотическому анализу на малых временах, такая картина наблюдается при малых значениях числа Фруда [6, 7]. Таким образом, если определенную выше функцию $\zeta_1(\theta, \tau)$ достроить с помощью соответствующего отрезка прямой, то форма каверны в целом не изменится. Заметим, что правильное определение этой функции в малой окрестности точки отрыва имеет большое значение при нахождении следующего приближения по ε .

Построим специальные уравнения пограничного слоя, хорошо аппроксимирующие внешнее разложение в широком диапазоне значений угловой координаты θ . Для определенности рассмотрим динамику точки отрыва, имеющей угловую координату $\theta = \theta_2(\tau)$.

Учитывая регулярность решения задачи с односторонними ограничениями, представим левую часть дифференциального уравнения (2.5) с помощью асимптотической формулы

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial r} \sim \beta(\tau) \sqrt{\theta_2(\tau) - \theta}, \quad \theta \rightarrow \theta_2(\tau) - 0,$$

где коэффициент $\beta(\tau)$ находится численно.

В силу краевого условия (2.13) производную функции φ_1 по θ заменим ее значением при $\theta = \theta_2(\tau)$. В результате получаем уравнение, содержащее только одну неизвестную функцию $\zeta(\theta, \tau)$:

$$\beta(\tau) \sqrt{\theta_2(\tau) - \theta} = \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \frac{\partial \varphi_1}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\theta_2(\tau)} + \varepsilon^{-2} \frac{\partial \zeta}{\partial \tau}.$$

Функцию $\zeta(\theta, \tau)$ будем искать в виде

$$\begin{aligned} \zeta(\theta, \tau) &\sim \varepsilon^{7/2} \gamma(\tau) [F(\tilde{\theta}) + \varepsilon^{-3/2} C], \\ \gamma(\tau) &= \frac{\beta(\tau)}{\theta_2'(\tau)}, \quad F(\tilde{\theta}) = \frac{2}{3} \tilde{\theta}^{3/2}, \quad \tilde{\theta} = \frac{\theta_2(\tau) - \theta}{\varepsilon}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где величина C не зависит от времени и параметра ε . Поскольку решение с использованием уравнений пограничного слоя строится в точке отрыва, которая соответствует фиксированному τ , будем искать решение в виде (3.1) с замороженным коэффициентом $\gamma(\tau)$ (в этом случае зависимость от времени задается только погранслошной переменной). Подставляя (3.1) в дифференциальное уравнение, переходя в нем к погранслошной переменной $\tilde{\theta}$ и приравнявая коэффициенты при старших членах (порядка $\sqrt{\varepsilon}$), убеждаемся, что иско-

мая функция удовлетворяет этому уравнению в главном асимптотическом приближении (для данного фиксированного τ). Покажем, что аналогично выполняется условие сращивания для производной $\zeta_\tau(\theta, \tau)$. Внешнее решение вблизи точки отрыва после перехода к внутренней переменной принимает вид

$$\zeta_\tau(\theta, \tau) = \varepsilon^2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial r} = \varepsilon^2 \beta(\tau) \sqrt{\theta_2(\tau) - \theta} + \dots = \varepsilon^{5/2} \beta(\tau) \sqrt{\tilde{\theta}} + \dots$$

Производная функции (3.1) по τ (при $\gamma(\tau) = \text{const}$) совпадает при данном значении τ с главным членом внешнего разложения, что обеспечивает выполнение условия сращивания в главном асимптотическом приближении.

Заметим, что сделанные выводы несправедливы в случае, когда величина C зависит от времени. Определяя величину C из начального условия, получаем следующее пограничное решение:

$$\zeta(\theta, \tau) \sim \varepsilon^{7/2} \gamma(\tau) [F(\tilde{\theta}) - F(\tilde{\theta}_0)], \quad \tilde{\theta} = \frac{\theta_2(\tau) - \theta}{\varepsilon}, \quad \tilde{\theta}_0 = \frac{\theta_2(0) - \theta}{\varepsilon}. \quad (3.2)$$

Условие сращивания для функции $\zeta(\theta, \tau)$ проверяется численно на конкретных примерах. Далее показано, что хорошее согласование с внешним разложением получается на начальном этапе схлопывания каверны, длительность которого приблизительно равна половине времени схлопывания.

Однородное условие в точке отрыва выполняется приближенно, с высокой степенью точности на малых временах ($\tau \rightarrow 0$):

$$\zeta(\theta_2(\tau), \tau) = -\varepsilon^2 \gamma(\tau) [\theta_2(0) - \theta_2(\tau)]^{3/2} = \varepsilon^2 \beta(0) \sqrt{|\theta_2'(0)|} \tau^{3/2} + \dots$$

Формулу (3.2) можно получить другим способом. Будем полагать, что коэффициент $\gamma(\tau)$ не является замороженным. Можно показать, что функция $\zeta(\theta, \tau)$, определяемая формулой (3.1) при $C = 0$, удовлетворяет в главном асимптотическом приближении рассматриваемому дифференциальному уравнению, и в промежуточном пределе выполняется условие сращивания для производной $\zeta_\tau(\theta, \tau)$. Под промежуточным пределом понимается предел ($\varepsilon \rightarrow 0$, значение θ_η фиксировано)

$$\eta(\varepsilon) \rightarrow 0, \quad \frac{\eta(\varepsilon)}{\varepsilon} \rightarrow \infty, \quad \theta_\eta = \frac{\theta_2(\tau) - \theta}{\eta(\varepsilon)}.$$

На основе полученного равенства для производной восстанавливается функция $\zeta(\theta, \tau)$. Изменение с течением времени положения зоны сращивания не позволяет непосредственно провести интегрирование по времени от 0 до τ с учетом начального условия (при фиксированном θ). Однако можно провести локальное интегрирование за достаточно малый промежуток времени в окрестности фиксированного значения τ . При интегрировании возникает произвольная постоянная, значения которой для каждого бесконечно малого временного промежутка различны. В результате получаем функцию времени, которую можно представить в виде произведения временного множителя $\gamma(\tau)$, некоторой величины C_1 и величины $\varepsilon^{7/2}$, что эквивалентно добавлению C_1 к функции $F(\tilde{\theta})$. Полагая, что эта величина не зависит от времени, определим ее однозначно из начального условия. В результате получаем формулу (3.2).

Следует отметить, что вследствие отрицательности $\gamma(\tau)$ функция (3.1) при $C = 0$ не может быть использована в качестве функции пограничного слоя.

Пограничное решение вблизи другой точки отрыва принимает вид (3.2), если $\theta_2'(\tau)$ заменить на $-\theta_1'(\tau)$, $\theta_2(\tau) - \theta$ на $\theta - \theta_1(\tau)$, а под $\beta(\tau)$ понимать коэффициент перед корнем квадратным в асимптотическом разложении нормальной производной функции φ_1 вблизи точки отрыва $\theta = \theta_1(\tau)$.

Справедливость проведенных вычислений подтверждают результаты численных расчетов. Заметим, что эффективность пограничных решений можно гарантировать только

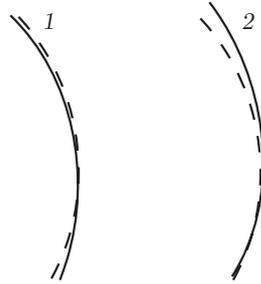


Рис. 2

Рис. 2. Решения уравнений пограничного слоя (сплошные линии) и внешние разложения (штриховые линии) при $\tau = 0,10$, $\varepsilon = 1$ и различных значениях угловой координаты:

$$1 - \theta \approx 0,69, 2 - \theta \approx -0,41$$

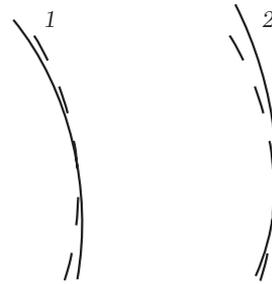


Рис. 3

Рис. 3. Решения уравнений пограничного слоя (сплошные линии) и внешние разложения (штриховые линии) при $\tau = 0,15$, $\varepsilon = 1$ и различных значениях угловой координаты:

$$1 - \theta \approx 0,54, 2 - \theta \approx -0,22$$

при очень малых ε . Несмотря на это, хорошее согласование результатов численных расчетов наблюдается уже при $\varepsilon = 1$, что можно объяснить только особой формой тела (во многих задачах плоской гидродинамики, связанных с конфигурацией тела, рассматривается именно круг). Заметим, что в исходных переменных решения уравнений пограничного слоя имеют такую же структуру, как и внешнее разложение (ε^2 умножается на функцию, не зависящую от ε). Следовательно, при $\varepsilon < 1$ погрешность автоматически уменьшается, а при $\varepsilon > 1$ увеличивается, вследствие чего асимптотические формулы (3.2) становятся неприменимыми. На рис. 2 показано, что погранслойные решения согласуются с внешним разложением при $\varepsilon = 1$, $\chi = 0$, $H = 5$, $H_b = 2$, $t_0 = 1$, $\tau = 0,1$ ($\beta(\tau) \approx 0,974$, $\theta'_2(\tau) \approx -3$). Рис. 3 соответствует случаю $\tau = 0,15$ (остальные параметры те же). Оба погранслойных решения хорошо аппроксимируют внешнее разложение практически во всей зоне отрыва. Заметим также, что при $\tau = 0,1$ ($\varepsilon = 1$) погранслойные решения очень близко подходят к границе тела в точках отрыва (ближе, чем внешнее решение).

Далее рассмотрим примеры, характеризующие динамику точек отрыва. Для численного решения задачи с односторонними ограничениями (2.11)–(2.14) используется алгоритм, описанный в работах [6–9]. Расчеты проводятся для прямоугольной области, в которой боковые стенки (на них ставится условие непротекания) и верхняя граница ($y = H$) находятся на больших расстояниях от круга (в пять раз больше его радиуса). В таблице приведены приближенные значения угловых координат точек отрыва, полученные путем решения задачи (2.11)–(2.14) ($\chi = 0$, $H = 5$, $H_b = 2$, $t_0 = 1$). При $\tau \approx 0,21$ зона отрыва практически не видна (происходит схлопывание тонкой каверны). В силу равенства $t - t_0 = \varepsilon\tau$ это решение соответствует случаю $\varepsilon = 1$. Для других значений ε результаты могут быть получены из таблицы с помощью элементарного пересчета. Например,

Приближенные значения угловых координат точек отрыва $\theta_i = \theta_i(\tau)$, $i = 1, 2$
в различные моменты времени

τ	θ_1	θ_2	τ	θ_1	θ_2
0	-0,71	0,92	0,150	-0,22	0,54
0,050	-0,57	0,81	0,200	0,05	0,32
0,100	-0,41	0,69	0,205	0,10	0,27

для $\varepsilon = 0,5$ и $t - t_0 = 0,05; 0,10$ получаем следующие приближенные значения угловых координат точек отрыва: $-0,41; 0,69; 0,05; 0,32$. На рис. 1 показаны две каверны, соответствующие моментам времени $\tau = 0,1; 0,2$. Для наглядности расчеты выполнены при $\varepsilon = 1$ (при этом нетрудно представить картину течения жидкости при $\varepsilon < 1$). Видно, что при $\tau \approx 0,19$ зона отрыва смещается в область $y > 0$. Процесс схлопывания тонкой каверны сопровождается увеличением возмущения внутренней свободной границы жидкости (точки отрыва сближаются, а возмущение свободной границы незначительно увеличивается).

Заключение. В работе приводится полное решение задачи об образовании и схлопывании присоединенной каверны после мгновенной остановки кругового цилиндра в возмущенной жидкости. Для решения задачи применяется асимптотический анализ по малому параметру, равному безразмерному ускорению цилиндра до удара. В главном асимптотическом приближении формулируется задача с односторонними ограничениями, на основе которой изучается динамика точек отрыва и определяется время схлопывания тонкой каверны. Проводится асимптотический анализ положения границы каверны с учетом решений уравнений пограничного слоя в точках отрыва. Рассматриваются конкретные случаи, характеризующие динамику точек отрыва.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Седов Л. И.** Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.: Наука, 1966.
2. **Hilmervik K. B., Tyvand P. A.** Incompressible impulsive wall impact of liquid cylinders // J. Engng Math. 2017. V. 103, N 1. P. 159–171. DOI: 10.1007/s10665-016-9866-6.
3. **Hilmervik K. B., Tyvand P. A.** Impact of narrow plates on broader liquid bodies // Appl. Ocean Res. 2019. V. 87. P. 247–255. DOI: 10.1016/j.apor.2019.04.002.
4. **Savchenko Y., Savchenko G., Semenov Y. A.** Impulsive motion inside a cylindrical cavity // Mathematics. 2020. V. 8, N 2. 192. DOI: 10.3390/math8020192.
5. **Поляков Н. В., Гоман О. Г., Катан В. А.** К вопросу об ударном взаимодействии тела и жидкости со свободной поверхностью при наличии отрыва // Докл. НАН Украины. 2016. № 8. С. 46–52. DOI: 10.15407/dopovidi2016.08.046.
6. **Norkin M., Korobkin A.** The motion of the free-surface separation point during the initial stage of horizontal impulsive displacement of a floating circular cylinder // J. Engng Math. 2011. V. 70. P. 239–254. DOI: 10.1007/s10665-010-9416-6.
7. **Норкин М. В.** Образование каверны при наклонном отрывном ударе кругового цилиндра под свободной поверхностью тяжелой жидкости // Сиб. журн. индустр. математики. 2016. Т. 19, № 4. С. 81–92. DOI: 10.17377/SIBJIM.2016.19.409.
8. **Норкин М. В.** Динамика точек отрыва при ударе плавающего кругового цилиндра // ПМТФ. 2019. Т. 60, № 5. С. 19–27. DOI: 10.15372/PMTF20190503.
9. **Норкин М. В.** Асимптотика медленных движений прямоугольного цилиндра в жидкости после отрывного удара // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2020. Т. 162, кн. 4. С. 426–440. DOI: 10.26907/2541-7746.2020.4.426-440.
10. **Reinhard M., Korobkin A. A., Cooker M. J.** Cavity formation on the surface of a body entering water with deceleration // J. Engng Math. 2016. V. 96, N 1. P. 155–174. DOI: 10.1007/s10665-015-9788-8.
11. **Юдович В. И.** Однозначная разрешимость задачи об ударе с отрывом твердого тела о неоднородную жидкость // Владикавк. мат. журн. 2005. Т. 7, № 3. С. 79–91.

*Поступила в редакцию 5/VII 2021 г.,
после доработки — 18/X 2021 г.
Принята к публикации 29/XI 2021 г.*