

AMS subject classification: 65H05, 65B99

Семейство итерационных методов пятого порядка для поиска кратных корней нелинейных уравнений

Дж.Р. Шарма¹, Х. Арора²

¹Department of Mathematics, Sant Longowal Institute of Engineering and Technology, Longowal-148106, Punjab, India

²Department of Mathematics, D.A.V. University, Sarmastpur-144012, Jalandhar, India

E-mails: jrshira@yahoo.co.in (Шарма Дж.Р.), arorahimani362@gmail.com (Арора Х.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 2, Vol. 14, 2021.

Шарма Дж.Р., Арора Х. Семейство итерационных методов пятого порядка для поиска кратных корней нелинейных уравнений // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2021. — Т. 24, № 2. — С. 213–227.

Мы представляем семейство итерационных методов пятого порядка для нахождения кратных корней нелинейных уравнений. Рассмотрены численные примеры для проверки верности теоретических результатов. Результаты показывают, что новые методы успешно конкурируют с другими методами для нахождения кратных корней. Указаны области притяжения новых методов и некоторых существующих методов для наблюдения динамики в комплексной плоскости.

DOI: 10.15372/SJNM20210207

Ключевые слова: нелинейные уравнения, итерационные методы, быстрые алгоритмы, кратные корни, области притяжения.

Sharma J.R., Arora H. A family of fifth-order iterative methods for finding multiple roots of nonlinear equations // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2021. — Vol. 24, № 2. — P. 213–227.

We present a family of fifth order iterative methods for finding multiple roots of nonlinear equations. Numerical examples are considered to check the validity of theoretical results. The results show that the new methods are competitive to other methods for multiple roots. Basins of attraction for new methods and some existing methods are drawn to observe the dynamics in the complex plane.

Keywords: nonlinear equations, iterative methods, fast algorithms, multiple roots, attraction basins.

1. Введение

В данной работе мы рассматриваем задачу нахождения кратного корня α кратности m , т.е. $f^{(j)}(\alpha) = 0$, $j = 0, 1, 2, \dots, m - 1$, и $f^{(m)}(\alpha) \neq 0$, нелинейного уравнения $f(x) = 0$, где $f(x)$ — гладкая действительная или комплексная функция одной действительной или комплексной переменной x . Основным важным методом поиска кратных корней является модифицированный метод Ньютона [1], определяемый как

$$x_{n+1} = x_n - m \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1)$$

который сходится квадратично и требует знания кратности m корня α .

Для улучшения локального порядка сходимости схемы (1) было предложено и проанализировано несколько методов более высокого порядка с известной кратностью m . Большинство из них имеет сходимость третьего порядка и их можно разделить на два класса (см. [2]). Один такой класс так называемых однократных методов требует оценки f , f' и f'' на каждом шаге — это, например, методы Биазара, Ганбари [3], Чуна, Неты [4], Чуна с соавторами [5], Хансена, Патрика [6], Неты [7], Осады [8], Шармы, Бала [9] и Шармы, Шармы [10]. Второй класс — это класс многоточечных методов, который в дальнейшем можно разделить на два подкласса. Один подкласс использует две оценки f и одну оценку f' — например, методы, разработанные Чуном с соавторами [5], Шармой, Шармой [10], Донгом [11], Хомейром [12], Кумаром с соавторами [13], Ли с соавторами [14], Нетой [15], Виктори, Нетой [16] и Чжоу с соавторами [17]. Другой подкласс использует одну f и две f' , например методы Кумарас соавторами [13], Ли с соавторами [14] и Донга [18].

В “многоточечном” классе также представлены некоторые методы четвертого порядка. Например, Ли с соавторами [19] разработали шесть методов четвертого порядка: четыре из них с одной оценкой f и тремя оценками f' , два с одной оценкой f и двумя оценками f' . Ли с соавторами [20], Нета [21], Нета и Джонсон [22] представили методы четвертого порядка, которые требуют одной оценки f и трех оценок f' .

В данной статье мы предлагаем семейство многоточечных итерационных методов пятого порядка для нахождения кратных корней нелинейных уравнений. В пункте 2 разработана эта схема и исследованы ее свойства сходимости. Некоторые частные случаи этого семейства представлены в п. 3. Для проверки теоретических результатов в п. 4 рассмотрены некоторые численные примеры. В этом пункте также дано сравнение новых методов с уже существующими методами. В п. 5 представлены области притяжения для новых методов и некоторых существующих методов. Заключительные замечания приведены в п. 6.

2. Разработка схемы

Наша цель — разработать итерационный метод, повышающий порядок сходимости базового метода Ньютона. Поэтому рассмотрим двойную схему Ньютона для кратных корней:

$$\begin{aligned} z_k &= x_k - m \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= z_k - m \frac{f(z_k)}{f'(z_k)}. \end{aligned} \quad (2)$$

То есть это модифицированный метод Ньютона, два шага которого сгруппированы вместе и рассматриваются как один шаг. Следовательно, двойная схема Ньютона имеет четвертый порядок сходимости.

Ясно, что схема (2) требует двух оценок функции и двух оценок производных на итерацию и, следовательно, индекс эффективности (см. [23]) схемы равен индексу основного метода Ньютона (1). Это означает, что с увеличением порядка сходимости не происходит увеличения эффективности схемы. Итак, чтобы повысить эффективность схемы за счет увеличения ее порядка, модифицируем схему (2) следующим образом:

$$\begin{aligned} z_k &= x_k - m \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= z_k - mH(u) \frac{f(z_k)}{f'(z_k)}, \end{aligned} \quad (3)$$

где $u = \sqrt[m]{\frac{f(z_k)}{f(x_k)}}$ и $H(\cdot) \in C^2(\mathbb{R})$.

С помощью следующей теоремы мы анализируем поведение схемы (3).

Теорема. Пусть $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ – аналитическая функция в области, содержащей кратный ноль α кратности m . Предположим, что первоначальное предположение x_0 достаточно близко к α , тогда для $H(0) = 1$, $H'(0) = 0$, $H''(0) = 2$ и $|H'''(0)| < \infty$ порядок сходимости метода, определяемого (3), по крайней мере пятый.

Доказательство. Пусть $e_k = x_k - \alpha$. Разложив $f(x_k)$ и $f'(x_k)$ в α в ряд Тейлора, мы имеем

$$f(x_k) = \frac{f^{(m)}(\alpha)}{m!} e_k^m \left(1 + C_1 e_k + C_2 e_k^2 + C_3 e_k^3 + C_4 e_k^4 + C_5 e_k^5 + O(e_k^6) \right) \quad (4)$$

и

$$f'(x_k) = \frac{f^{(m)}(\alpha)}{(m-1)!} e_k^{m-1} \left(1 + D_1 e_k + D_2 e_k^2 + D_3 e_k^3 + D_4 e_k^4 + O(e_k^5) \right), \quad (5)$$

где $C_j = \frac{m!}{(m+j)!} \frac{f^{(m+j)}(\alpha)}{f^{(m)}(\alpha)}$, $D_j = \frac{(m-1)!}{(m+j-1)!} \frac{f^{(m+j)}(\alpha)}{f^{(m)}(\alpha)}$ и $j = 1, 2, 3, \dots$.

Используя (4) и (5), можем записать

$$\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = \frac{1}{m} e_k - \frac{C_1}{m^2} e_k^2 + \frac{(m+1)C_1^2 - 2mC_2}{m^3} e_k^3 + \frac{m(3m+4)C_1C_2 - 3m^2C_3 - (m+1)^2C_1^3}{m^4} e_k^4 + O(e_k^5). \quad (6)$$

Пусть $e_{z_k} = z_k - \alpha$. Заменяя (6) на первом шаге уравнения (3), получим

$$e_{z_k} = \frac{C_1}{m} e_k^2 + \frac{2mC_2 - (m+1)C_1^2}{m^2} e_k^3 + \frac{(m+1)^2C_1^3 - m(3m+4)C_1C_2 + 3m^2C_3}{m^3} e_k^4 + O(e_k^5). \quad (7)$$

Ряд Тейлора $f(z_k)$ в точке α дает

$$f(z_k) = \frac{f^{(m)}(\alpha)}{m!} e_{z_k}^m \left(1 + C_1 e_{z_k} + C_2 e_{z_k}^2 + O(e_{z_k}^3) \right). \quad (8)$$

Кроме того,

$$f'(z_k) = \frac{f^{(m)}(\alpha)}{(m-1)!} e_{z_k}^{m-1} \left(1 + D_1 e_{z_k} + D_2 e_{z_k}^2 + O(e_{z_k}^3) \right). \quad (9)$$

С помощью (4) и (8) получим

$$\frac{f(z_k)}{f(x_k)} = \left(\frac{C_1}{m} \right)^m e_k^m \left(1 + \frac{K_1}{C_1} e_k + \frac{K_2}{2mC_1^2} e_k^2 - \frac{K_3}{6m^2C_1^3} e_k^3 \right) + O(e_k^4), \quad (10)$$

где

$$\begin{aligned} K_1 &= 2mC_2 - (m+2)C_1^2, \\ K_2 &= (m+1)^2(m+3)C_1^4 - 2m(2m+3)(m+1)C_1^2C_2 + 4(m-1)m^2C_2^2 + 6m^2C_1C_3, \\ K_3 &= (m+1)^3(m+2)(m+4)C_1^6 - 6m(m^4 + 6m^3 + 13m^2 + 13m + 4)C_1^4C_2 - \\ &\quad 8m^3(m-1)(m-2)C_2^3 + 6m^2(3m^2 + 7m + 4)C_1^3C_3 - \\ &\quad 36(m-1)m^3C_1C_2C_3 + 12m^3C_1^2((m+1)^2C_2^2 - 2C_4). \end{aligned}$$

Заметим, что

$$(1+x)^{\frac{1}{m}} = 1 + \frac{1}{m}x - \frac{m-1}{2m^2}x^2 + \frac{(m-1)(2m-1)}{6m^3}x^3 + O(x^4).$$

Поэтому из (10) получим

$$\sqrt[m]{\frac{f(z_k)}{f(x_k)}} = \frac{C_1}{m}e_k + \frac{K_1}{m^2}e_k^2 + \frac{K_2 - (m-1)K_1^2}{2m^3C_1}e_k^3 + \frac{(2m^2 - 3m + 1)K_1^3 - 3(m-1)K_1K_2 - K_3}{6m^4C_1^2}e_k^4 + O(e_k^5). \quad (11)$$

Разложение Тейлора $H(u)$ в нуле после использования (11) можно записать следующим образом:

$$H(u) = H(0) + \frac{C_1H'(0)}{m}e_k + \frac{2K_1H'(0) + C_1^2H''(0)}{2m^2}e_k^2 + \frac{3K_2H'(0) - 3(m-1)K_1^2H'(0) + 6C_1^2K_1H''(0) + C_1^4H'''(0)}{6m^3C_1}e_k^3 + O(e_k^4). \quad (12)$$

Подставив (8), (9) и (12) во второй шаг (3), мы получим

$$e_{k+1} = L_0e_k^2 + L_1e_k^3 + L_2e_k^4 + L_3e_k^5 + O(e_k^6), \quad (13)$$

где

$$\begin{aligned} L_0 &= \frac{C_1(1-H(0))}{m}, \\ L_1 &= \frac{((m+1)C_1^2 - 2mC_2)(H(0) - 1) - C_1^2H'(0)}{m^2}, \\ L_2 &= \frac{1}{2m^3} \left(6m^2C_3(1-H(0)) + 2mC_1C_2((3m+4)(H(0) - 1) - 4H'(0)) + \right. \\ &\quad \left. C_1^3(2(m+1)^2 - 2m(m+2)H(0) + (4m+6)H'(0) - H''(0)) \right), \\ L_3 &= \frac{1}{6m^4} \left(12m^2C_1C_3((2m+3)(H(0) - 1) - 3H'(0)) + \right. \\ &\quad 12m^2 \left(((m+2)C_2^2 - 2mC_4)(H(0) - 1) - 2C_2^2H'(0) \right) + \\ &\quad 6mC_1^2C_2(2(m+1)(2m+3) - 2(m(2m+5) + 1)H(0) + \\ &\quad (10m+17)H'(0) - 3H''(0)) - \\ &\quad \left. C_1^4(3(m+1)(2(m+1)^2 - 2(m(m+2) + 1)H(0) + (6m+11)H'(0)) - \right. \\ &\quad \left. 3(3m+5)H''(0) + H'''(0)) \right). \end{aligned}$$

Таким образом, для получения итерационного метода пятого порядка коэффициенты e_k^2 , e_k^3 и e_k^4 в уравнении ошибки (13) должны быть равны нулю. Итак, у нас есть следующие уравнения:

$$\begin{cases} 1 - H(0) = 0, \\ H'(0) = 0, \\ 2(m+1)^2 - 2m(m+2)H(0) + (4m+6)H'(0) - H''(0) = 0, \end{cases}$$

которые дают после решения

$$H(0) = 1, \quad H'(0) = 0, \quad H''(0) = 2. \quad (14)$$

Подставив эти значения в (13), мы получим окончательное уравнение ошибки

$$e_{k+1} = -\frac{12mC_1^2C_2 - C_1^4(6(m+3) - H'''(0))}{6m^4} e_k^5 + O(e_k^6).$$

Это доказывает пятый порядок сходимости. Следовательно, теорема доказана. \square

3. Некоторые частные случаи

При условиях (14) возможны многие частные случаи семейства (3). Приведем некоторые простые частные случаи.

Случай 1. Предположим, что $H(x) = A+Bx+Cx^2$. Тогда $H'(x) = B+2Cx$ и $H''(x) = 2C$. Используя (14), получим

$$A = 1, \quad B = 0, \quad C = 1.$$

Таким образом, мы имеем следующий новый метод пятого порядка:

$$\begin{aligned} z_k &= x_k - m \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= z_k - m \left(1 + \left(\frac{f(z_k)}{f(x_k)} \right)^{\frac{2}{m}} \right) \frac{f(z_k)}{f'(z_k)}. \end{aligned}$$

Обозначим этот метод $NMM_{5,1}$.

Случай 2. Предположим, что

$$H(x) = \frac{A + Bx + Cx^2}{D + Ex + Fx^2}.$$

Тогда

$$H'(x) = \frac{(BD - AE) - 2(AF - CD)x + (CE - BF)x^2}{(D + Ex + Fx^2)^2}$$

и

$$H''(x) = \frac{2(CD^2 + AE^2 - D(BE + AF) + 3F(AE - BD)x + 3F(AF - CD)x^2 + F(BF - CE)x^3)}{(D + Ex + Fx^2)^3}.$$

Используя условия (14), получим

$$A = D, \quad B = E, \quad F - C + D = 0. \quad (15)$$

Подслучай 1. Взяв $A = 1, B = 1, C = 1$ и решив (15), получим $D = 1, E = 1, F = 0$.

При этих значениях схема (3) генерирует следующий метод пятого порядка:

$$z_k = x_k - m \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

$$x_{k+1} = z_k - m \left(\frac{1 + \left(\frac{f(z_k)}{f(x_k)}\right)^{\frac{1}{m}} + \left(\frac{f(z_k)}{f(x_k)}\right)^{\frac{2}{m}}}{1 + \left(\frac{f(z_k)}{f(x_k)}\right)^{\frac{1}{m}}} \right) \frac{f(z_k)}{f'(z_k)}.$$

Назовем этот метод $\text{NMM}_{5,2}$.

Подслучай 2. Взяв $A = 1$, $B = 0$, $C = -1$ и решив (15), получим $D = 1$, $E = 0$, $F = -2$. После подставления этих значений соответствующий метод пятого порядка задается следующим образом:

$$z_k = x_k - m \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

$$x_{k+1} = z_k - m \left(\frac{\left(\frac{f(x_k)}{f(z_k)}\right)^{\frac{2}{m}} - \left(\frac{f(z_k)}{f(x_k)}\right)^{\frac{2}{m}}}{\left(\frac{f(x_k)}{f(z_k)}\right)^{\frac{2}{m}} - 2\left(\frac{f(z_k)}{f(x_k)}\right)^{\frac{2}{m}}} \right) \frac{f(z_k)}{f'(z_k)}.$$

Обозначим этот метод $\text{NMM}_{5,3}$.

Замечание. Вычислительная эффективность итерационного метода измеряется индексом эффективности $EI = p^{1/C}$ (см. [23]), где p — порядок сходимости, C — вычислительные затраты, измеряемые как количество новых элементов информации, требуемых для метода на итерационный шаг. “Элемент информации” обычно представляет собой любую оценку функции f или одной из ее производных. Представленные методы пятого порядка требуют четырех оценок функций на итерацию, поэтому индекс эффективности этих методов пятого порядка $EI = \sqrt[4]{5} \approx 1.495$ и, следовательно, он имеет лучший индекс эффективности, чем модифицированный метод Ньютона ($EI = \sqrt{2} \approx 1.414$), существующие методы третьего порядка ($EI = \sqrt[3]{3} \approx 1.442$) и методы четвертого порядка ($EI = \sqrt[4]{4} \approx 1.414$), представленные в [19, 22].

4. Численные результаты

Используем представленные методы $\text{NMM}_{5,1}$, $\text{NMM}_{5,2}$ и $\text{NMM}_{5,3}$ для решения некоторых нелинейных уравнений и сравнения их эффективности с некоторыми существующими методами. Например, рассмотрим методы третьего порядка Донга [11], Неты [15] и Чжоу, Чена, Сона [17]; методы четвертого порядка Ли, Ченга, Неты [19] и Ли, Ляо, Ченга [20]. Эти методы можно выразить следующим образом:

метод Донга (DM₃):

$$y_k = x_k - \sqrt{m} \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

$$x_{k+1} = y_k + \left(1 - \frac{\sqrt{m}}{m}\right)^{-m} (\sqrt{m} - m) \frac{f(y_k)}{f'(x_k)};$$

метод Нетты (NM₃):

$$y_k = x_k - \frac{1}{2} \frac{m(m+3)}{m+1} \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

$$x_{k+1} = x_k - \left(\frac{m^3 + 4m^2 + 9m + 2}{(m+3)^2} + \frac{2^{m+1}(m+1)^m(m^2-1)}{(m+3)^2(m-1)^m} \frac{f(y_k)}{f(x_k)} \right) \frac{f(x_k)}{f'(x_k)};$$

метод Чжоу-Чена-Сона (ZCSM₃):

$$y_k = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

$$x_{k+1} = x_k + m(m-2) \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} - m(m-1) \left(\frac{m}{m-1} \right)^m \frac{f(y_k)}{f'(x_k)};$$

метод Ли-Ченга-Нетты (LCNM₄):

$$y_k = x_k - \frac{2m}{m+2} \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

$$\eta_k = x_k - \frac{2m}{m+2} \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} + 2 \left(\frac{m}{m+2} \right)^2 \frac{f(x_k)}{f'(y_k)},$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{a_1 f'(x_k) + a_2 f'(y_k) + a_3 f'(\eta_k)},$$

где

$$a_1 = -\frac{1}{16} \frac{3m^4 + 16m^3 + 40m^2 - 176}{m(m+8)},$$

$$a_2 = \frac{1}{8} \frac{m^4 + 3m^3 + 10m^2 - 4m + 8}{\left(\frac{m}{m+2} \right)^m m(m+8)},$$

$$a_3 = \frac{1}{16} \frac{m^5 + 6m^4 + 8m^3 - 16m^2 - 48m - 32}{m^2(m+8)};$$

метод Ли-Ляо-Ченга (LLCM₄):

$$y_k = x_k - \frac{2m}{m+2} \frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{m((m-2)f'(y_k) - m\left(\frac{m}{m+2}\right)^m f'(x_k))f(x_k)}{2f'(x_k)\left(\left(\frac{m}{m+2}\right)^m f'(x_k) - f'(y_k)\right)}.$$

Тестовые функции, используемые для сравнения, кратность m и корень α , с точностью до 16 десятичных знаков, представлены в таблице 1. Все вычисления производятся с использованием арифметики высокой точности *Mathematica* [24]. Технические характеристики компьютера: Intel (R) Core (TM) i5-2430M CPU @ 2.40 GHz (32-bit) Microsoft Windows 7 Ultimate 2009. Для проверки теоретического порядка сходимости получим вычислительный порядок сходимости (p_c) по формуле (см. [25])

$$p_c = \frac{\log|f(x_k)/f(x_{k-1})|}{\log|f(x_{k-1})/f(x_{k-2})|} \quad (16)$$

с учетом последних трех приближений итерационного процесса.

Таблица 1. Тестовые функции

Задача	m	α
$f_1(x) = \left(\sin x - \frac{x}{2}\right)^2$ [5]	2	1.8954942670339809...
$f_2(x) = x^6 - 6x^5 + 50x^3 - 45x^2 - 108x + 108$ [6]	3	3.0000000000000000...
$f_3(x) = (xe^{x^2} - \sin^2 x + 3 \cos x + 5)^4$ [14]	4	-1.2076478271309189...
$f_4(x) = \ln^2(x-2)(e^{x-3} - 1) \sin \frac{\pi x}{3}$ [9]	4	3.0000000000000000...

Для каждого метода запишем количество итераций (k), необходимое для сходимости к решению так, чтобы критерий остановки

$$|x_{k-1} - x_k| + |f(x_k)| < 10^{-200}$$

удовлетворялся. Численные результаты представлены в таблицах 2–5; они включают: ошибку аппроксимации $|x_{k+1} - x_k|$ для первых трех итераций (где $A(-h)$ обозначает $A \times 10^{-h}$), требуемое число итераций (k), значение $|f(x_k)|$ и вычислительный порядок сходимости (p_c), определенный по формуле (16). Численные результаты показывают, что вычислительный порядок сходимости соответствует теоретическому порядку сходимости. Представленные методы пятого порядка обладают более высокой точностью, чем существующие методы третьего и четвертого порядков, поскольку они имеют более высокий порядок сходимости. В заключение статьи мы отметим, что во многих численных приложениях требуется высокая точность вычислений. Результаты численных экспериментов показывают, что эти эффективные методы высокого порядка, связанные с арифметикой с плавающей точкой с многократно увеличенной точностью, очень полезны, поскольку они дают явное сокращение количества итераций.

Таблица 2. Сравнение методов для задачи $f_1(x)$

Методы	$ x_2 - x_1 $	$ x_3 - x_2 $	$ x_4 - x_3 $	k	$ f(x_k) $	p_c
$x_0 = 1.75$						
DM ₃	1.55(-3)	1.52(-9)	1.40(-27)	6	2.94(-1461)	3.000
NM ₃	1.10(-3)	2.13(-11)	1.66(-34)	6	4.84(-1871)	3.000
ZCSM ₃	2.90(-3)	1.51(-8)	2.14(-24)	6	1.74(-1284)	3.000
LCNM ₄	3.41(-4)	5.98(-15)	5.65(-58)	5	2.17(-1836)	4.000
LLCM ₄	3.41(-4)	5.98(-15)	5.65(-58)	5	2.17(-1836)	4.000
NMM _{5,1}	6.90(-5)	7.71(-22)	1.34(-106)	5	2.85(-5298)	5.000
NMM _{5,2}	4.84(-5)	1.01(-22)	3.94(-111)	5	3.43(-5526)	5.000
NMM _{5,3}	7.45(-5)	1.13(-21)	8.94(-106)	5	4.91(-5257)	5.000
$x_0 = 2$						
DM ₃	3.79(-4)	2.19(-11)	4.23(-33)	6	2.29(-1759)	3.000
NM ₃	6.87(-5)	5.50(-15)	2.84(-45)	6	2.25(-2452)	3.000
ZCSM ₃	5.41(-4)	9.76(-11)	5.74(-31)	6	2.49(-1639)	3.000
LCNM ₄	3.74(-5)	8.64(-19)	2.46(-73)	5	5.71(-2328)	4.000
LLCM ₄	3.74(-5)	8.64(-19)	2.46(-73)	5	5.71(-2328)	4.000
NMM _{5,1}	3.76(-6)	3.69(-28)	3.38(-138)	5	3.61(-6878)	5.000
NMM _{5,2}	4.41(-6)	1.00(-27)	6.11(-136)	5	3.26(-6764)	5.000
NMM _{5,3}	3.69(-6)	3.37(-28)	2.14(-138)	5	4.48(-6888)	5.000

Таблица 3. Сравнение методов для задачи $f_2(x)$

Методы	$ x_2 - x_1 $	$ x_3 - x_2 $	$ x_4 - x_3 $	k	$ f(x_k) $	p_c
$x_0 = 2.5$						
DM ₃	7.07(-2)	4.32(-5)	9.16(-15)	7	8.59(-3524)	3.000
NM ₃	1.62(-1)	1.20(-5)	3.47(-17)	7	1.33(-4202)	3.000
ZCSM ₃	3.23(-1)	1.11(-2)	2.40(-7)	8	8.04(-5103)	3.000
LCNM ₄	2.34(-1)	1.49(-4)	3.66(-17)	6	1.16(-3225)	4.000
LLCM ₄	2.47(-1)	1.83(-4)	8.62(-17)	6	1.96(-3153)	4.000
NMM _{5,1}	1.60(-1)	2.80(-6)	2.87(-24)	6	1.67(-5750)	5.000
NMM _{5,2}	1.06(-1)	5.23(-6)	3.51(-23)	6	3.19(-4394)	5.000
NMM _{5,3}	1.14(-1)	4.95(-7)	2.82(-27)	6	2.52(-6461)	5.000
$x_0 = 4$						
DM ₃	4.65(-2)	1.09(-5)	1.45(-16)	7	5.24(-3961)	3.000
NM ₃	1.10(-3)	2.13(-11)	1.66(-34)	6	4.84(-1871)	3.000
ZCSM ₃	5.84(-2)	3.16(-5)	5.40(-15)	7	8.37(-3558)	3.000
LCNM ₄	1.69(-2)	5.93(-9)	9.28(-35)	6	4.86(-6604)	4.000
LLCM ₄	1.68(-2)	5.94(-9)	9.66(-35)	6	6.07(-6600)	4.000
NMM _{5,1}	5.05(-3)	1.11(-13)	5.68(-67)	5	7.27(-4994)	5.000
NMM _{5,2}	5.54(-3)	2.17(-13)	2.04(-65)	5	1.73(-4875)	5.000
NMM _{5,3}	4.87(-3)	9.27(-14)	2.35(-67)	5	1.25(-5022)	5.000

Таблица 4. Сравнение методов для задачи $f_3(x)$

Методы	$ x_2 - x_1 $	$ x_3 - x_2 $	$ x_4 - x_3 $	k	$ f(x_k) $	p_c
$x_0 = -1.8$						
DM ₃	2.21(-1)	2.66(-2)	3.49(-5)	8	5.41(-4202)	3.000
NM ₃	1.65(-1)	1.40(-3)	4.45(-9)	7	3.79(-2668)	3.000
ZCSM ₃	2.27(-1)	3.93(-2)	1.63(-4)	8	3.20(-3467)	3.000
LCNM ₄	2.07(-1)	7.52(-3)	1.17(-8)	7	1.08(-7927)	4.000
LLCM ₄	1.65(-1)	2.04(-3)	5.13(-11)	7	4.15(-10372)	4.000
NMM _{5,1}	1.45(-1)	5.14(-6)	4.05(-16)	6	6.87(-7561)	5.000
NMM _{5,2}	1.52(-1)	7.76(-4)	4.62(-15)	6	1.89(-7012)	5.000
NMM _{5,3}	1.37(-1)	3.49(-4)	5.85(-17)	6	3.40(-7981)	5.000
$x_0 = -1$						
DM ₃	1.26(-2)	3.63(-6)	8.80(-17)	7	7.59(-5156)	3.000
NM ₃	2.62(-2)	2.49(-5)	2.51(-14)	7	6.51(-4369)	3.000
ZCSM ₃	2.71(-2)	5.59(-5)	4.76(-13)	7	3.45(-3918)	3.000
LCNM ₄	6.45(-3)	6.31(-9)	5.80(-33)	6	6.91(-8201)	4.000
LLCM ₄	6.42(-3)	5.00(-9)	1.85(-33)	6	2.30(-8335)	4.000
NMM _{5,1}	7.39(-3)	2.54(-10)	1.20(-47)	5	2.45(-4662)	5.000
NMM _{5,2}	2.79(-3)	1.06(-12)	8.20(-60)	5	4.80(-5885)	5.000
NMM _{5,3}	1.96(-2)	3.52(-8)	6.10(-37)	6	5.03(-17972)	5.000

Таблица 5. Сравнение методов для задачи $f_4(x)$

Методы	$ x_2 - x_1 $	$ x_3 - x_2 $	$ x_4 - x_3 $	k	$ f(x_k) $	p_c
$x_0 = 2.25$						
DM ₃	1.14(-2)	2.74(-8)	3.87(-25)	6	6.70(-2727)	3.000
NM ₃	1.03(-1)	2.67(-5)	5.69(-16)	7	1.38(-5183)	3.000
ZCSM ₃	1.14(-2)	4.09(-8)	1.93(-24)	6	1.69(-2642)	3.000
LCNM ₄	4.35(-2)	5.71(-8)	1.62(-31)	6	1.33(-8035)	4.000
LLCM ₄	2.43(-2)	4.12(-9)	3.45(-36)	6	1.86(-9240)	4.000
NMM _{5,1}	6.67(-3)	1.84(-14)	2.99(-72)	5	1.56(-7221)	5.000
NMM _{5,2}	3.46(-3)	8.18(-16)	4.31(-79)	5	1.37(-7904)	5.000
NMM _{5,3}	9.15(-3)	8.84(-14)	7.67(-69)	5	1.50(-6880)	5.000
$x_0 = 4$						
DM ₃	1.36(-2)	4.64(-8)	1.88(-24)	7	6.27(-2653)	3.000
NM ₃	8.51(-3)	1.89(-8)	2.01(-25)	6	5.06(-2747)	3.000
ZCSM ₃	2.86(-2)	6.16(-7)	6.58(-21)	7	2.15(-6787)	3.000
LCNM ₄	1.47(-2)	7.21(-10)	4.14(-39)	6	2.45(-9979)	4.000
LLCM ₄	1.58(-2)	7.41(-10)	3.61(-39)	6	1.11(-10003)	4.000
NMM _{5,1}	1.46(-4)	9.46(-23)	1.08(-113)	5	7.23(-11366)	5.000
NMM _{5,2}	2.80(-4)	2.02(-21)	5.54(-107)	5	4.72(-10696)	5.000
NMM _{5,3}	1.11(-4)	2.43(-23)	1.19(-116)	5	2.21(-11661)	5.000

5. Динамика методов

Изучение динамического поведения рациональной функции, связанной с итерационным методом, дает важную информацию о сходимости и устойчивости этого метода (см., например, [26, 27]). Для начала напомним некоторые основные динамические концепции рациональной функции. Пусть $\phi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — рациональная функция; орбита точки $x_0 \in \mathbb{R}$ определяется как множество

$$\{x_0, \phi(x_0), \dots, \phi^m(x_0), \dots\}$$

последовательных изображений x_0 этой рациональной функции.

Динамическое поведение орбиты точки в \mathbb{R} можно классифицировать в зависимости от его асимптотического поведения. Таким образом, $x_0 \in \mathbb{R}$ — неподвижная точка $\phi(\alpha)$, если она удовлетворяет $\phi(\alpha) = \alpha$. Кроме того, x_0 называется периодической точкой периода $p > 1$, если это точка такая, что $\phi^p(x_0) = x_0$, но $\phi^k(x_0) \neq x_0$ для каждого $k < p$. К тому же точка x_0 называется предпериодической, если она не периодическая, но существует $k > 0$ такое, что $\phi^k(x_0)$ периодическое. Существуют различные типы неподвижных точек в зависимости от соответствующего множителя $|\phi'(x_0)|$. Принимая во внимание соответствующий множитель, неподвижная точка x_0 называется:

- *аттрактором*, если $|\phi'(x_0)| < 1$,
- *суператтрактором*, если $|\phi'(x_0)| = 0$,
- *репелльсором*, если $|\phi'(x_0)| > 1$,
- *параболической*, если $|\phi'(x_0)| = 1$.

Если α — неподвижная точка притяжения рациональной функции ϕ , ее область притяжения $\mathcal{A}(\alpha)$ определяется как множество прообразов любого порядка, так что

$$\mathcal{A}(\alpha) = \{x_0 \in \mathbb{R} : \phi^m(x^{(0)}) \rightarrow \alpha, m \rightarrow \infty\}.$$

Множество точек, орбиты которых стремятся к неподвижной точке притяжения α , определяется как множество Фату. Дополнительное множество, называемое множеством Жюлиа, представляет собой замыкание множества, состоящего из неподвижных точек отталкивания, и устанавливает границы между областями притяжения. Это означает, что область притяжения любой неподвижной точки принадлежит множеству Фату, а границы этих областей притяжения принадлежат множеству Жюлиа.

С динамической точки зрения в качестве начальной точки возьмем $z_0 \in D$, где D — прямоугольная область в \mathbb{C} , содержащая все корни $f(z) = 0$. Численные методы с началом в точке z_0 в прямоугольнике могут сходиться к нулю функции $f(z)$ или в конечном счете расходиться. Критерий остановки сходимости мы рассматриваем как 10^{-3} до максимума 25 итераций. Если мы не получили желаемого допуска за 25 итераций, мы не продолжаем и решаем, что итерационный метод, начиная с z_0 , не сходится ни к какому корню. При этом используется следующая стратегия: каждой начальной точке z_0 присваивается цвет в области притяжения нуля. Если итерация, начиная с начальной точки z_0 , сходится, тогда она представляет области притяжения с тем конкретным цветом, который ей приписан, и если она не сходится за 25 итераций, то цвет черный.

Для изучения динамического поведения проанализируем области притяжения методов с использованием следующих двух многочленов.

Пример 1. В первом примере мы рассматриваем многочлен

$$p_1(z) = (z^2 - 1)^2,$$

имеющий нули $\{1, -1\}$ кратности 2. В этом случае мы использовали сетку 400×400 точек в прямоугольнике $D \in \mathbb{C}$ размера $[-2.5, 2.5] \times [-2.5, 2.5]$. Полученные изображения представлены на рисунке 1. Изучая поведение методов, мы видим, что представленный новый метод пятого порядка $\text{NMM}_{5,3}$ более требователен, так как обладает большими и более яркими областями притяжения. Методы LCNM_4 и LLCM_4 имеют большее число расходящихся точек по сравнению с другими методами.

Пример 2. Во втором примере возьмем многочлен

$$p_2(z) = (z^5 - 1)^3,$$

имеющий нули $\{1, 0.309017 \pm 0.951057i, -0.809017 \pm 0.587785i\}$. Здесь, чтобы увидеть динамику, мы рассматриваем прямоугольник $D = [-1.5, 1.5] \times [-1.5, 1.5] \in \mathbb{C}$ с 400×400 точками сетки. Области притяжения для этой задачи показаны на рис. 2. Видно, что метод $\text{NMM}_{5,3}$ самый лучший, а метод LCNM_4 содержит наибольшее количество расходящихся точек. Среди остальных методов LLCM_4 имеет устойчивые области притяжения.

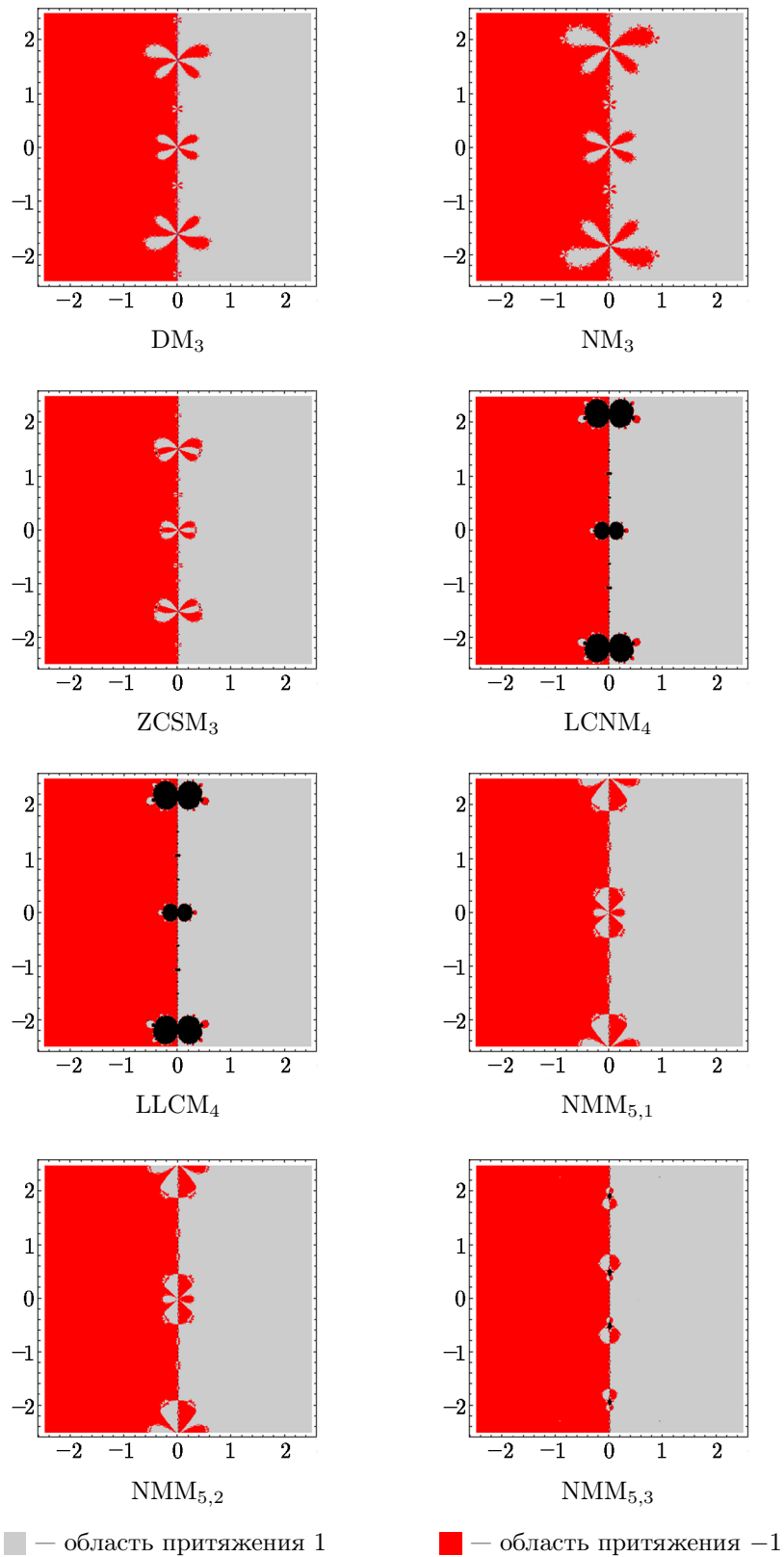


Рис. 1. Области притяжения многочлена $p_1(z)$

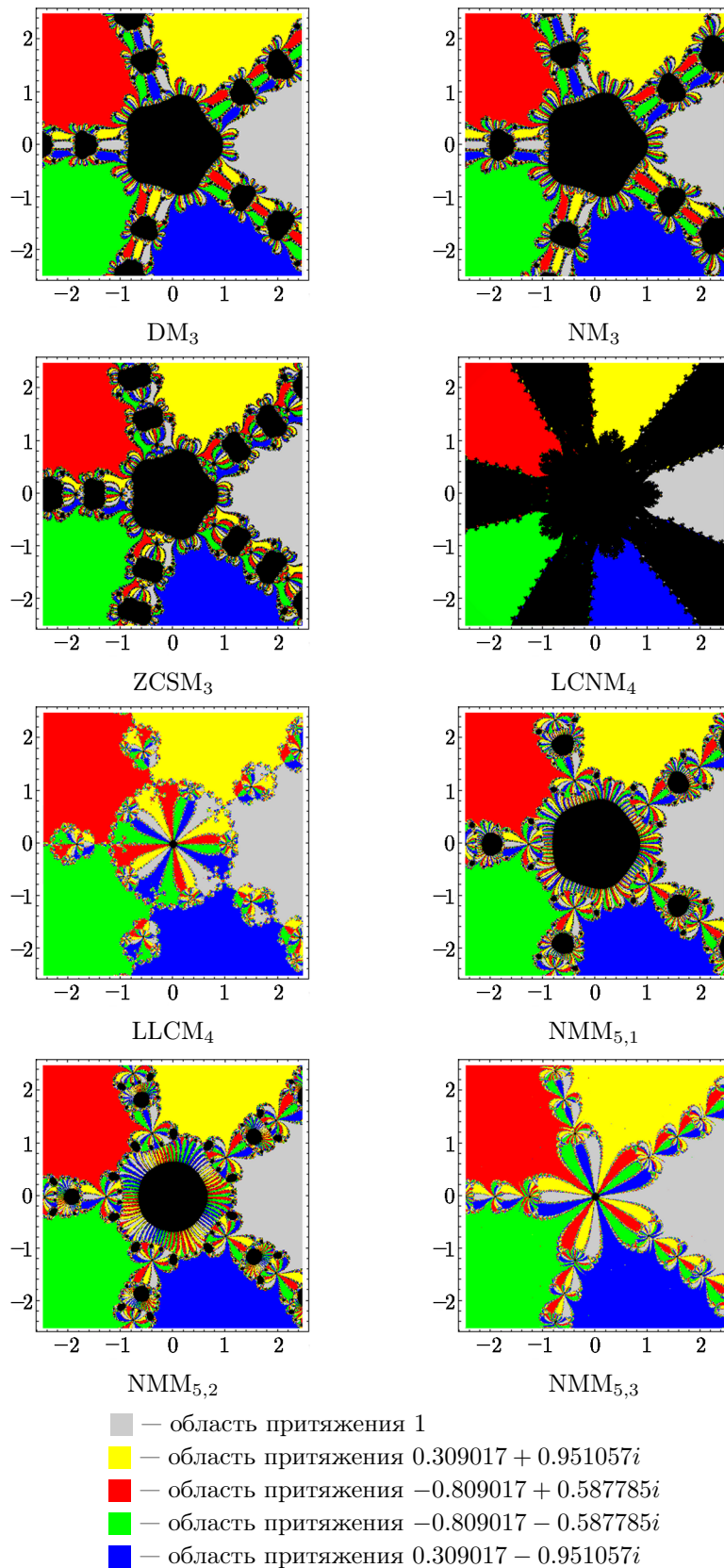


Рис. 2. Области притяжения многочлена $p_2(z)$

6. Выводы

В этой статье была сделана попытка разработать итерационные методы для вычисления кратных корней. Таким образом, получено двухточечное семейство методов пятого порядка, основанное на модифицированном методе Ньютона и требующее двух оценок f и двух оценок f' на каждый шаг. Представлены некоторые частные случаи семейства. Индекс эффективности методов пятого порядка $E = \sqrt[4]{5} \approx 1.495$, что лучше, чем для модифицированного метода Ньютона ($E = \sqrt{2} \approx 1.414$), методов третьего порядка ($E = \sqrt[3]{3} \approx 1.442$) и методов четвертого порядка, которые требуют такого же количества оценок функций, что и оценки представленных методов пятого порядка.

Эти алгоритмы используются для решения некоторых нелинейных уравнений и сравниваются с существующими методами. Численные результаты показывают, что представленные алгоритмы успешно конкурируют с методами, имеющимися в литературе. Более того, представленные области притяжения также подтвердили лучшую эффективность этих методов по сравнению с другими известными в литературе методами.

В заключение отметим, что во многих численных применениях требуется высокая точность вычислений. Результаты численных экспериментов показывают, что эти эффективные методы высокого порядка, связанные с арифметикой с плавающей точкой с многократно увеличенной точностью, очень полезны, поскольку они дают явное сокращение количества итераций.

Благодарности. Мы очень благодарны рецензентам, предложения которых позволили нам улучшить качество статьи.

Литература

1. **Schröder E.** Über unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen // Math. Ann. — 1870. — Vol. 2. — P. 317–365.
2. **Traub J.F.** Iterative Methods for the Solution of Equations. — Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1964.
3. **Biazar J., Ghanbari B.** A new third-order family of nonlinear solvers for multiple roots // Comput. Math. Appl. — 2010. — Vol. 59, № 10. — P. 3315–3319.
4. **Chun C., Neta B.** A third-order modification of Newton's method for multiple roots // Appl. Math. Comput. — 2009. — Vol. 211, № 2. — P. 474–479.
5. **Chun C., Bae H.J., Neta B.** New families of nonlinear third-order solvers for finding multiple roots // Comput. Math. Appl. — 2009. — Vol. 57, № 9. — P. 1574–1582.
6. **Hansen E., Patrick M.** A family of root finding methods // Numer. Math. — 1976. — Vol. 27. — P. 257–269.
7. **Neta B.** New third order nonlinear solvers for multiple roots // Appl. Math. Comput. — 2008. — Vol. 202. — P. 162–170.
8. **Osada N.** An optimal multiple root-finding method of order three // J. Comput. Appl. Math. — 1994. — Vol. 51, № 1. — P. 131–133.
9. **Sharma R., Bahl A.** General family of third order methods for multiple roots of nonlinear equations and basin attractors for various methods // Advances in Numerical Analysis. — 2014. — Vol. 2014. — (Article ID 963878)
10. **Sharma J.R., Sharma R.** Modified Chebyshev-Halley type method and its variants for computing multiple roots // Numer. Algor. — 2012. — Vol. 61. — P. 567–578.

11. **Dong C.** A basic theorem of constructing an iterative formula of the higher order for computing multiple roots of an equation // *Math. Numer. Sinica.*—1982.— Vol. 11.— P. 445–450.
12. **Homeier H.H.H.** On Newton-type methods for multiple roots with cubic convergence // *J. Comput. Appl. Math.*—2009.— Vol. 231, № 1.— P. 249–254.
13. **Kumar S., Kanwar V., Singh S.** On some modified families of multipoint iterative methods for multiple roots of nonlinear equations // *Appl. Math. Comput.*—2012.— Vol. 218.— P. 7382–7394.
14. **Li S., Li H., Cheng L.** Some second-derivative-free variants of Halley’s method for multiple roots // *Appl. Math. Comput.*—2009.— Vol. 215, iss. 6.— P. 2192–2198.
15. **Neta B.** New third order nonlinear solvers for multiple roots // *Appl. Math. Comput.*—2008.— Vol. 202.— P. 162–170.
16. **Victory H.D., Neta B.** A higher order method for multiple zeros of nonlinear functions // *Inter. J. Comput. Math.*—1983.— Vol. 12, № 3-4.— P. 329–335.
17. **Zhou X., Chen X., Song Y.** Families of third and fourth order methods for multiple roots of nonlinear equations // *Appl. Math. Comput.*—2013.— Vol. 219.— P. 6030–6038.
18. **Dong C.** A family of multipoint iterative functions for finding multiple roots of equations // *Inter. J. Comput. Math.*—1987.— Vol. 21, № 3-4.— P. 363–367.
19. **Li S.G., Cheng L.Z., Neta B.** Some fourth-order nonlinear solvers with closed formulae for multiple roots // *Comput. Math. Appl.*—2010.— Vol. 59, № 1.— P. 126–135.
20. **Li S.G., Liao X., Cheng L.Z.** A new fourth-order iterative method for finding multiple roots of nonlinear equations // *Appl. Math. Comput.*—2009.— Vol. 215.— P. 1288–1292.
21. **Neta B.** Extension of Murakami’s high-order non-linear solver to multiple roots // *Inter. J. Comput. Math.*—2010.— Vol. 87, № 5.— P. 1023–1031.
22. **Neta B., Johnson A.N.** High-order nonlinear solver for multiple roots // *Comput. Math. Appl.*—2008.— Vol. 55, № 9.— P. 2012–2017.
23. **Ostrowski A.M.** *Solution of Equations and Systems of Equations.*—New York: Academic Press, 1966.
24. **Wolfram S.** *The Mathematica Book*, 5-th ed.—Wolfram Media, 2003.
25. **Jay L.O.** A note on Q-order of convergence // *BIT Numerical Mathematics.*—2001.— Vol. 41.— P. 422–429.
26. **Scott M., Neta B., Chun C.** Basin attractors for various methods // *Appl. Math. Comput.*—2011.— Vol. 218.— P. 2584–2599.
27. **Magreñan Á.A.** A new tool to study real dynamics: the convergence plane // *Appl. Math. Comput.*—2014.— Vol. 248.— P. 215–224.

*Поступила в редакцию 27 апреля 2018 г.
После исправления 2 сентября 2020 г.
Принята к печати 4 февраля 2021 г.*

