

**ИЗОБАРЫ КОМПОНЕНТ ТЕНЗОРА НАПРЯЖЕНИЙ  
В УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ ПРИ СОСРЕДОТОЧЕННОМ  
ВЕРТИКАЛЬНОМ ДИНАМИЧЕСКОМ ВОЗДЕЙСТВИИ  
НА ПОВЕРХНОСТИ**

***B. C. Никифоровский, Е. И. Шемякин***

(Новосибирск)

В статье обсуждаются основные особенности динамического поля напряжений, возникающего в упругом полупространстве под действием вертикальной пространственно сосредоточенной нагрузки, нарастающей во времени по линейному закону. В предыдущей статье [1] это решение было названо фундаментальным решением задачи.

Фундаментальное решение занимает особое место в обсуждении напряженного состояния полупространства, так как дает приближенное описание поля напряжений в среде на участке нарастания граничного воздействия во времени и может быть использовано для графического построения решения в случае произвольной функции  $f(t)$ . В этом случае [1] достаточно разбить интервал последней на конечное число участков и аппроксимировать на каждом из них прямой со своим тангенсом угла наклона  $m_i$ .

Фундаментальное решение можно записать в безразмерном виде

$$\Sigma_i = \frac{k}{t^*} \Sigma'_i(\xi, \eta, \gamma) \\ k = \frac{m}{2\pi\lambda V_s}, \quad \gamma = \frac{V_s}{V_p}, \quad \lambda = TV_s, \quad \xi = \frac{r}{tV_s}, \quad \eta = \frac{z}{tV_s}, \quad t^* = \frac{tV_s}{\lambda} \quad (0.1)$$

Величина  $\Sigma_i$  обозначает в случае осевой симметрии любую из четырех компонент  $\sigma_z, \sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{rz}$  тензора напряжений;  $\xi, \eta, t^*$  — безразмерные координаты и время;  $V_p$  и  $V_s$  — скорости распространения продольных и поперечных волн соответственно;  $\lambda$  — длина волны;  $T$  — характерное время граничного сигнала, например, длительность фазы сжатия [1].

Запись решения в форме (0.1) показывает, что для сред с одним и тем же отношением скоростей поперечной и продольной волн  $\gamma$  и для одного и того же граничного воздействия напряжения обратно пропорциональны квадрату скоростей поперечных волн при одних и тех же значениях  $\xi$  и  $\eta$ .

Обсуждаемые количественные и качественные результаты могут оказаться полезными во многих прикладных задачах динамической теории упругости. Этим и вызвано в достаточной мере подробное графическое представление материалов нашего исследования. Поле напряжений  $\Sigma'_i$  было рассчитано в точках лучей, проходящих через точку приложения нагрузки с шагом по  $R = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$  через 0.1 и с шагом по углу  $\Delta\alpha = 10^\circ$ , где  $\alpha = \arcsin(\xi/R)$  — угол между указанным лучом и осью симметрии. В отдельных случаях (окрестность оси симметрии  $0 < \alpha < 10^\circ$  и зона вблизи поверхности среды  $80^\circ \leq \alpha \leq 90^\circ$ ) шаг по углу был уменьшен до  $\Delta\alpha = 2.5^\circ$ , а в окрестности сферического фронта поперечной волны шаг по  $R$  был переменным:  $\Delta R = 0.025$  и  $\Delta R = 0.01$  в непосредственной окрестности фронта; при этом за единицу в переменных  $\xi, \eta$  принят радиус фронта поперечной волны [1].

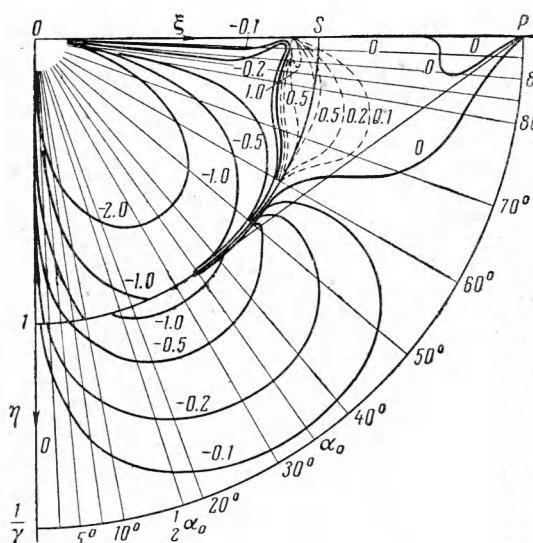
**§ 1. Исследование напряженного состояния в динамических задачах для упругих тел можно провести, основываясь на следующих представлениях:**

а) подробно рассмотреть изобары отдельных компонент тензора напряжений — линии равных напряжений  $\sigma_z, \sigma_r, \sigma_\theta$  и  $\tau_{rz}$ ;

б) при изучении поверхностей, подозреваемых в концентрации опасных усилий, необходимо исследовать изобары интенсивности касательных напряжений в окрестности этих поверхностей:

в) поле напряжений можно характеризовать в главных напряжениях с указанием траекторий главных напряжений, при этом следует иметь в виду, что в рассматриваемой задаче переход к главным напряжениям совершается простым поворотом осей в плоскости  $rz$  (напряжение  $\sigma_0$  будет всегда одним из главных напряжений);

г) для полноты исследования напряженного состояния, с точки зрения возможных разрушений (скольжение, отрыв), следует привлечь результаты исследования поля перемещений в этой же задаче; для исследования последних были предложены детально разработанные схемы в работе [2].



Фиг. 1

Рассмотрим подробно первые два из указанных пунктов, т. е. представим полное поле изобар для отдельных компонент тензора напряжений и интенсивности касательных напряжений, ограничившись некоторыми замечаниями относительно поля главных напряжений.

Вычисления, результаты которых будут обсуждены, относятся к среде со следующими параметрами:  $\lambda = \mu$  ( $\gamma = 1/\sqrt{3}$ ), величина скорости поперечных волн  $V_s$  произвольна и входит в множитель  $k/t^*$  вертикального масштаба.

**§ 2.** Рассмотрим последовательно изобары отдельных компонент тензора напряжений, при этом из соображений симметрии достаточно представить изобары лишь в четверти плоскости  $\xi\eta$  для  $\xi > 0, \eta > 0$ .

1°. На фиг. 1 приведены изобары  $\sigma_z$ -компоненты. Сплошные линии представляют изобары сжимающих напряжений (если нагрузка на поверхности является сжимающей), штрихованные линии — изобары растягивающих напряжений. Изобара, указанная сплошной линией и разделяющая штрихованные и сплошные линии, является нулевой изобарой напряжения. Дугами окружностей представлены фронты продольной и поперечной волн, прямой линией — фронт конической волны. Фронты волн разделяют поле возмущений на три области 1, 2, 3, в каждой из которых математическое представление решения имеет свой вид [1]. Как следует из предварительного анализа [1] и из рассмотрения изобар напряжений, деление на области имеет физическое объяснение: оно связано с приходом продольных или поперечных волн. Поле изобар указано в условных единицах, позволяющих судить об относительных изменениях напряжения  $\sigma_z$ . Абсолютная величина напряжения определяется некоторым постоянным для каждой конкретной задачи множителем в описании фундаментального решения (0.1), который вследствие линейности задачи может быть вынесен в вертикальный масштаб.

Отметим основные особенности изобар  $\sigma_z$ -компоненты. На границе области 3 и зоны покоя (фронт продольной волны)  $\sigma_z$ -компоненты тензора напряжений претерпевает конечный скачок (см. [1], формула (1.11)), величина которого убывает при движении вдоль фронта от оси симметрии к свободной поверхности ( $\alpha$  возрастает от нуля под эпицентром до  $90^\circ$  на границе среды). Следует подчеркнуть, что скачок напряжений на

фронте отвечает непрерывному нарастанию нагрузки во времени на поверхности среды по линейному закону [1].

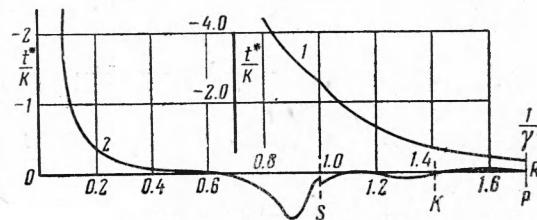
Практически в области 3 за исключением небольшой окрестности конической волны напряжение  $\sigma_z$  сохраняет знак нагрузки: если нагрузка на поверхности нарастает, то  $\sigma_z$  остается сжимающим. В области 3, прилегающей к конической волне, сжимающие напряжения становятся меньше, чем под эпицентром, и, наконец, появляется зона небольших растягивающих напряжений.

Переход из области 3 в область 1 ( $0 < \alpha < \alpha_0$ ,  $\alpha_0 = \arcsin \gamma$ ) совершается скачком напряжений того же знака, что и напряжения в области 3. Этот скачок равен нулю на оси симметрии, затем возрастает при увеличении  $\alpha$  и при  $\alpha \sim \alpha_0$  опять становится малым. Наконец, почти всюду в области 1 за исключением участка окрестности сферического фронта поперечной волны за конической волной напряжение также остается сжимающим. Для иллюстрации изменения  $\sigma_z$  при движении вдоль луча  $\alpha = \text{const}$  приведена эпюра  $\sigma_z$  в зависимости от величины  $R$  для  $\alpha = 0$  (линия 1 на фиг. 2). На этой эпюре указаны величина скачка на фронте продольной волны  $P$  и угловая точка, отвечающая скачку производной, на фронте поперечной волны  $S$ . Дальнейший рост  $\sigma_z$  при  $R \rightarrow 0$  отвечает возрастанию нагрузки на поверхности.

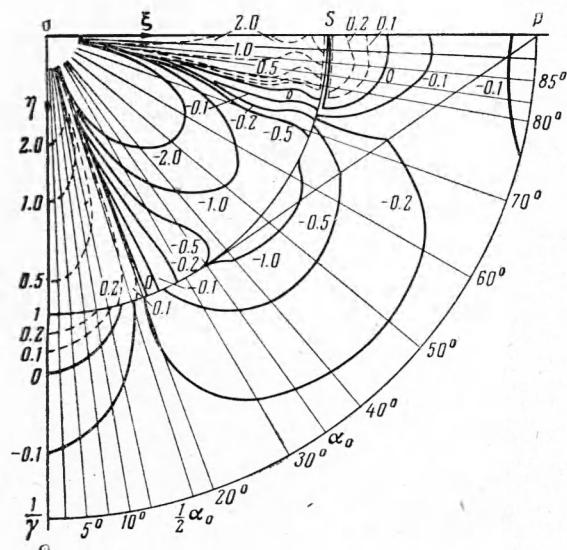
В окрестности фронтов поперечных волн, как и в большей части области 2,  $\sigma_z$  является растягивающим. При этом изменение  $\sigma_z$  происходит

довольно резко, о чём свидетельствует сгущение изобар. Эта область возмущений представляет большой интерес, так как указывает на появление растяжений на площадках с вертикальной нормалью при сжатии среды поверхностью нагрузкой. Характерным для этой области является изменение  $\sigma_z (R)$ , указанное линией 2 на фиг. 2 для луча  $\alpha = 80^\circ$ . Величина  $\sigma_z$  изменяется скачком на фронте волны  $P$ , затем сжимающее напряжение уменьшается и в окрестности конической поперечной волны становится растягивающим. На фронте сферической поперечной волны  $\sigma_z$  претерпевает скачок и имеет логарифмическую особенность. При дальнейшем уменьшении  $R$  (в окрестности «фронта» поверхности волны Релея) наблюдается значительный рост растягивающих напряжений  $\sigma_z$ , который затем сменяется сжимающими напряжениями при  $R \rightarrow 0$ .

2°. Изобары  $\sigma_r$ -компоненты тензора напряжений (фиг. 3) указывают на следующие особенности в распределении усилий на площадках, перпендикулярных к оси  $r$ .



Фиг. 2



Фиг. 3

На фронте продольной волны  $\sigma_r$ -компоненты скачком приобретает конечное значение, при этом величина скачка характеризуется куполообразным распределением в зависимости от  $\alpha$ , имея минимальные значения при  $\alpha = 0$  и  $\alpha = 90^\circ$ . На фронте сферической поперечной волны  $\sigma_r$ -компонента изменяется скачком при  $0 < \alpha < \alpha_0$  (при этом знак скачка противоположен таковому для поперечной волны), а при  $\alpha > \alpha_0$  характеризуется скачком и логарифмической особенностью. На фронте конической волны  $\sigma_r(\xi, \eta, \gamma)$  изменяется непрерывно, но производная  $\sigma_r$  (по лучу, например) имеет конечный скачок.

Следует отметить наличие двух зон растягивающих напряжений  $\sigma_r$ : вблизи оси симметрии (области 3 и 1 в окрестности сферического фронта поперечной волны) и вблизи поверхности среды.



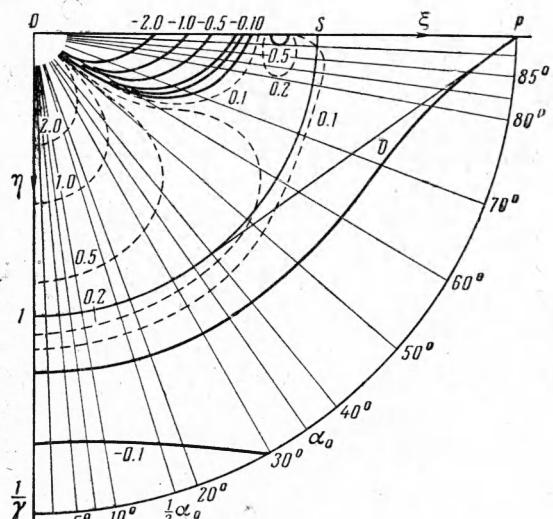
Фиг. 4

ионущим, претерпевая резкие изменения лишь в окрестности сферических фронтов волн. Лучи вблизи указанных граничных значений  $\alpha$  указывают на резкое изменение значений  $\sigma_r$  в области 1 при переходе от  $\alpha = 0$  к  $\alpha = 90^\circ$ .

3°. Изобары  $\sigma_\theta$ -компоненты (фиг. 5) на оси симметрии совпадают с изобарами для  $\sigma_r$ -компоненты (фиг. 3), а в окрестности оси симметрии ( $\alpha < 10^\circ$ ) изобары этих компонент можно считать совпадающими приближенно.

На фронте продольной волны  $\sigma_\theta$ -компонента возрастает скачком от нуля до некоторого сжимающего напряжения, величина скачка монотонно убывает с увеличением  $\alpha$  до нуля на поверхности среды. На фронтах поперечных волн разрывные значения  $\sigma_\theta$ -компонента отсутствуют: поле напряжений не имеет ни скачков, ни логарифмической особенности (при  $\alpha > \alpha_0$ ). Характер изменения  $\sigma_\theta(R)$  указан на фиг. 4 для двух лучей  $\alpha = 0^\circ$  (линия 1) и  $\alpha = 80^\circ$  (линия 3).

Рассмотрим нулевые изобары  $\sigma_\theta$ -компонента. Одна из них с удовлетворительной точностью следует границе проявления поперечных волн («впереди» границы областей 3—1 и 3—2); вторая отделяет малую зону сжимающих  $\sigma_\theta$  в окрестности точки приложения нагрузки, прилегающую к поверхности в области 1 ( $\alpha > 50^\circ$ ). Нулевые изобары очерчивают обширную область растягивающих напряжений  $\sigma_\theta$ , отвечающих сжимающей поверхностной нагрузке.



Фиг. 5

Наконец, отметим, что в области I вблизи луча  $\alpha \sim 55^\circ$  происходит не только смена знаков напряжений  $\sigma_\theta$ , но и их концентрация. Это напряженное состояние наступает по времени значительно позже прохождения фронтов и близко к статическому распределению  $\sigma_\theta$ .

**§ 3.** В этом параграфе рассмотрим изобары  $\tau_{rz}$ -компоненты тензора напряжений и изобары интенсивности касательных напряжений

$$T = \frac{2}{3} \sqrt{(\sigma_r - \sigma_\theta)^2 + (\sigma_\theta - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_r)^2 + 6\tau_{rz}^2} \quad (3.1)$$

1°. Изобары  $\tau_{rz}$ -компоненты представляют интерес с той точки зрения, что изучение поля касательных напряжений доставляет прямые, хотя и неполные сведения о поле главных напряжений. Так, нулевые изобары  $\tau_{rz}$ -компоненты указывают на поверхности лучи, в точках которых нормальные напряжения  $\sigma_z$ ,  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  являются главными.

Рассмотрим последовательно нулевые изобары  $\tau_{rz}$  (фиг. 6).

В точках оси симметрии  $\xi = 0$ , компонента  $\tau_{rz} = 0$ , а нормальные напряжения  $\sigma_r = \sigma_\theta$ ,  $\sigma_z$  будут главными. Элементы среды в этих точках находятся в таком же напряженном состоянии, как и в случае центральной симметрии, при этом в области 3  $\sigma_r = \sigma_\theta$  являются сжимающими, а затем еще до прихода сферического фронта поперечной волны становятся растягивающими (линия 1 на фиг. 4).

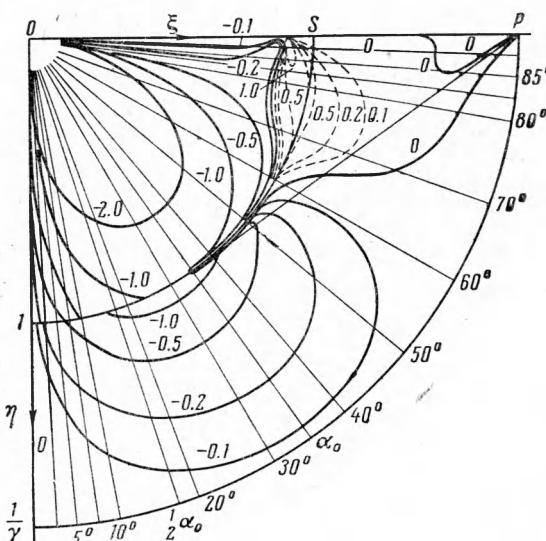
В окрестности оси симметрии нормальные напряжения можно считать главными только в области 3 вблизи фронта продольной волны, в области I это выполняется только на оси симметрии.

При удалении от оси  $\xi = 0$  для лучей  $\alpha > 0$  поле нормальных напряжений перестает быть главным: появляются касательные напряжения, быстро нарастающие вдоль луча, как об этом свидетельствует эпюра

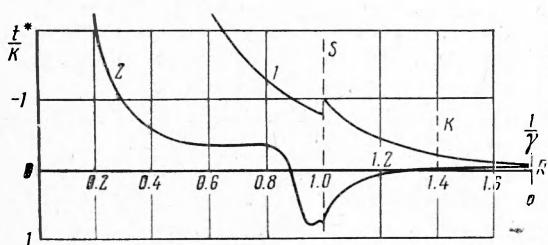
$\tau_{rz}(R)$  для  $\alpha = 0.5 \alpha_0$  (линия 1 фиг. 7). На фронте поперечной волны касательное напряжение совершает скачок обратного знака и затем опять нарастает.

Нулевая изобара касательных напряжений в окрестности фронта конической поперечной волны указывает на то, что поле нормальных напряжений можно считать

главным. Вблизи фронта напряжение  $\sigma_\theta$  практически равно нулю,  $\sigma_z$  переходит от сжимающих к растягивающим и единственным сжимающим напряжением является радиальное  $\sigma_r$ -напряжение. Таким образом, в указанной области элемент среды находится в простом напряженном -е-



Фиг. 6



Фиг. 7

стоянии, испытывая радиальное сжатие и растяжение в вертикальном направлении.

При этом, как следует из анализа поля перемещений [2], элемент среды движется вдоль фронта к поверхности среды: происходит «выдавливание» элементов среды.

В окрестности фронта сферической поперечной волны наблюдается как смена знаков  $\tau_{rz}$ , так и сравнительно большие градиенты касательного напряжения сразу же за фронтом в области I, что иллюстрируется эпюрой  $\tau_{rz}(R)$  при  $\alpha = 80^\circ$  (линия 2 на фиг. 7). В этой окрестности требуется особенно детальное изучение напряженного состояния, так как нормальные напряжения элемента среды изменяются тоже достаточно резко, оставаясь растягивающими.

По-видимому, в условиях этого сложного напряженного состояния основную роль играют оба фактора — как скользящие напряжения  $\tau_{rz}$  и их концентрации, так и всестороннее растяжение элемента среды.

В узкой полоске, примыкающей к свободной поверхности, поле напряжений также свободно от касательных напряжений (на свободной поверхности  $\tau_{rz}$  в точности равно нулю в силу краевых условий), поэтому нормальные напряжения являются главными. Из нормальных напряжений тензора на поверхности отличны от нуля только  $\sigma_\theta$  и  $\sigma_r$ , а  $\sigma_z$ -компонент равна нулю везде, кроме особенности в точке приложения нагрузки.

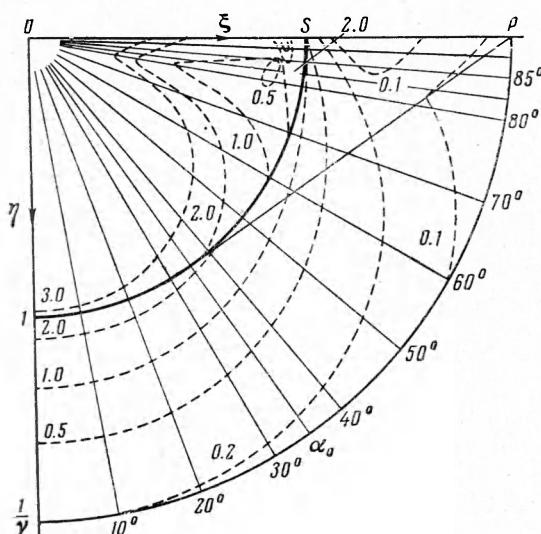
Схемы фиг. 3 и 5, на которых представлены изобары  $\sigma_r$ - и  $\sigma_\theta$ -компонент, соот-

ветственно позволяют охарактеризовать простое напряженное состояние среды в точках поверхности. Так, в области 2 непосредственно у поверхности  $\sigma_\theta$ -компонента указывает на растягивающие напряжения в азимутальном направлении,  $\sigma_r$  является сжимающей; в области же 1 напряжение  $\sigma_r$  становится растягивающим, в то время как напряжение  $\sigma_\theta$  будет растягивающим только в непосредственной окрестности сферического фронта поперечной волны, а затем становится сжимающим.

В условиях такого напряженного состояния могут развиваться следующие типы разрушения поверхности среды: между окружностями, представляющими в плане проекции фронтов поперечной и продольной волн, с центром в точке приложения нагрузки могут появиться радиально ориентированные трещины, а внутри окружности фронта поперечной волны, вокруг точки приложения нагрузки, — кольцевые трещины.

2°. Изучение сложного напряженного состояния элемента упругой среды, основанное на анализе поведения отдельных компонент, вообще говоря, не позволяет сделать убедительных заключений об опасных концентрациях напряжений. Поэтому при оценке опасных концентраций необходимо дополнительно пользоваться некоторыми общими критериями. Таким в достаточной мере общим подходом является изучение напряженного состояния в главных напряжениях.

Другой общий подход заключается в анализе поведения интенсивности касательных напряжений  $T \geq 0$ , которая является инвариантной харак-



Фиг. 8

теристикой напряженного состояния с компонентами  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_z$  и  $\tau_{rz}$ . Но в этом случае также необходимо дополнить анализ изучением изобар отдельных компонент. С этой позиции изобары функции  $T$ , указанные на фиг. 8 штриховыми линиями, должны свидетельствовать об опасных концентрациях напряжений в области сгущения изобар, например, в окрестности поперечной волны при  $\alpha > \alpha_0$ .

Это подтверждается эпюорой  $T(R)$  для  $\alpha = 80^\circ$  (линия 1 на фиг. 9); откуда следует, что функция  $T$  совершает резкое колебание в окрестности фронта сферической поперечной волны, в то время как при  $\alpha = 0$  (линия 2 на фиг. 9) интенсивность  $T$  изменяется сравнительно плавно.

Конкретный анализ изменения отдельных компонент тензора напряжений должен указать на возможный характер разрушения в указанной области. Так, в окрестности фронта сферической поперечной волны (фиг. 2, 4) при  $\alpha > \alpha_0$  наблюдается резкое изменение практически всех нормальных компонент, которые становятся растягивающими в момент прохождения фронта поверхностной волны (сразу же за поперечной волной). Эти факты подсказывают опасность напряжений в этой зоне и возможный характер разрушений среды за счет разрыва элементов.

3°. В заключение обсуждения отметим, что основной материал статьи изобары напряжений  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\sigma_z$  и  $\tau_{rz}$  с очевидностью может быть использован и в том случае, когда нагрузка на поверхности упругой среды не возрастает, а убывает по линейному закону: происходит разгрузка некоторого напряженного состояния либо растяжение покоящейся среды.

Кроме того, в исследование напряженного состояния на оси симметрии и вблизи нее, где все три нормальные компоненты тензора являются сжимающими, могут быть внесены уточнения. Так, если нагрузка производится довольно резко и приводит к значительным напряжениям в точках среды, элемент среды приходит в пластическое состояние. При этом для металлов может быть принято условие идеальной текучести, а для горных пород некоторое предельное условие типа Мора — Кулона — Прандтля [3]. Сходство напряженных состояний элемента в указанной области и в случае центральной симметрии позволяет использовать условия пластичности в простейшем виде.

Авторы считают своим долгом поблагодарить С. А. Христиановича за ряд ценных замечаний по работе.

Поступила 23 II 1962

#### ЛИТЕРАТУРА

- Никифоровский В. С. Исследование динамического поля напряжений в упругом полупространстве в окрестности точки приложения поверхностной нагрузки. ПМТФ, 1962, № 2.
- Огурцов К. И. Количественные исследования волновых процессов в упругом полупространстве при различных типах воздействий. Уч. зап. ЛГУ, 1956, № 208, вып. 30.
- Медведева Н. С., Шемякин Е. И. Волны нагрузки при подземном взрыве в горной породе. ПМТФ, 1961, № 6.