$\mathcal{AMS}$ subject classification: 47A52, 65R30

Неявный итерационный метод решения линейных некорректных операторных уравнений

Т. Бешуа

Department of Mathematics and Informatics, Mohammed Cherif Messaadia University, Faculty of Science and Technology, Souk Ahras, 41000, P.O.Box 1553, Algeria

E-mail: t.bechouat@gmail.com

Английская версия этой статьи печатается в журнале "Numerical Analysis and Applications" № 2, Vol. 16, 2023.

Бешуа Т. Неявный итерационный метод решения линейных некорректных операторных уравнений // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2023. — Т. 26, № 2. — С. 115–134.

В данной работе мы исследуем новый неявный метод решения некорректных линейных операторных уравнений первого рода с компактными операторами. Для демонстрации устойчивости и сходимости этой схемы может использоваться теория регуляризации. Кроме того, мы получаем результаты сходимости и эффективные критерии остановки в соответствии с принципом невязки Морозова. Для демонстрации верности нашего неявного метода и его применимости к задачам устранения размытости проводятся численные эксперименты.

DOI: 10.15372/SJNM20230201

Ключевые слова: *некорректная задача, операторное уравнение первого рода, итерационная регуляризация, устранение размытости изображения.*

Bechouat T. An implicit iteration method for solving linear ill-posed operator equations // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2023. — Vol. 26, № 2. — P. 115–134.

In this work, we study a new implicit method to compute the solutions of ill-posed linear operator equations of the first kind under the setting of compact operators. The regularization theory can be used to demonstrate the stability and convergence of this scheme. Furthermore, we obtain convergence results and effective stopping criteria according to Morozov's discrepancy principle. Numerical performances are calculated to show the validity of our implicit method and demonstrate its applicability to deblurring problems.

Keywords: *ill-posed problem, operator equation of first kind, iterative regularization, image deblurring.*

1. Введение

Мы исследуем решения следующих операторных уравнений первого рода:

$$Ax = y, \tag{1}$$

где $A : X \to Y$ — компактный оператор с незамкнутой областью значений ($\overline{R(A)} \neq R(A)$) и X, Y — сепарабельные гильбертовы пространства.

Задачи (1) возникают в нескольких областях науки и техники, например, если A является интегральным оператором. Уравнения этого вида возникают во многих приложениях, включая дистанционное зондирование, компьютерную томографию и устранение размытости изображений — это лишь некоторые из них.

Пусть (σ_i, u_i, v_i) — сингулярная система A, т. е. (σ_i) — последовательность положительных действительных чисел такая, что $\sigma_i \to 0$ и $\{u_i\}$, $\{v_i\}$ — ортонормированный базис ортогонального дополнения к нулевому пространству $N(A)$ и $\overline{R(A)}$ соответственно.

Пусть $x \in X$ и $y \in Y$. Ясно, что

$$Ax = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i \langle x, u_i \rangle v_i, \tag{2}$$

и

$$A^* y = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i \langle y, v_i \rangle u_i, \tag{3}$$

где $A^* : Y \to X$ — сопряженный оператор A.

Напомним, что если $y \in R(A) \oplus R(A)^{\perp} \subset Y$, то наилучшее приближенное решение $x^+ \in N(A)^{\perp}$ уравнения (1) задается следующим образом:

$$x^+ = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\langle y, v_i \rangle}{\sigma_i} u_i,$$

что является решением минимальной нормы нормального уравнения $A^*Ax = A^*y$.

Так как пространство значений A не замкнуто в Y, то наилучшее приближенное решение x^+ не зависит непрерывно от y. Поэтому задача нахождения решения уравнения (1) некорректна (см. [1–3]).

К сожалению, в приложениях правая часть y задается только измерениями $y^\delta \in Y$, так что

$$\left\| y - y^\delta \right\|_Y \le \delta, \tag{4}$$

где $\delta > 0$ — уровень шума.

Чтобы получить устойчивое приближенное решение, мы аппроксимируем некорректную задачу (1) семейством соседних корректных задач. Эта процедура получается с помощью методов регуляризации, которые вычисляют аппроксимацию x_α^δ для x^+, которая непрерывно зависит от y^δ с тем свойством, что $x_\alpha^\delta \to x^+$, когда $\delta \to 0$ и параметр регуляризации α выбран правильно. Для более подробной информации смотри [1–3].

Методы регуляризации в целом можно разделить на два основных класса: вариационные и итерационные. В данной статье интерес для нас представляют итерационные методы решения некорректных уравнений (1). Некоторые выборочные ссылки по этой теме даны в [4–8]. Наиболее яркий пример этого класса — итерация Ландвебера (см. [9, 10]). Эта явная итерационная схема задается следующим образом:

$$x_0^\delta = 0, \qquad x_{n+1}^\delta = x_n^\delta + wA^*\big(y^\delta - Ax_n^\delta\big), \quad n = 0, 1, \ldots,$$

где w — параметр релаксации, n — параметр регуляризации, а x_n^δ — n-й шаг итерационного приближенного решения.

Как известно, в общем случае итерационный метод Ландвебера довольно медленный. Следовательно, для увеличения скорости необходимо использовать стратегии ускорения. Некоторые из этих стратегий ускорения обсуждаются в [11–14].

Константинова и Лисковец [11] описали новую явную итерационную схему градиентного метода с переменным шагом (ГМПШ) для нахождения решения некорректного уравнения $Ax = y^\delta$, где $A : H \to H$ — положительный ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H, когда параметр релаксации этой явной итерационной схемы меняется на каждой итерации. Схема ГМПШ задается следующим образом:

$$x_0^\delta = 0, \qquad x_{n+1}^\delta = x_n^\delta + \alpha_{n+1}\big(y^\delta - Ax_n^\delta\big), \quad n = 0, 1, \dots, \tag{5}$$

когда выполняются условия $\alpha_n < \frac{2}{\|A\|}$ $(n = 1, 2, \dots)$ и $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = \infty$. Константинова и Лисковец доказали сходимость этой схемы и получили общую оценку погрешности в случае приближенного оператора, т. е. A заменяется на A^η, где $\|A^\eta - A\| \le \eta$.

Матысик и Халле [12] ввели явную итерационную схему с переменным размером шага (ЯИСПРШ) для решения некорректных операторных уравнений $Ax = y^\delta$, когда $A : H \to H$ — положительный ограниченный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H. Эта явная схема определяется схемой (5) с переменным размером шага $\alpha_{2n+1} = \alpha$ и $\alpha_{2n+2} = \beta$. Матысик и Халле показали, что схема ЯИСПРШ сходится к точному решению уравнения $Ax = y^\delta$ при условиях, что ограничения $0 < \alpha < \frac{2}{\|A\|^2}$, $\beta > 0$ и $|(1 - \alpha\lambda)(1 - \beta\lambda)| < 1$ выполняются для каждого $\lambda \in (0, 1]$.

Известно, что схемы ЯИСПРШ и ГМПШ могут использоваться в нормальном уравнении $A^*Ax = A^*y^\delta$.

Имеется обширная литература по различным неявным и явным итерационным схемам, основанным на общих принципах регуляризации; мы рассматриваем нестационарный итерационный метод Тихонова (НИМТ), представленный ранее в [15–17]. Этот метод задается следующей неявной итерационной схемой:

$$x_0^\delta = 0, \qquad \big(\theta_n I + A^*A\big)x_n^\delta = \theta_n x_{n-1}^\delta + A^*y^\delta, \quad n = 1, 2, \dots . \tag{6}$$

Ханке и Гретч [15] доказали, что схема НИМТ (6) при $y \in R(A)$ сходится к x^+, если и только если $\sum_{n=1}^{\infty} \theta_n^{-1} = \infty$, где последовательность $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ является убывающей.

Для итерационных методов регуляризации общим критерием остановки является принцип невязки Морозова. Этот принцип с заданным числом итераций $n^* = n^*(\delta)$ был получен выше при предположении, что носитель решения x^+ известен. Принцип невязки Морозова может быть определен следующими условиями (см. [1–3, 18]):

$$\big\|Ax_n^\delta - y^\delta\big\|_Y > \tau\delta \quad \text{для} \quad n < n^* \quad \text{и} \quad \big\|Ax_{n^*}^\delta - y^\delta\big\|_Y \le \tau\delta \tag{7}$$

при фиксированном $\tau > 1$. Например, в [15] авторы также доказывают, что сходимость схемы НИМТ достигается при условии $x^+ \in R\big((A^*A)^\mu\big)$, $0 < \mu < n^*$, где $x_{n^*}^\delta$ — регуляризованное решение, а скорость сходимости в этом случае определяется выражением $\big\|x_{n^*}^\delta - x^+\big\|_X = O\Big(\delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}}\Big)$. В [12] Матысик и Халле доказали, что порядок сходимости для схемы ЯИСПРШ получается выражением $O\Big(\delta^{\frac{s}{s+1}}\Big)$ при условии $x^+ \in R\big((A^*A)^s\big)$, $s > 0$.

Цель этой работы — создание нового быстрого метода неявной итерационной регуляризации для решения некорректных операторных уравнений (1).

Мы покажем, что первое преимущество нового метода — сильная оценка ошибки (с точными данными), когда m достаточно большое по сравнению с методом НИМТ. Мы также покажем, что наш метод имеет небольшое число итераций по сравнению с методом НИМТ. Кроме того, в экспериментах показано, что наш метод превосходит метод НИМТ с точки зрения наименьших затрат процессорного времени.

Мы обсудим сходимость этой неявной схемы для заданного числа итераций и докажем, что оптимальный порядок асимптотической сходимости определяется выражением $O\Big(\delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}}\Big)$ при условии $x^+ \in R\big((A^*A)^\mu\big)$ (см. пункт 3). В п. 4 мы используем апостериорную стратегию выбора параметров (7) для получения сходимости этой схемы. Кроме того, в п. 5 приведены некоторые примеры для проверки эффективности предложенной неявной схемы идентификации по сравнению со схемой НИМТ, и численная эффективность исследуется с помощью моделирования. Эти результаты показывают применимость предложенной схемы к задачам устранения размытости.

2. Неявная схема

В этом пункте мы обсудим некоторые результаты относительно неявной итерационной схемы, предложенной в этой работе.

Теперь определим метод итерационной регуляризации, предлагаемый в этом исследовании. Пусть A и y — такие, как в некорректном уравнении (1). Рассмотрим неявную итерационную схему для фиксированного положительного целого числа m:

$$x_0^m = 0, \quad (I + \alpha_n A^*A)^{m+1} x_n^m = (I + \alpha_n A^*A) x_{n-1}^m + F_{n,m}(A^*A)A^*y, \quad n = 1, 2, \ldots, \tag{8}$$

где $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ — заданная последовательность положительных чисел и

$$F_{n,m}(\lambda) = \alpha_n \overline{C}_m + \sum_{i=2}^{m+1} C_{m+1}^i \alpha_n^i \lambda^{i-1}, \quad C_k^i = \frac{k!}{i!(k-i)!}, \quad \overline{C}_m = C_{m+1}^1 - 1.$$

Замечание 1. Из нашей итерационной схемы (8), полагая $m = 1$ и разделяя обе части равенства на α_n, мы получим схему НИМТ (6) для точных данных y. В этом случае последовательность $\{\theta_n\}_{n=1}^{\infty}$ получается с использованием $\big\{\theta_n = \alpha_n^{-1}\big\}_{n=1}^{\infty}$.

Замечание 2. Мы можем рассматривать этот метод как обобщение метода НИМТ.

Замечание 3. С практической точки зрения применять этот метод регуляризации к любому компактному оператору нелегко. Однако в случае компактных операторов конечного ранга эту стратегию применять просто.

Используем сингулярные разложения (2) и (3). Тогда схему (8) можно также записать следующим образом:

$$\begin{aligned} x_n^m &= \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{\langle x_{n-1}^m, u_j \rangle}{(1+\alpha_n\sigma_j^2)^m} + \left(\frac{\alpha_n \overline{C}_m \sigma_j + \sigma_j \sum\limits_{i=2}^{m+1} C_{m+1}^i \alpha_n^i \sigma_j^{2(i-1)}}{(1+\alpha_n\sigma_j^2)^{m+1}} \right) \langle y, v_j \rangle \right] u_j \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{\langle x_{n-1}^m, u_j \rangle}{(1+\alpha_n\sigma_j^2)^m} + \left(\frac{(1+\alpha_n\sigma_j^2)^{m+1} - (1+\alpha_n\sigma_j^2)}{\sigma_j(1+\alpha_n\sigma_j^2)^{m+1}} \right) \langle y, v_j \rangle \right] u_j. \end{aligned} \tag{9}$$

Поскольку $Ax^+ = y$, мы имеем

$$x^{+}=\sum_{j=1}^{\infty}\left[\frac{\langle x^{+},u_j\rangle}{(1+\alpha_n\sigma_j^2)^m}+\sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{(1+\alpha_n\sigma_j^2)^{m+1}-(1+\alpha_n\sigma_j^2)}{\sigma_j(1+\alpha_n\sigma_j^2)^{m+1}}\right)\langle y,v_j\rangle\right]u_j.$$

Следовательно, из формулы (9) получаем

$$x^{+}-x_n^m=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\left\langle x^{+}-x_{n-1}^m,u_j\right\rangle}{(1+\alpha_n\sigma_j^2)^m}u_j$$

и с использованием рекуррентности имеем

$$x^{+}-x_n^m=\sum_{j=1}^{\infty}\varphi_{n,m}(\sigma_j^2)\left\langle x^{+},u_j\right\rangle u_j, \tag{10}$$

где $\varphi_{n,m}(\sigma)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{(1+\alpha_i\sigma)^m}$. Также получаем вычисленное решение x_n:

$$x_n^m=R_{n,m}y=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1-\varphi_{n,m}(\sigma_j^2)}{\sigma_j}\langle y,v_j\rangle u_j.$$

Для случая, когда правая часть y задается только измерениями, n-й шаг итерационного приближенного решения $x_n^{\delta,m}$ определяется следующим соотношением:

$$x_n^{\delta,m}=R_{n,m}y^{\delta}=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1-\varphi_{n,m}(\sigma_j^2)}{\sigma_j}\left\langle y^{\delta},v_j\right\rangle u_j. \tag{11}$$

Кроме того, простые расчеты показывают, что

$$x_n^{\delta,m}-x_n^m=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1-\varphi_{n,m}(\sigma_j^2)}{\sigma_j}\left\langle y^{\delta}-y,v_j\right\rangle u_j. \tag{12}$$

3. Сходимость

Здесь мы обсудим некоторые результаты по неявной итерационной схеме, предложенной в этой работе. Некоторые идеи доказательств, представленных в этом пункте, были адаптированы из работы Ханке и Гретча [15] для получения оценок ошибки.

Сначала предположим, что верны следующие условия, налагаемые на элементы последовательности $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$:

C1) последовательность $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ является возрастающей при $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=\infty$;

C2) существует постоянная $c>1$ такая, что

$$\gamma_n\le c\gamma_{n-1}, \tag{13}$$

где $\gamma_n=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i$.

Замечание 4. Условие C1 означает, что $\lim_{n\to\infty}\gamma_n=\infty$.

Например, предположим, что $\alpha_n=q^n$ $(n\ge 2)$ — геометрическая последовательность. Тогда условия C1 и C2 легко проверить для $q>1$ и $c=q+1$.

Пусть $y\in R(A)$, и предположим, что точное решение $x^{+}\in R\big((A^*A)^{\mu}\big)$ удовлетворяет исходному условию гладкости, т. е.

$$x^{+}=(A^*A)^{\mu}z,\quad \|z\|_X=\rho<\infty,\ \ \mu>0. \tag{14}$$

Лемма 1. *При исходном условии* (14) *мы получим*

$$\left\|x^+ - x_n^m\right\|_X \le \rho \sup_{\lambda\in[0,\infty)} \psi_{n,m}(\mu,\lambda), \tag{15}$$

где $\psi_{n,m}(\mu,\lambda) = \varphi_{n,m}(\lambda)\lambda^\mu$.

Доказательство. Используя условие (14) и соотношение (10), получим

$$\left\|x^+ - x_n^m\right\|_X^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \left(\varphi_{n,m}(\sigma_j^2)\sigma_j^{2\mu}\right)^2 |\langle z,u_j\rangle|^2 \le \max_j \left(\varphi_{n,m}(\sigma_j^2)\sigma_j^{2\mu}\right)^2 \sum_{j=1}^{\infty} |\langle z,u_j\rangle|^2 .$$

Используя последнюю формулу, имеем

$$\left\|x^+ - x_n^m\right\|_X \le \rho \sup_{\sigma\in[0,\infty)} \varphi_{n,m}(\sigma^2)\sigma^{2\mu} = \rho \sup_{\lambda\in[0,\infty)} \varphi_{n,m}(\lambda)\lambda^\mu.$$

Это завершает доказательство леммы 1. □

Теперь вернемся к функциям $\varphi_{n,m}$ и $\psi_{n,m}$, чтобы обсудить некоторые соотношения и максимальные значения этих функций. Ясно, что

$$\sup_{\lambda\in[0,\infty)} \varphi_{n,m}(\lambda) \le 1, \qquad \varphi'_{n,m}(\lambda) = \varphi_{n,m}(\lambda)\sum_{i=1}^{n} \frac{-m\alpha_i}{1+\alpha_i\lambda}, \qquad \varphi''_{n,m}(\lambda) \ge 0.$$

Поскольку $\varphi'_{n,m}$ является монотонно неубывающей на $[0,\infty)$, то $\varphi_{n,m}$ — выпуклая функция. Первую производную функции $\psi_{n,m}$ можно записать в виде

$$\psi'_{n,m}(\mu,\lambda) = \lambda^{\mu-1}\varphi_{n,m}(\lambda)\left(-\sum_{i=1}^{n}\frac{m\alpha_i\lambda}{1+\alpha_i\lambda} + \mu\right),$$

и несложный расчет показывает, что $\psi'_{n,m}(\lambda) = 0$, если и только если

$$f(\beta) = \frac{\mu}{m}, \tag{16}$$

где $\beta = \lambda^{-1}$ и $f(\beta) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\alpha_i}{\beta+\alpha_i}$. Пусть $\beta \in [0,\infty)$. Поскольку

$$f(0) = n, \qquad \lim_{\beta\to\infty} f(\beta) = 0, \quad f'(\beta) \le 0,$$

то уравнение (16) имеет единственное положительное решение μ_*, где $0 < \mu < mn$. Следовательно, мы получим

$$\sup_{\lambda\in[0,\infty)} \psi_{n,m}(\mu,\lambda) = \psi_{n,m}\left(\mu, \frac{1}{\mu_*}\right) \le \mu_*^{-\mu}. \tag{17}$$

Теперь рассмотрим решения уравнения (16) при $0 < \mu < mn$ на $(-\infty,0)\setminus\{-\alpha_j,$ $j = 1,2,\dots,n\}$. Если $\beta \in (-\alpha_{j+1}, -\alpha_j)$, и поскольку

$$\lim_{\beta \overset{>}{\to} -\alpha_{j+1}} f(\beta) = \infty, \qquad \lim_{\beta \overset{<}{\to} -\alpha_j} f(\beta) = -\infty, \quad f'(\beta) \le 0,$$

то уравнение (16) имеет единственное отрицательное решение $\mu_j \in (-\alpha_{j+1}, -\alpha_j)$.

Поскольку

$$\lim_{\beta\to 0} f(\beta)=n,\quad \lim_{\beta\overset{>}{\to}-\alpha_1} f(\beta)=\infty,\quad \lim_{\beta\to-\infty} f(\beta)=0,\quad \lim_{\beta\overset{<}{\to}-\alpha_n} f(\beta)=-\infty,$$

мы заключаем, что уравнение (16) не имеет решений в области $(-\infty,-\alpha_n)\cup(-\alpha_1,0)$.

Наконец, уравнение (16) имеет n решений ($\mu_*>0$, $\mu_j<0$, $j=1,2,\ldots,n-1$) на $\mathbb{R}\setminus\{-\alpha_j,\, j=1,2,\ldots,n\}$ и

$$\sum_{j=1}^{n-1}\mu_j\le-\gamma_{n-1}. \tag{18}$$

Уравнение (16) можно записать в эквивалентном виде: $P(\beta)=0$, где многочлен P задается следующим образом:

$$P(\beta)=\sum_{i=0}^{n}a_i\beta^i=\frac{\mu}{m}\prod_{k=1}^{n}(\beta+\alpha_k)-\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\prod_{\substack{k=1\\k\ne i}}^{n}(\beta+\alpha_k).$$

Используя тот факт, что сумма корней многочлена P равна $\frac{-a_{n-1}}{a_n}$, имеем

$$\mu_*+\sum_{j=1}^{n-1}\mu_j=\frac{m-\mu}{\mu}\gamma_n. \tag{19}$$

Лемма 2. *Если предположение* (14) *удовлетворяется для* $0<\mu\le m$ *и условия* C1, C2 *выполняются, то*

$$\left\|x^+-x_n^m\right\|_X\le\rho c'_{m,\mu}\gamma_n^{-\mu}, \tag{20}$$

где $c'_{m,\mu}=\left(\frac{2\mu c}{m}\right)^{\mu}$.

Доказательство. Предположим, что $0<\mu\le\frac{m}{2}$. Тогда $\frac{m-\mu}{\mu}\ge\frac{m}{2\mu}$. Используя (18) и (19), получим $\mu_*\ge\frac{m}{2\mu}\gamma_n+\gamma_{n-1}$, и при условии (13) мы можем записать $\mu_*\ge\frac{cm+2\mu}{2\mu c}\gamma_n\ge\frac{m}{2\mu c}\gamma_n$.

Для случая $\frac{m}{2}\le\mu\le m$ $\left(\frac{m}{2\mu}\le 1\right)$ при (18) и (19) мы имеем $\mu_*\ge\gamma_{n-1}\ge\frac{m}{2\mu}\gamma_{n-1}$, и при условии (13) мы имеем $\mu_*\ge\frac{m}{2\mu c}\gamma_n$.

Теперь предположим, что $0<\mu\le m$. Используя неравенство (17) и лемму 1, мы получим оценку (20), и доказательство леммы 2 завершено. $\square$

Лемма 3. *Если предположение* (14) *удовлетворяется для* $m<\mu<nm$ *и условия* C1, C2 *выполняются, то мы имеем*

$$\left\|x^+-x_n^m\right\|_X\le\rho c''_{m,\mu}\gamma_n^{-\mu}, \tag{21}$$

где $c''_{m,\mu}=\left(\frac{2\mu c^{\mu}}{m}\right)^{\mu}$.

Доказательство. Теперь рассмотрим два случая.

В первом случае пусть $\gamma_n\le\frac{m+2(\mu-m)}{2(\mu-m)}\gamma_{n-1}$. Используя (18) и (19), мы имеем $\mu_*\ge\frac{m}{2\mu}\gamma_{n-1}$. Используя условие (13) и неравенство (17), мы получим

$$\sup_{\lambda\in[0,\infty)} \psi_{n,m}(\mu,\lambda) \le \left(\frac{2c^{\mu}\mu}{m}\right)^{\mu} \gamma_n^{-\mu}. \tag{22}$$

Используя лемму 1, мы получим оценку (21).

Во втором случае докажем неравенство (22) с помощью рекуррентных соотношений и с помощью леммы 1 получим оценку (21). Для этого пусть $\gamma_n > \dfrac{m+2(\mu-m)}{2(\mu-m)}\gamma_{n-1}$. Тогда

$$\alpha_n > \frac{m}{2(\mu-m)}\,\gamma_{n-1}. \tag{23}$$

Теперь предположим, что $m < \mu \le 2m$, тогда $0 < \mu - m \le m$. Как при доказательстве леммы 2 имеем

$$\sup_{\lambda\in[0,\infty)} \psi_{n-1,m}(\mu-m,\lambda) \le \left(\frac{2\,(\mu-m)\,c}{m}\right)^{\mu-m} \gamma_{n-1}^{-\mu+m}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}\sup_{\lambda\in[0,\infty)} \psi_{n,m}(\mu,\lambda) &\le \sup_{\lambda\in[0,\infty)} \psi_{n-1,m}(\mu-m,\lambda) \sup_{\lambda\in[0,\infty)} \frac{\lambda^m}{(1+\alpha_n\lambda)^m}\\ &\le \left(\frac{2\,(\mu-m)\,c}{m}\right)^{\mu-m} \gamma_{n-1}^{-\mu+m} \left(\frac{1}{\alpha_n}\right)^{m}.\end{aligned}$$

Используем неравенство (23) и условие (13). Тогда

$$\begin{aligned}\sup_{\lambda\in[0,\infty)} \psi_{n,m}(\mu,\lambda) &\le \left(\frac{2\,(\mu-m)\,c}{m}\right)^{\mu-m} \gamma_{n-1}^{-\mu+m} \left(\frac{2(\mu-m)}{m}\gamma_{n-1}\right)^{m}\\ &\le \left(\frac{2}{m}\right)^{\mu} (\mu-m)^{\mu}\, c^{\mu-m}\gamma_{n-1}^{-\mu}\\ &\le \left(\frac{2}{m}\right)^{\mu} (\mu-m)^{\mu}\, c^{2\mu-m}\gamma_{n}^{-\mu}\\ &\le \left(\frac{2c^{\mu}\mu}{m}\right)^{\mu} \gamma_n^{-\mu}.\end{aligned}$$

Предположим, что неравенство (22) верно для $jm < \mu \le (j+1)m$ при $j+1 < n$. Пусть $(j+1)\,m < \mu \le (j+2)m$ при $j+2 < n$. Следовательно, $jm < \mu - m \le (j+1)m$. Таким образом,

$$\sup_{\lambda\in[0,\infty)} \psi_{n-1,m}(\mu-m,\lambda) \le \left(\frac{2\,(\mu-m)\,c^{\mu-m}}{m}\right)^{\mu-m} \gamma_{n-1}^{-\mu+m},$$

что подтверждается предположением. Следовательно,

$$\sup_{\lambda\in[0,\infty)} \psi_{n,m}(\mu,\lambda) \le \left(\frac{2\,(\mu-m)\,c^{\mu-m}}{m}\right)^{\mu-m} \gamma_{n-1}^{-\mu+m} \left(\frac{1}{\alpha_n}\right)^{m}.$$

Используя неравенство (23) и условие (13), получим

$$\begin{aligned}\sup_{\lambda\in[0,\infty)}\psi_{n,m}(\mu,\lambda) &\le \left(\frac{2\,(\mu-m)\,c^{\mu-m}}{m}\right)^{\mu-m}\gamma_{n-1}^{-\mu+m}\left(\frac{2(\mu-m)}{m}\gamma_{n-1}\right)^{m}\\ &\le \left(\frac{2}{m}\right)^{\mu}(\mu-m)^{\mu}\,c^{(\mu-m)^2}\gamma_{n-1}^{-\mu}\\ &\le \left(\frac{2c^{\mu}}{m}\right)^{\mu}(\mu-m)^{\mu}\,c^{(1-2m)\mu+m^2}\gamma_{n}^{-\mu}\\ &\le \left(\frac{2c^{\mu}\mu}{m}\right)^{\mu}\gamma_{n}^{-\mu}.\end{aligned}$$

Наконец, неравенство (22) верно для $m<\mu<nm$, что подтверждается рекуррентным соотношением. Это завершает доказательство леммы. □

Вследствие лемм 2 и 3 ошибка оптимального решения, полученного с точными данными для нашего метода, может быть выражена в виде $O\left(\left(\frac{\gamma_n^{-1}}{m}\right)^{\mu}\right)$, а ошибка оптимального решения, полученного с точными данными для метода НИМТ, задается путем $O\left(\gamma_n^{-\mu}\right)$. Следовательно, наш метод имеет преимущество при достаточно больших m в случае оценки погрешности с точными данными перед методом НИМТ [15].

Теперь рассмотрим случай, когда точные данные y можно заменить на y^{δ} в предлагаемой неявной схеме. В этом случае результат сходимости получается в следующей лемме.

Лемма 4. *Пусть* $\left\{x_n^{\delta,m}\right\}$ *— последовательность, сгенерированная неявной итерационной схемой* (8). *Используя приближенные данные, получим*

$$\left\|x_n^{\delta,m}-x_n^{m}\right\|_X \le \sqrt{m\gamma_n}\,\delta. \tag{24}$$

Доказательство. Из (12) получим

$$\begin{aligned}\left\|x_n^{\delta,m}-x_n^{m}\right\|_X^2 &= \sum_{j=1}^{\infty}\left(\frac{1-\varphi_{n,m}(\sigma_j^2)}{\sigma_j}\right)^2\left|\left\langle y^{\delta}-y,v_j\right\rangle\right|^2\\ &\le \sup_{\sigma\in[0,\infty)}\left(\frac{1-\varphi_{n,m}(\sigma^2)}{\sigma}\right)^2\sum_{j=1}^{\infty}\left|\left\langle y^{\delta}-y,v_j\right\rangle\right|^2\\ &\le \sup_{\lambda\in[0,\infty)}\left(\frac{1-\varphi_{n,m}(\lambda)}{\lambda}\right)\sup_{\lambda\in[0,\infty)}\left(1-\varphi_{n,m}(\lambda)\right)\left\|y^{\delta}-y\right\|_Y^2.\end{aligned}$$

Поскольку $0<1-\varphi_{n,m}(\lambda)\le 1$ при $\lambda\in[0,\infty)$, то, используя (4), имеем

$$\left\|x_n^{\delta,m}-x_n^{m}\right\|_X^2 \le \sup_{\lambda\in[0,\infty)}\left(\frac{1-\varphi_{n,m}(\lambda)}{\lambda}\right)\delta^2.$$

Используя свойство выпуклости $\varphi_{n,m}$, получим $\frac{1-\varphi_{n,m}(\lambda)}{\lambda}\le-\varphi'_{n,m}(0)=m\gamma_n$. Следовательно, мы можем получить оценку (24). □

Следующая теорема имеет решающее значение для сходимости нашей неявной итерационной схемы. Доказательство этой теоремы основано на леммах 2, 3 и 4.

Теорема 1. *Если предположение* (14) *удовлетворяется для* $0 < \mu < nm$ *и условия* C1, C2 *верны, то*

$$\left\|x_n^{\delta,m} - x^+\right\|_X \le \rho c_{m,\mu}\gamma_n^{-\mu} + \sqrt{m\gamma_n}\,\delta,$$

где $c_{m,\mu} = \begin{cases} \left(\dfrac{2\mu c}{m}\right)^{\mu}, & \text{если } 0 < \mu \le m, \\ \left(\dfrac{2\mu c^{\mu}}{m}\right)^{\mu}, & \text{если } m < \mu \le nm. \end{cases}$

Теорема 1 позволяет оценить наилучший порядок сходимости, который можно получить в нашей неявной схеме. В частности, если $n = n(\delta)$ такое, что $\lim_{\delta\to 0}\gamma_{n(\delta)} \to \infty$ и $\lim_{\delta\to 0}\sqrt{m\gamma_{n(\delta)}}\delta = 0$, то

$$\lim_{\delta\to 0}\left\|x_n^{\delta,m} - x^+\right\|_X = 0.$$

Например, если мы возьмем $n = n\,(\delta)$ такое, что $\gamma_{n(\delta)} \approx \dfrac{\delta^{\frac{-2}{2\mu+1}}}{m}$, то

$$\left\|x_n^{\delta,m} - x^+\right\|_X \le (\rho\bar{c}_\mu + 1)\,\delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}},$$

где $\bar{c}_\mu = \begin{cases} (2c\mu)^{\mu}, & 0 < \mu \le m, \\ (2c\mu^{\mu})^{\mu}, & 0 < \mu \le nm. \end{cases}$

В этом частном случае теоремы 1 мы получим порядок сходимости $O\left(\delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}}\right)$ при общем исходном условии (14), где $0 < \mu < nm$.

В случае априорного выбора (из примера после теоремы 1) мы имеем $m\gamma_{n^{\text{Новая}}} \approx \delta^{\frac{-2}{2\mu+1}}$ и $\gamma_{n^{\text{НИМТ}}} \approx \delta^{\frac{-2}{2\mu+1}}$. Таким образом, $n^{\text{Новая}} < n^{\text{НИМТ}}$; например, если $\alpha_j = q^j$ (где $q > 1$), то

$$n^{\text{Новая}} \lessapprox n^{\text{НИМТ}} + \frac{\log(m)}{\log(q)}.$$

Обычно стратегия выбора параметров в этом примере называется априорной стратегией выбора параметров, но апостериорная стратегия выбора параметров предпочтительнее априорной стратегии (см. [19]).

Для определения скорости сходимости мы используем апостериорную стратегию выбора параметров (7), которая описывается в следующем пункте.

4. Критерии остановки, основанные на принципе невязки

В этом пункте выберем число итераций $n^* = n^*(\delta)$ с использованием принципа невязки (7), где $x_{n^*}^{\delta}$ — регуляризованное решение. Для этого предположим, что

$$\left\|y^{\delta}\right\|_Y > \tau\delta. \tag{25}$$

Используя (11), получим

$$\left\|Ax_n^{\delta;m} - y^{\delta}\right\|_Y = \sqrt{\sum_{j=1}^{\infty}\left(\varphi_{n,m}(\sigma_j^2)\right)^2\left|\langle y^{\delta}, v_j\rangle\right|^2}\,.$$

Поскольку $x_0^{\delta,m} = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_{n,m}(\lambda) = 0$, мы имеем

$$\lim_{n\to 0} \left\|Ax_n^{\delta,m} - y^\delta\right\|_Y = \left\|y^\delta\right\|_Y \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \left\|Ax_n^{\delta,m} - y^\delta\right\|_Y = 0.$$

Функция $\varphi_{n,m} = \varphi_m(n)$ — строго убывающая для любого $n \in (0,\infty)$, поэтому существует последовательность чисел, для которой выполняется неравенство

$$\left\|Ax_n^{\delta,m} - y^\delta\right\|_Y \le \tau\delta.$$

Пусть n^* — первое появление этих чисел, т. е.

$$\left\|Ax_{n^*-1}^{\delta,m} - y^\delta\right\|_Y > \tau\delta \quad \text{и} \quad \left\|Ax_{n^*}^{\delta,m} - y^\delta\right\|_Y \le \tau\delta. \tag{26}$$

Поскольку

$$\|y - Ax_n^m\|_Y^2 = \sum_{j=1}^\infty \left(\varphi_{n,m}(\sigma_j^2)\right)^2 |\langle y, v_j\rangle|^2 \le \left(\sup_{\lambda\in[0,\infty)} \varphi_{n,m}(\lambda)\right)^2 \sum_{i=1}^\infty |\langle y, u_i\rangle|^2 \le \|y\|_Y^2 ,$$

мы заключаем, что

$$\|I - AR_{n,m}\| \le 1.$$

Следовательно,

$$\|y - AR_{n^*-1,m}y\|_Y \ge \left\|y^\delta - Ax_{n^*-1}^{\delta,m}\right\|_Y - \left\|\left(I - AR_{n^*-1,m}\right)\left(y - y^\delta\right)\right\|_Y \ge \tau\delta - \delta = (\tau-1)\delta.$$

Поэтому

$$\left\|\sum_{j=1}^\infty \varphi_{n^*-1,m}(\sigma_j^2)\,\langle y, v_j\rangle\, v_j\right\|_Y \ge (\tau-1)\delta.$$

Используем исходное условие (14) при $0 < \mu < nm$. Тогда

$$\left\|\sum_{j=1}^\infty \varphi_{n^*-1,m}(\sigma_j^2)\,\langle A(A^*A)^\mu z, v_j\rangle\, v_j\right\|_Y \ge (\tau-1)\delta,$$

$$\left\|\sum_{j=1}^\infty \varphi_{n^*-1,m}(\sigma_j^2)\sigma_j\sigma_j^{2\mu}\,\langle z, v_j\rangle\, v_j\right\|_Y \ge (\tau-1)\delta,$$

$$\sum_{j=1}^\infty \varphi_{n^*-1,m}(\sigma_j^2)\sigma_j^{4\mu+2}\,|\langle z, v_j\rangle|^2 \ge (\tau-1)^2\delta^2,$$

и ясно, что

$$\rho \sup_{\lambda\in[0,\infty)} \varphi_{n^*-1,m}(\lambda)\lambda^{\frac{2\mu+1}{2}} = \rho \sup_{\lambda\in[0,\infty)} \psi_{n^*-1,m}\left(\frac{2\mu+1}{2}, \lambda\right) \ge (\tau-1)\delta.$$

Используя те же аргументы, что и при доказательстве лемм 2, 3 и теоремы 1, имеем

$$\rho\, \widetilde{c}_{m,\mu}\, \gamma_{n^*-1}^{-\frac{2\mu+1}{2}} \ge (\tau-1)\delta, \tag{27}$$

где $\widetilde{c}_{m,\mu} = \begin{cases} \left(\dfrac{2\left(\frac{2\mu+1}{2}\right)c}{m}\right)^{\frac{2\mu+1}{2}}, & \text{если } 0 < \mu \le m - \dfrac{1}{2}, \\ \left(\dfrac{2\left(\dfrac{2\mu+1}{2}\right)c^{\frac{2\mu+1}{2}}}{m}\right)^{\frac{2\mu+1}{2}}, & \text{если } m - \dfrac{1}{2} < \mu \le nm - \dfrac{1}{2}. \end{cases}$

Лемма 5. *Предположим, что условия* C1, C2 *и* (25) *удовлетворены. Используя критерии остановки* (26) *при* $0 < \mu < nm - \frac{1}{2}$, *имеем*

$$\left\|x_{n^*}^{\delta,m} - x_{n^*}^{m}\right\|_X = O\Big(\delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}}\Big).$$

Доказательство. Используя неравенство (27) и условие C2, мы имеем

$$\begin{aligned} \rho\,\widetilde{c}_{m,\mu}\, c^{\frac{2\mu+1}{2}} \gamma_{n^*}^{-\frac{2\mu+1}{2}} &\geq \rho\,\widetilde{c}_{m,\mu}\, \gamma_{n^*-1}^{-\frac{2\mu+1}{2}} \geq (\tau-1)\delta, \\ \rho^{\frac{2}{2\mu+1}}\, \widetilde{c}_{m,\mu}^{\frac{2}{2\mu+1}}\, c\,(\tau-1)^{-\frac{2}{2\mu+1}}\, \delta^{-\frac{2}{2\mu+1}} &\geq \gamma_{n^*}, \\ \rho^{\frac{1}{2\mu+1}}\, \widetilde{c}_{m,\mu}^{\frac{1}{2\mu+1}} \sqrt{c}\,(\tau-1)^{-\frac{1}{2\mu+1}}\, \delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}} &\geq \sqrt{\gamma_{n^*}}\,\delta. \end{aligned}$$

Теперь, используя (24) из леммы 4, имеем

$$\left\|x_{n^*}^{\delta,m} - x_{n^*}^{m}\right\|_X \leq \widetilde{c}_{m,\mu}^{\frac{1}{2\mu+1}} \sqrt{cm}\,(\tau-1)^{-\frac{1}{2\mu+1}}\, \rho^{\frac{1}{2\mu+1}} \delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}}.$$

Доказательство леммы завершено. □

Теорема 2. *При предположениях леммы* 5 *мы получим следующий порядок сходимости:*

$$\left\|x_{n^*}^{\delta,m} - x^+\right\| = O\Big(\delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}}\Big).$$

Доказательство. Используя условие (14) и соотношение (10), получим

$$\begin{aligned} \left\|x^+ - x_{n^*}^{m}\right\|_X^2 &= \sum_{j=1}^{\infty} \Big(\varphi_{n^*,m}(\sigma_j^2)\sigma_j^{2\mu}\Big)^2 |\langle z, u_j\rangle|^2 \\ &= \sum_{j=1}^{\infty} \Big(\varphi_{n^*,m}(\sigma_j^2)\,|\langle z, u_j\rangle|\Big)^{\frac{2}{2\mu+1}} \Big(\varphi_{n^*,m}(\sigma_j^2)\,|\langle z, u_j\rangle|\Big)^{\frac{4\mu}{2\mu+1}} \sigma_j^{4\mu}. \end{aligned}$$

Используя неравенство Гельдера, получаем

$$\left\|x^+ - x_{n^*}^{m}\right\|_X^2 \leq \left[\sum_{j=1}^{\infty} U_j^2(n^*,m)\right]^{\frac{1}{2\mu+1}} \left[\sum_{j=1}^{\infty} U_j^2(n^*,m)\sigma_j^{4\mu+2}\right]^{\frac{2\mu}{2\mu+1}},$$

$$\left\|x^+ - x_{n^*}^{m}\right\|_X^2 \leq \left(\rho \sup_{\lambda\in[0,\infty)} \varphi_{n^*,m}(\lambda)\right)^{\frac{2}{2\mu+1}} \left[\sum_{j=1}^{\infty} U_j^2(n^*,m)\sigma_j^{4\mu+2}\right]^{\frac{2\mu}{2\mu+1}},$$

$$\left\|x^+ - x_{n^*}^{m}\right\|_X^2 \leq \rho^{\frac{2}{2\mu+1}} \left[\sum_{j=1}^{\infty} U_j^2(n^*,m)\sigma_j^{4\mu+2}\right]^{\frac{2\mu}{2\mu+1}},$$

где $U_j(n^*,m) = \varphi_{n^*,m}(\sigma_j^2)\,|\langle z, u_j\rangle|$.

Поскольку

$$\|y - Ax_{n^*}^m\|_Y^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_{n^*,m}^2(\sigma_j^2)\,|\langle y, v_j\rangle|^2 = \sum_{j=1}^{\infty} \varphi_{n^*,m}^2(\sigma_j^2)\big|\langle A(A^*A)^\mu z, v_j\rangle\big|^2$$
$$= \sum_{j=1}^{\infty} U_j^2(n^*, m)\sigma_j^{4\mu+2},$$

имеем

$$\left\|x^+ - x_{n^*}^m\right\|_X \le \rho^{\frac{1}{2\mu+1}} \left\|y - Ax_{n^*}^m\right\|_Y^{\frac{2\mu}{2\mu+1}}. \tag{28}$$

Видно, что

$$\|y - Ax_{n^*}^m\|_Y = \left\|\left(I - AR_{n^*,m}\right)(y - y^\delta) + y^\delta - AR_{n^*,m}y^\delta\right\|_Y$$
$$\le \left\|I - AR_{n^*,m}\right\|\delta + \left\|y^\delta - AR_{n^*,m}y^\delta\right\|,$$

и, используя (26), получаем

$$\|y - Ax_{n^*}^m\|_Y \le (1+\tau)\delta.$$

Таким образом, из неравенства (28) следует, что

$$\left\|x^+ - x_{n^*}^m\right\|_X \le \rho^{\frac{1}{2\mu+1}}(1+\tau)^{\frac{2\mu}{2\mu+1}}\delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}}.$$

Аналогично лемме 5 имеем следующий результат:

$$\left\|x^+ - x_{n^*}^{\delta,m}\right\|_X \le \left\|x^+ - x_{n^*}^m\right\|_X + \left\|x_{n^*}^{\delta,m} - x_{n^*}^m\right\|_X \le c(m,\mu,\tau)\rho^{\frac{1}{2\mu+1}}\delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}},$$

где $c(m,\mu,\tau) = \widetilde{c}_{m,\mu}^{\frac{1}{2\mu+1}}\sqrt{cm}\,(\tau-1)^{-\frac{1}{2\mu+1}} + (1+\tau)^{\frac{2\mu}{2\mu+1}}$.

Следовательно, теорема 2 доказана. □

При доказательстве теоремы 2 предположения о носителе μ и элементе z в исходном условии гладкости (14) необходимы для получения оптимального порядка $O\Big(\delta^{\frac{2\mu}{2\mu+1}}\Big)$. На практике их значения не нужны, так как они отсутствуют в критерии остановки (26). Таким образом, если информации о точном решении нет, итерации нашей неявной схемы прекращаются при использовании принципа невязки (26). Эта сходимость неявной схемы (8) гарантирована благодаря ее свойству регуляризации.

Замечание 5. Важным условием критерия остановки (26) является убывание функции $\varphi_{n,m} = \varphi_m(n)$. Однако функция $\varphi_{n,m}$ обычно быстро увеличивается с ростом m, когда m большое. Поэтому наш метод сходится быстрее, чем метод НИМТ.

В случае апостериорной стратегии выбора параметров (26) на основании замечания 5 мы можем показать, что наш метод имеет небольшое число итераций по сравнению с методом НИМТ.

5. Численные эксперименты

Чтобы проанализировать эффективность нашей неявной схемы по сравнению со схемой НИМТ, мы используем несколько тестовых примеров из инструментов регуляризации Хансена (см. [20]). Эти численные тесты реализованы в программном обеспечении Matlab R2015b. Большинство задач этого пакета — это дискретизации интегральных уравнений Фредгольма первого рода, которые, как правило, плохо обусловлены. Этот пакет Matlab используется для решения задач с плохо обусловленными матрицами $A \in \mathbb{R}^{k\times k}$ с правыми частями $b \in \mathbb{R}^k$ и верными решениями $x^+ \in \mathbb{R}^k$.

Число обусловленности матрицы A определяет чувствительность решения к малым возмущениям входных данных, т. к. $\mathrm{Cond}(A) = \frac{\sigma_1}{\sigma_k}$.

Обычно линейная система алгебраических уравнений называется плохо обусловленной, если число обусловленности большое.

Таблица 1 показывает, что число обусловленности $\mathrm{Cond}(A)$ большое для всех тестовых задач, что подтверждает чувствительность всех этих задач, т. е. эти тестовые задачи, как правило, очень плохо обусловлены.

Таблица 1. Число обусловленности матрицы A для всех тестовых задач, где $k = 1000$

Задача	baart	deriv2(1, 2, 3)	foxgood
Cond(A)	1.0697×10^{18}	1.2180×10^{6}	4.7546×10^{17}
Задача	heat	phillips	shaw
Cond(A)	9.4865×10^{17}	2.6414×10^{10}	7.8589×10^{16}

Во всех тестах относительная ошибка используется для оценивания точности приближенных решений. Эта относительная ошибка определяется выражением $\dfrac{\|x^\delta_{n^*} - x^+\|_2}{\|x^+\|_2}$, где $x^\delta_{n^*}$ — решение, вычисленное с использованием любой схемы (Новая, НИМТ), вектор с ошибками b^δ задается как $b^\delta = b + \dfrac{\varepsilon e\,\|b\|_2}{\|e\|_2}$ при $e = \mathrm{randn}(\mathrm{size}(b))$, а ε — уровень шума.

Вычислим решения следующим образом:

$$x_n^{\text{Новая}} = x_n^{\delta,m} = \sum_{j=1}^{k} F_{n,m}(\sigma_j^2)\langle b^\delta, v_j\rangle u_j, \qquad x_n^{\text{НИМТ}} = x_n^{\delta,1} = \sum_{j=1}^{k} F_{n,1}(\sigma_j^2)\langle b^\delta, v_j\rangle u_j, \quad (29)$$

где $F_{n,m}(\sigma^2) = \dfrac{1 - \varphi_{n,m}(\sigma^2)}{\sigma}$ и $(\sigma_j,\, u_j,\, v_j)$ — сингулярная система A.

На основании (29) можно утверждать, что формулы для этих двух методов почти одинаковы. Таким образом, число арифметических операций на одну итерацию нового метода и метода НИМТ практически одинаковое.

Во всех экспериментах мы берем $\alpha_n = (1.5)^n$ в новой неявной схеме и $\theta_n = (1.5)^{-n}$ в схеме НИМТ. В критерии остановки, основанном на (26), мы берем уровень остановки $\tau = 1.0001$.

В табл. 2, 3 представлены средние значения относительных ошибок, процессорного времени и итераций остановки в вычисленных решениях более 100 прогонов для нескольких задач из инструментов регуляризации при $k = 1000$ и уровнях шума 1 % и 10 %. Видно, что новая неявная схема дает наименьшее среднее время и наименьшее среднее число итераций для всех рассматриваемых задач и уровней шума. Можно также сказать, что относительные ошибки всегда одинаковы, за исключением некоторых случаев, когда наша неявная схема лучше.

В табл. 2, 3 использованы следующие обозначения: CPU — процессорное время в секундах, RE — относительная ошибка.

Таблица 2. Численные результаты для нескольких задач из инструментов регуляризации при $k = 1000$ и уровне шума 10 %

Задача	Новая ($m = 15$)			Новая ($m = 5$)			НИМТ		
	n^*	CPU	RE	n^*	CPU	RE	n^*	CPU	RE
1. baart	6	0.21	0.18	8	0.26	0.18	12	0.35	0.18
2. deriv2(1)	19	0.56	0.26	21	0.59	0.26	26	0.65	0.27
3. deriv2(2)	19	0.58	0.25	22	0.62	0.25	26	0.71	0.25
4. deriv2(3)	14	0.43	0.06	16	0.46	0.06	20	0.51	0.07
5. foxgood	6	0.31	0.04	9	0.34	0.04	13	0.35	0.04
6. heat	13	0.34	0.17	16	0.42	0.17	20	0.56	0.17
7. phillips	2	0.06	0.04	2	0.06	0.04	3	0.09	0.05
8. shaw	2	0.09	0.16	3	0.10	0.16	6	0.14	0.16

Таблица 3. Численные результаты для нескольких задач из инструментов регуляризации при $k = 1000$ и уровне шума 1 %

Задача	Новая ($m = 15$)			Новая ($m = 5$)			НИМТ		
	n^*	CPU	RE	n^*	CPU	RE	n^*	CPU	RE
1. baart	10	0.29	0.12	12	0.34	0.12	15	0.60	0.12
2. deriv2(1)	25	0.75	0.19	28	0.81	0.19	33	0.91	0.19
3. deriv2(2)	26	0.72	0.18	28	0.82	0.18	33	0.96	0.19
4. deriv2(3)	18	0.52	0.02	21	0.59	0.02	25	0.77	0.02
5. foxgood	14	0.41	0.01	18	0.51	0.01	21	0.56	0.02
6. heat	18	0.43	0.07	21	0.54	0.07	25	0.68	0.07
7. phillips	2	0.06	0.01	3	0.08	0.01	5	0.12	0.01
8. shaw	9	0.23	0.06	13	0.34	0.06	17	0.43	0.06

Большинство стандартных средств оптимизации включают таблицы, которые показывают эффективность каждого метода в каждом тесте для ряда показателей, таких как процессорное время или количество итераций для алгоритмов, где под итерацией подразумевается сопоставимый объем работы. Было бы неправильно не использовать такие таблицы для небольших наборов тестов, но для больших наборов тестов они могут оказаться чрезмерными. В любом случае интерпретация данных этих таблиц часто вызывает разногласия. Для более подробной информации читатель может обратиться к [21–23]. Профили эффективности (см. [21]) позволяют увидеть разницу в эффективности многих методов без произвольных изменений параметров или удаления слабых решений из данных. Чтобы показать эффективность этих схем, мы будем использовать средства из [21].

Тестовые задачи, используемые в этих экспериментах, имеют размерности 100, 200, 300, 400, 500, 600, 700, 800, 900 и 1000 (для задач 1–8 в табл. 2), а уровни шума 25%, 15%, 10%, 5%, 1%, 0.5% и 0.1%.

Профили эффективности нового итерационного метода с различными значениями m и схемы НИМТ, определяемые по процессорному времени, и профили эффективности на основе требуемого числа итераций показаны на рисунке 1.

Из рис. 1 ясно, что новая схема имеет наилучшую вероятность $P(f)$ по отношению к схеме НИМТ. Поскольку на этих профилях эффективности интерес для нас представляет лучшая схема, имеющая наибольшую эффективность, наш итерационный метод обращает на себя внимание. Кроме того, когда число m больше, наша схема имеет большую вычислительную эффективность, чем для небольших чисел m.

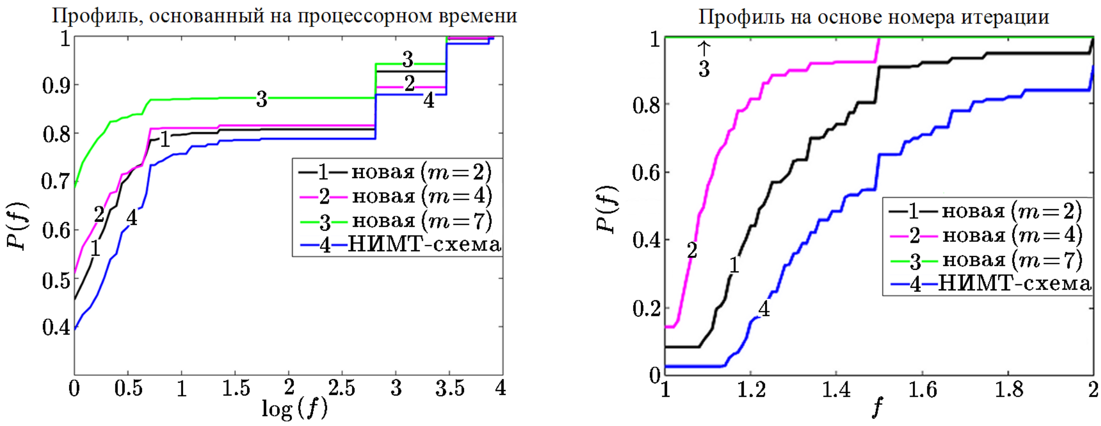


Рис. 1. Профили эффективности

5.1. Устранение размытости изображений

Задача восстановления высококачественных фотографий из зашумленных и размытых наблюдений называется задачей устранения размытости изображений. Размытость на астрономических изображениях, например, вызывается механическим или физическим процессом.

Эта задача устранения размытости может быть описана линейной системой $Ax = b$, где $A \in \mathbb{R}^{N\times N}$ — матрица размытия, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$ ($b = \mathrm{vect}(B) \in \mathbb{R}^N$ и $N = n \times m$) — записанное размытое изображение, а $X \in \mathbb{R}^{n\times m}$ ($x = \mathrm{vect}(X) \in \mathbb{R}^N$) — желаемое четкое изображение. Функцию рассеяния точек (ФРТ) для размытости в вычисленных примерах можно охарактеризовать как двумерную функцию Гаусса, а элементы открытого массива ФРТ имеют вид

$$P_{ij} = \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{i-k}{s}\right)^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{j-l}{s}\right)^2\right),$$

где матрица $P \in \mathbb{R}^{n_1\times m_1}$ — массив ФРТ и (k, l) — центр P. Предположим, что ФРТ — сепарабельная функция, а налагаемые граничные условия — нулевые (см., например, [24] для более подробной информации).

Следующие эксперименты иллюстрируют применение нашей неявной схемы для восстановления двумерных изображений с размытостью и гауссовским белым шумом, т. е.

$$E = \mathrm{randn}(\mathrm{size}(B^{\mathrm{exact}})), \qquad B = B^{\mathrm{exact}} + \varepsilon\frac{\|B^{\mathrm{exact}}\|_F}{\|E\|_F}E,$$

где $\|.\|_F$ — норма Фробениуса и ε — уровень шума.

Во всех тестах возьмем $P \in \mathbb{R}^{35\times 35}$ и $s = 19.15$.

Тест 1: рассмотрим тестовое изображение chest-xray-vandy, которое представлено массивом из 493×600 пикселей с уровнем шума 0.1 %. Рисунки 2 и 3 показывают подлинное изображение X, наблюдаемое изображение B и соответствующие изображения, восстановленные по новой схеме с различными значениями m и изображения, восстановленные по схеме НИМТ.

Тест 2: В этом тесте мы использовали нашу схему и схему НИМТ для устранения размытости текстового изображения. Это изображение представлено массивом из 256×256 пикселей. Рисунки 4 и 5 показывают подлинное изображение X, наблюдаемое изображение B и изображения, полученные при уровнях шума 0.1 % и 0.125 %.

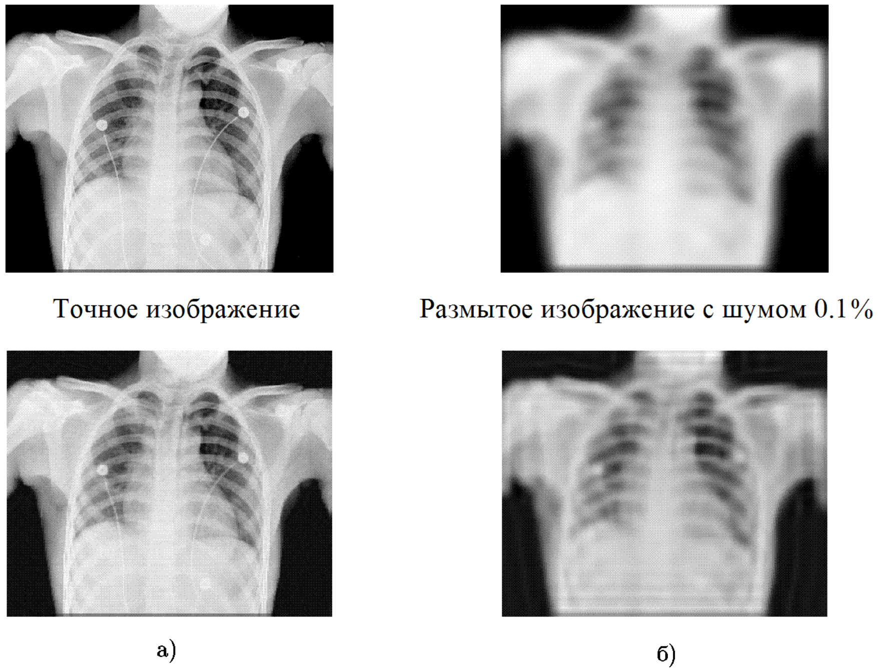


Рис. 2. Изображение, восстановленное за 8 итераций по новой схеме при $m = 1000$ (а) и схеме НИМТ (б)

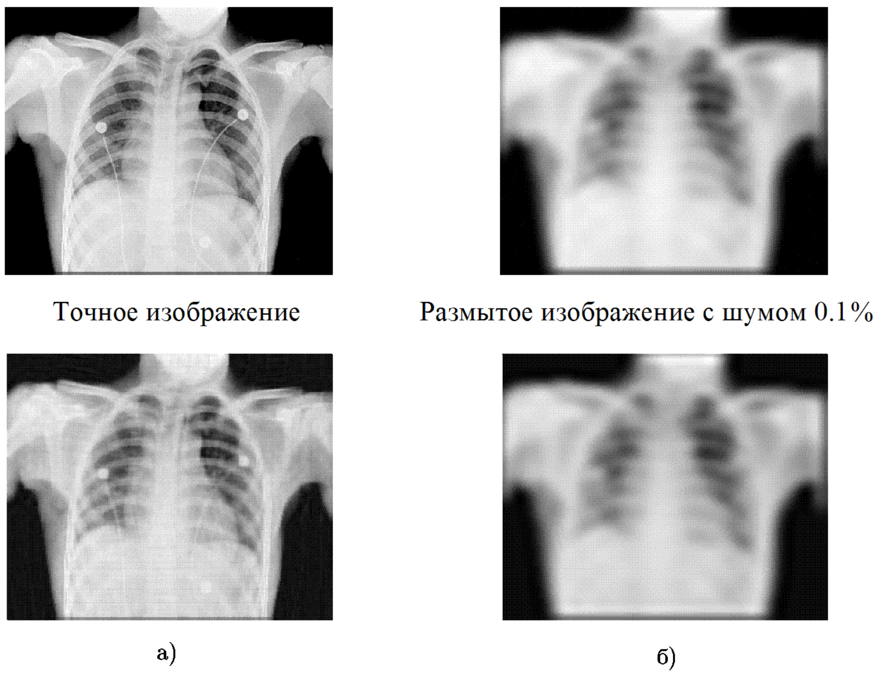
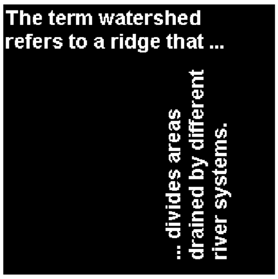
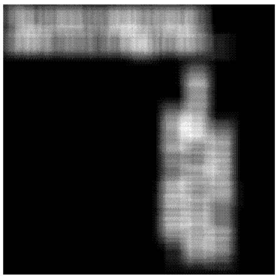


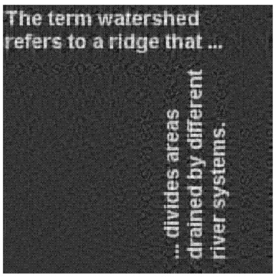
Рис. 3. Изображение, восстановленное за 2 итерации по новой схеме при $m = 2000$ (а) и схеме НИМТ (б)



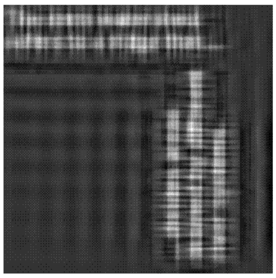
Точное изображение



Размытое изображение с шумом 0.1%

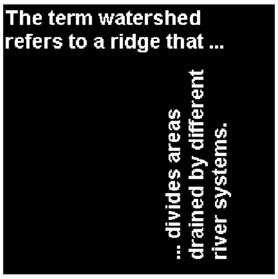


а)

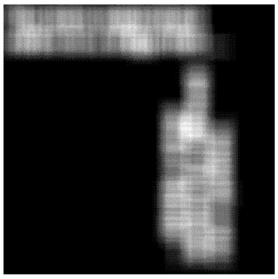


б)

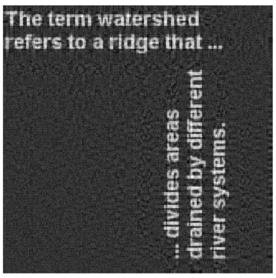
Рис. 4. Изображение, восстановленное за 12 итераций по новой схеме при $m = 100$ (а) и схеме НИМТ (б)



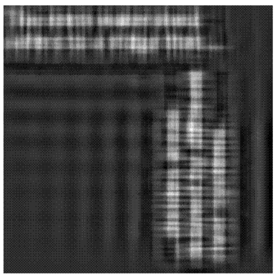
Точное изображение



Размытое изображение с шумом 0.1%



а)



б)

Рис. 5. Изображение, восстановленное за 11 итераций по новой схеме при $m = 1000$ (а) и схеме НИМТ (б)

Из рисунков 2–5 видно, что новая неявная схема имеет более высокую скорость сходимости, чем схема НИМТ. Кроме того, если m больше, наша схема имеет более высокую скорость сходимости.

6. Выводы

В статье описана и проанализирована простая неявная схема решения линейных некорректных операторных уравнений первого рода с компактными операторами. Численные результаты показывают, что предложенная неявная схема может конкурировать со схемой НИМТ для решения ряда линейных некорректных задач. Теоретически имеется оптимальное правило остановки итераций. Априорная и апостериорная стратегии выбора параметров регуляризации используются для доказательства теоретических оценок ошибки. С точки зрения достижения той же точности, в целом, классическая схема НИМТ требует больше итераций и больше времени, чем наша схема. Численные эксперименты показывают, что теоретические результаты эффективны, а предложенная неявная схема имеет ряд преимуществ перед схемой НИМТ с точки зрения числа повторений и использования процессорного времени. Кроме того, численные эксперименты показывают, что наш метод можно использовать для решения задач устранения размытости. Приведенные выше численные эксперименты показывают, что наш метод является лучшим при сравнении с методом НИМТ.

Литература

1. Inverse and Ill-posed Problems / H.W. Engl, C.W. Groetsch. — Academic Press, 2014. — (Notes and Reports in Mathematics in Science and Engineering; 4).
2. **Kabanikhin S.I.** Inverse and Ill-posed Problems. Theory and Applications // Inverse and Ill-posed Problems Series. — Vol. 55. — Berlin, Boston: De Gruyter, 2011.
3. **Nair M.T.** Linear Operator Equations: Approximation and Regularization. — Singapore: World Scientific, 2009.
4. **Ceng L.-C., Ansari Q.H., Wen C.-F.** Multi-step implicit iterative methods with regularization for minimization problems and fixed point problems // J. of Inequalities and Applications. — 2013. — Vol. 1. — P. 1–26.
5. **Laurent G.** Iterative thickness regularization of stratigraphic layers in discrete implicit modeling // Mathematical Geosciences. — 2016. — Vol. 48, № 7. — P. 811–833.
6. **Shi B., Pang Z.-F., Yang Y.-F.** A projection method based on the splitting Bregman iteration for the image denoising // J. of Applied Mathematics and Computing. — 2012. — Vol. 39, № 1. — P. 533–550.
7. **Van Hieu D., Anh P.K., Muu L.D., Strodiot J.J.** Iterative regularization methods with new stepsize rules for solving variational inclusions // J. of Applied Mathematics and Computing. — 2022. — Vol. 68, № 1. — P. 571–599.
8. **Xiao C., Deng Y.** A new Newton–Landweber iteration for nonlinear inverse problems // J. of Applied Mathematics and Computing. — 2011. — Vol. 36, № 1. — P. 489–505.
9. **Han G., Qu G., Jiang M.** Relaxation strategy for the Landweber method // Signal Processing. — 2016. — Vol. 125. — P. 87–96.
10. **Yang F., Ren Y.-P., Li X.-X., Li D.-G.** Landweber iterative method for identifying a space-dependent source for the time-fractional diffusion equation // Boundary Value Problems. — 2017. — P. 1–19.

11. **Konstantinova Y., Liskovets O.** The gradient method with variable step for equations of the 1st kind // Vestn. Belorussk. un-ta. Ser. fiz., matem. — 1974. — Vol. 2. — P. 45–49.
12. **Matysik O., Van Hulle M.M.** Simple-iteration method with alternating step size for solving operator equations in Hilbert space // J. of Computational and Applied Mathematics. — 2016. — Vol. 300. — P. 290–299.
13. **Neubauer A.** On Nesterov acceleration for Landweber iteration of linear ill-posed problems // J. of Inverse and Ill-posed Problems. — 2017. — Vol. 25, № 3. — P. 381–390.
14. **Xiong X., Xue X., Qian Z.** A modified iterative regularization method for ill-posed problems // Appl. Numerical Mathematics. — 2017. — Vol. 122. — P. 108–128.
15. **Hanke M., Groetsch C.W.** Nonstationary iterated Tikhonov regularization // J. of Optimization Theory and Applications. — 1998. — Vol. 98, № 1. — P. 37–53.
16. **Huang G., Reichel L., Yin F.** Projected nonstationary iterated Tikhonov regularization // BIT Numerical Mathematics. — 2016. — Vol. 56, № 2. — P. 467–487.
17. **Jin Q., Zhong M.** Nonstationary iterated Tikhonov regularization in Banach spaces with uniformly convex penalty terms // Numerische Mathematik. — 2014. — Vol. 127, № 3. — P. 485–513.
18. **Vasin V.V., Ageev A.L.** Ill-Posed Problems with A Priori Information. — Berlin, Boston: De Gruyter, 2013.
19. **De Hoog F.** Review of Fredholm equations of the first kind // The Application and Numerical Solution of Integral Equations / R.S. Anderssen, F.R. de Hoog and M.A. Lukas. — 1980. — P. 119–134.
20. **Hansen P.C.** Regularization tools version 4.0 for Matlab 7.3. // Numerical Algorithms. — 2007. — Vol. 46, № 2. — P. 189–194.
21. **Dolan E.D., Moré J.J.** Benchmarking optimization software with performance profiles // Mathematical Programming. — 2002. — Vol. 91, № 2. — P. 201–213.
22. **Gould N., Scott J.** A note on performance profiles for benchmarking software // ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS). — 2016. — Vol. 43, № 2. — P. 1–5.
23. **Rojas-Labanda S., Stolpe M.** Benchmarking optimization solvers for structural topology optimization // Structural and Multidisciplinary Optimization. — 2015. — Vol. 52, № 3. — P. 527–547.
24. **Hansen P.C., Nagy J.G., O'Leary D.P.** Deblurring images: matrices, spectra, and filtering // J. of Electronic Imaging. — Philadelphia: SIAM, 2006. — ID-number 29938164.

Поступила в редакцию 21 октября 2022 г.
После исправления 9 ноября 2022 г.
Принята к печати 30 января 2023 г.