

УДК 622.028: 620.173.24

**УЧЕТ КОНТАКТНОГО ТРЕНИЯ В ЗАДАЧЕ
О РАЗРУШЕНИИ ГОРНЫХ ПОРОД СЖАТИЕМ**

Л. М. Васильев, Д. Л. Васильев

*Институт геотехнической механики им. Н.С. Полякова НАН Украины,
E-mail: vdl_2007@mail.ru,
ул. Симферопольская, 2а, 49005, г. Днепрпетровск, Украина*

Разработан аналитический метод расчёта предела прочности на сжатие и построения диаграмм “нормальное напряжение – продольная деформация” при разрушении образцов с использованием экспериментальных значений трёх показателей свойств горных пород – предела сопротивляемости сдвигу, коэффициентов внутреннего и внешнего трения. Эти показатели свойств могут быть простыми способами установлены экспериментально в условиях горных предприятий. Достоинством метода является его доступность и оперативность получения исходных данных для построения диаграмм “напряжение – продольная деформация” и определения предела прочности горных пород непосредственно в производственных условиях на горных предприятиях.

Горная порода, предел прочности, разрушение, трещина, диаграмма “напряжение – деформация”

Одной из важных информационных характеристик, необходимых для управления напряженно-деформированным состоянием массива горных пород, является запредельная кривая “напряжение – деформация”, по которой определяются предел прочности и остаточная прочность пород.

В 60-е годы прошлого столетия в бывшем СССР и за рубежом для получения данных по пределу прочности и запредельным кривым создавались специальные прессы, оснащенные необходимой аппаратурой для регистрации значений напряжений и перемещений. Такие прессы имелись в отдельных НИИ: ВНИМИ, ИГТМ НАНУ, ИФГП НАНУ, ИГД им. Скочинского, ИГМОН НАН Киргизстана и др. Но они требуют высококвалифицированного обслуживания и находятся вдали от горных предприятий, где как раз и нужна оперативная информация о свойствах горных пород. Поэтому необходимы разработки методов аналитического построения упомянутых кривых на основе свойств горных пород, определяемых более простыми способами, доступными для лабораторий горных предприятий. Такими показателями являются: предел сопротивления сдвигу, коэффициенты контактного и внутреннего трения.

Прежде чем подойти к разработке метода аналитического построения запредельных кривых, рассмотрим геомеханическую модель разрушения образцов горных пород при сжатии. Отметим, что при описании деформирования и разрушения горных пород применяются внешнее (контактное) и внутреннее трения, ориентирующие на критерий Кулона [1, 2]. В критерии Кулона не учитывается контактное трение, попытаемся его учесть. Рассмотрим формулу Кулона

$$\tau_{\alpha} = \tau_{\alpha} - \mu \sigma_{\alpha} \leq k_n, \quad (1)$$

где τ_3 , τ_α , σ_α — соответственно эффективное, максимальное касательное и нормальное напряжения на наклонной площадке; μ — коэффициент внутреннего трения; k_n — предел прочности материала на сдвиг. Параметр τ_3 в (1) есть эффективное касательное напряжение, которому противодействует сопротивление k_n сдвигу внутри материала. При равенстве этих силовых параметров наступает предельное равновесие, а площадки, на которых достигается такое равновесие, называются площадками скольжения или линиями скольжения (ЛС) [3, 4].

Объединим разработки по механике горных пород, учитывающие внутреннее трение, и теорию деформирования пластичных материалов, в которой имеются решения с учетом контактного трения. Покажем, что метод линий скольжения позволяет с использованием известных граничных условий на контактной поверхности получить условие состояния материала, связывающее продольное σ_y и горизонтальное (поперечное) σ_x напряжения с характеристиками материала: пределом сопротивления сдвигу, коэффициентами внешнего трения f на контактной площадке и внутреннего трения μ на площадке линии скольжения ξ и η . При этом принимаем, что материал в вершине трещины, характеризующей разрушение, подчиняется закону Гука [5].

На рис. 1 изображен сжимаемый образец и линии скольжения ξ и η . Выберем линии ξ_1 и η_1 в левой части образца так, чтобы в их системе главное сжимающее нормальное напряжение σ_y проходило внутри элемента, образованного этими линиями. При таком выборе обозначений направление касательного усилия, характеризующего сопротивление материала сдвигу, на стороне ξ_1 равновесного треугольного элемента получается поворотом внешнего сжимающего напряжения σ_α против часовой стрелки. Направление касательного усилия, приложенного к стороне элемента η_1 , получается поворотом внешнего сжимающего напряжения σ_α по часовой стрелке. Угол наклона семейства линий ξ_1 относительно оси абсцисс Ox обозначим через α . Угол наклона линий семейства η_1 к оси Ox равен $\pi - \alpha$. Контактные касательные усилия направлены вдоль координатных осей, положительными считаются сжимающие нормальные напряжения. То, что боковые поверхности образца вследствие деформирования могут иметь выпуклую форму, отразим условием — в угловых точках образца имеет место правило парности касательных напряжений.

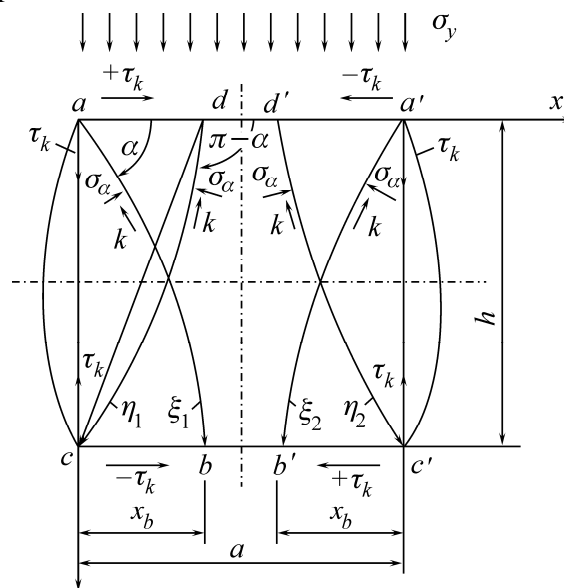


Рис. 1. Схема линий скольжения в образце при его усеченно-клиновой форме разрушения

Воспользуемся теперь формулами преобразований [6]:

$$\tau_{\alpha} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_k \cos 2\alpha, \quad (2)$$

$$\sigma_{\alpha} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_k \sin 2\alpha, \quad (3)$$

где $\tau_k = f\sigma_y$ — контактное касательное напряжение.

Подстановка (2), (3) в (1) дает

$$\tau_{\alpha} = -\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \sin 2\alpha + \tau_k \cos 2\alpha - \mu \left(\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \cos 2\alpha - \tau_k \sin 2\alpha \right). \quad (4)$$

Здесь τ_{α} есть функция угла α . Величина τ_{α} будет иметь максимальное значение (приравнявая к нулю производную) в выбранной координатной системе, если

$$\alpha = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{(\sigma_x - \sigma_y) - 2\mu\tau_k}{\mu(\sigma_x - \sigma_y) + 2\tau_k} \right). \quad (5)$$

Используя (5), находим значения $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$ и соответственно τ_{α} :

$$\tau_{\alpha} = \frac{1}{2} \sqrt{(1 + \mu^2)((\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_k^2)} - \frac{\mu(\sigma_x + \sigma_y)}{2}. \quad (6)$$

Отметим, что формула (6) использовалась также при расчете напряжений в [7].

Когда напряжение τ_{α} достигает предельного значения сопротивления сдвигу k_n , начинается разрушение и образуется трещина. На основании (6) можно получить формулу для расчета горизонтальных напряжений [8]:

$$\sigma_x = \frac{2(k + \mu\sigma_y)}{\cos \rho} (\sin \rho - \sqrt{1 - b^2}) + \sigma_y, \quad (7)$$

где $\rho = \operatorname{arctg} \mu$ — угол внутреннего трения материала;

$$b = \frac{\tau_k}{k + \mu\sigma_y}. \quad (8)$$

Определим предельное вертикальное нормальное напряжение. С помощью выражений для функций $\sin 2\alpha$ и $\cos 2\alpha$ (5) преобразуем (2):

$$\tau_{\alpha} = \frac{\cos \rho}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_k^2}. \quad (9)$$

Продифференцируем (3) по α :

$$\frac{d\sigma_{\alpha}}{d\alpha} = (\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\alpha - 2\tau_k \cos 2\alpha.$$

Преобразуем это выражение с помощью (5) к виду

$$\frac{d\sigma_{\alpha}}{d\alpha} = -\cos \rho \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_k^2}. \quad (10)$$

Из сравнения (9) и (10) находим

$$\frac{d\sigma_{\alpha}}{d\alpha} = -2\tau_{\alpha}. \quad (11)$$

Согласно критерию Кулона, $\tau_\alpha = k + \mu\sigma_\alpha$. После подстановки этого выражения в (11) получим дифференциальное уравнение равновесного состояния материала вдоль линии ξ_1 :

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -2(k + \mu\sigma_\alpha). \quad (12)$$

Аналогично поступаем с выражениями напряжений на линии скольжения η_1 , угол наклона которой равен $\pi - \alpha$. В результате имеем

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = 2(k + \mu\sigma_\alpha). \quad (13)$$

Отметим, что если $\mu = 0$, то выражения (12) и (13) сводятся к известным условиям Генки [5].

В механике горных пород [3, 4] предполагается, что развитие максимальных деформаций, в том числе и разрушение, идет по ЛС ξ или η (рис. 1). Предположим, что развитие трещины идет по ЛС ξ_1 из точки a в точку b . На ЛС ξ_1 в вершине трещины эффективные касательные напряжения равны пределу прочности k_n , а в точке b эти напряжения k_b не достигают значения k_n , т. е. $k_b < k_n$. Они будут равны k_n , когда вершина трещины дойдет до точки b . Это соответствует локальному подходу к разрушению в вершине трещины [4].

Рассмотрим решение (12) на ЛС ξ_1 между точками a и b (рис. 1):

$$\int_{\sigma_{\alpha_b}}^{\sigma_{\alpha_a}} \frac{d(k + \mu\sigma_\alpha)}{\mu} = -2 \int_{\alpha_b}^{\alpha_a} d\alpha,$$

отсюда

$$\frac{k_b + \mu\sigma_{\alpha_b}}{k_a + \mu\sigma_{\alpha_a}} = \exp(-2\mu\alpha_{ba}). \quad (14)$$

Выражение в левой части, исходя из критерия Кулона, представляет собой отношение внешних активных касательных напряжений в точках b и a , т. е. $\tau_{\alpha_b}/\tau_{\alpha_a}$.

Для того чтобы определить предельное вертикальное нормальное напряжение, нужно σ_α выразить через σ_y , знать предельное значение сопротивления сдвигу k_n материала в точке a , текущее значение k_b в упругой области (области обратимых деформаций) на нижней контактной поверхности в точке b , углы поворота ЛС ξ_1 в точках a и b и коэффициенты внутреннего и внешнего трения. Таким образом, описание процесса разрушения осуществляется с помощью привлечения некоторых положений теории пластичности и теории упругости.

Влияние трения на верхней контактной поверхности определяется множителем $\frac{2\tau_k}{\sigma_x - \sigma_y}$. Для

упрощения записи угла α в (5) введем обозначение $\frac{2\tau_k}{\sigma_x - \sigma_y} = \text{tg } 2\beta$. Тогда

$$\alpha = \frac{\pi}{4} + \frac{\rho}{2} - \frac{1}{2} \text{arctg} \frac{2\tau_k}{\sigma_x - \sigma_y}. \quad (15)$$

Используя разность нормальных напряжений, из (7) получаем

$$\beta = -\frac{1}{2} \text{arctg} \frac{b \cos \rho}{\sin \rho - \sqrt{1 - b^2}}. \quad (16)$$

Тогда угол наклона трещины в ее вершине из (15) будет определяться на ξ_1 выражением

$$\alpha_{\xi_1} = \frac{\pi}{4} + \frac{\rho}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{b_{\xi_1} \cos \rho}{\sin \rho - \sqrt{1 - b_{\xi_1}^2}}, \quad (17)$$

а в точке b формулой

$$\alpha_b = \frac{\pi}{4} + \frac{\rho}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{b_b \cos \rho}{\sin \rho - \sqrt{1 - b_b^2}}, \quad (18)$$

где с учетом линейного затухания по высоте образца контактных касательных напряжений

$$b_{\xi_1} = \frac{\tau_k \left(1 - \frac{2y}{h}\right)}{k_n + \mu \sigma_y}, \quad (19)$$

$$b_b = -\frac{\tau_k}{k_b + \mu \sigma_y(x_b)}, \quad (20)$$

а функция $\sigma_y(x_b)$ выражает значение контактного нормального напряжения на нижней плоскости образца. Оно определяется конкретной функцией распределения контактных нормальных напряжений.

Разность угла поворота в выражении (14), согласно (17) и (18), будет

$$\alpha_{b\xi} = \beta_b - \beta_{\xi_1}. \quad (21)$$

Перейдем теперь к общему выражению для определения нормального напряжения σ_α при решении (14). Уравнение (3) для σ_α с помощью (5) преобразуем к виду

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} - \frac{\sin \rho}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_k^2}.$$

Тогда с учетом (6)

$$\sigma_\alpha = \frac{(\sigma_x + \sigma_y) \cos^2 \rho}{2} - k \cos \rho \sin \rho. \quad (22)$$

Полусумма нормальных напряжений из уравнения (7) равна

$$\frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{k + \mu \sigma_y}{\cos \rho} (\sin \rho - \sqrt{1 - b^2}) + \sigma_y. \quad (23)$$

Теперь необходимо выбрать характер распределения напряжений в сжимаемом образце. Наиболее достоверным из известных решений, описывающих распределение напряжений в образце твердого тела, на наш взгляд, является распределение Л. Прандля [7], которое получено на основании совместного решения двух дифференциальных и одного алгебраического уравнений и экспериментально подтверждено в [9].

Представим это распределение напряжений с использованием (7) для образца горных пород в виде

$$\sigma_x = \frac{2\tau_k}{h} x + \frac{2(k + \mu \sigma_y)}{\cos \rho} (\sin \rho - \sqrt{1 - b^2}) + C, \quad (24)$$

$$\sigma_y = \frac{2\tau_k}{h}x + C, \quad (25)$$

$$\tau_{xy} = \frac{2\tau_k}{h}\left(1 - \frac{2y}{h}\right) + C. \quad (26)$$

Постоянная C в угловой точке определяется из условия того, что способ приложения сил не влияет на распределение напряжений в сечениях, достаточно удаленных от места их приложения [10]. Это условие является распространением принципа Сен-Венана, применяемого в теории упругости. В сечении $x = 0$, свободном от нагрузки, усилие

$$\int_0^{h/2} \sigma_x dy = 0. \quad (27)$$

Подставляя значение σ_x из (24) в (27) при $x = 0$, после интегрирования находим

$$C = \frac{1}{2} \left(k_n \arcsin \frac{\tau_k \left(1 - \frac{2y}{h}\right)}{k + \mu\sigma_y} \right). \quad (28)$$

Для упрощения записи в дальнейшем введем обозначение

$$d = \frac{1}{2} \arcsin \frac{\tau_k \left(1 - \frac{2y}{h}\right)}{k_n + \mu\sigma_y}. \quad (29)$$

Теперь определим напряжение $\sigma_{y\xi_1}$ в вершинах трещин, которые развиваются по ЛС ξ_1 .

Согласно (23), (24),

$$\frac{\sigma_x + C}{2} = \frac{(k_n + \mu C)(\sin \rho + \sqrt{1 - b^2})}{\cos \rho} + C. \quad (30)$$

Тогда с учетом соотношений (22), (23), (30) выражение для активного касательного напряжения τ_α в (14) на ЛС ξ_1 в точке a будет равно

$$\tau_{\alpha_a} = (k_n + \mu C)(1 + \sin \rho \sqrt{1 - b_a^2}). \quad (31)$$

Далее, с учетом постоянной C в точке b получаем

$$\tau_{\alpha_b} = (k_b + \mu C)(1 - \sin \rho \sqrt{1 - b_b^2}) + \mu\sigma_y(1 - \sin \rho \sqrt{1 - b_b^2}). \quad (32)$$

Решая (14) с применением (21), (31) и (32), находим значение вертикального напряжения в вершине трещины, развивающейся по ЛС ξ_1 :

$$\sigma_{y\xi_1} = \frac{(1 + \mu d)}{\mu} \left[\frac{k_n(1 + \sin \rho \sqrt{1 - b_{\xi_1}^2})}{1 - \sin \rho \sqrt{1 - b_b^2}} \exp(2\mu(\beta_{\xi_1} + \beta_b)) - k_b \right]. \quad (33)$$

Отметим, что при использовании (21) в выражении для угла β_{ξ_1} изменен знак с минуса на плюс.

Выражение для расчета параметра k_b определяется условием предельного состояния в точке b при развитии трещины по ЛС ξ_1 из точки a в точку b :

$$k_b = \frac{(k_n(1+\mu d) + \mu\sigma_{y_{\xi_1}})(1 - \sin \rho \sqrt{1 - b_{\xi_1}^2})}{(1 + \mu d)(1 + \sin \rho \sqrt{1 - b_b^2}) \exp(4\mu\beta_b)} \quad (34)$$

Параметры b_{ξ_1} и b_b находим по формулам (19) и (20), а β_{ξ_1} и β_b — по (16) с использованием значений b_{ξ_1} и b_b . Отметим, если поменять знаки в экспонентах и в параметрах b_{ξ_1} и b_b на обратные, формулы будут применимы для ЛС η_1 .

Для расчета σ_y имеем систему из 7 уравнений с 12 параметрами, из которых три экспериментальные характеристики породы k_n , μ , f и два измеряемых геометрических параметра образца a , h . В локальной области, например в точке a , эффективные касательные напряжения по Кулону $\tau_3 = k_n$. Подчеркнем, что в отличие от жесткопластической модели, в других точках на ЛС ξ_1 материал находится в упругом состоянии, т. е. в этих точках $\tau_3 = k < k_n$, а в момент прихода вершины трещины в точку b эффективное касательное напряжение k_b становится равным k_n .

Из анализа формул (7), (33), (34) следует, что они позволяют определить, в зависимости от углов поворота линий скольжения, вертикальные и горизонтальные нормальные и эффективные касательные напряжения, не достигающие значения этого предела в зонах обратимых деформаций, в частности на контактных плоскостях. Таким образом, изложенным методом можно оценить напряженно-деформированное состояние материала при сжимающих нагрузках, не достигших предела прочности сопротивления сдвигу.

Решение полученной системы уравнений проводится методом итерации. Образец разделяется на несколько слоев n . Угол наклона линии скольжения слоя задается на верхней границе. По толщине слоя он постоянен. Значения координат получаются сложением соответствующих элементов Δy и Δx , при этом Δx определялся как $\Delta x = \Delta y \operatorname{ctg} \alpha$. Выводятся задаваемые и расчетные параметры всех слоев, ориентации линий скольжения, выходящих из углов образца или из других задаваемых точек, определяемых особенностями линий скольжения.

Используя закономерности распределения контактных касательных и нормальных напряжений, можно определить прочность образца в момент образования трещин, за счет которых часть образца выходит из-под нагрузки, и аналитически построить диаграммы “нормальное напряжение – продольная деформация”, получаемые на прессах. Значение прочности образца на запредельных участках кривых диаграмм “напряжение – деформация” определяется из системы

$$\varepsilon = \frac{p}{E}, \quad (35)$$

$$\sigma_c = pS, \quad (36)$$

где ε — продольная деформация; p — удельное давление на несущей площадке с учетом выхода части образца из-под нагрузки при развитии трещин по ЛС; E — модуль упругости; S — относительное значение длины несущей площадки. При этом удельное давление при развитии двух трещин по ЛС ξ_1 и ξ_2 по Л. Прандтлю [7]

$$p = \sigma_{y\xi} \left(1 + \frac{0.5f(\alpha - 2x)}{h} \right), \quad (37)$$

где a, h — длина и высота образца; f — коэффициент контактного трения; относительное значение несущей площадки для двух трещин

$$S = \frac{a - 2x}{a}. \quad (38)$$

Для подтверждения достоверности расчета запредельных кривых при усеченно-клиновой форме разрушения использованы из [11] четыре экспериментальные диаграммы “напряжение – продольная деформация” (рис. 2). Авторы [11] не приводят необходимые физико-механические характеристики — сопротивления материала сдвигу, коэффициенты внешнего и внутреннего трения, однако они могут быть приближенно установлены по внешнему виду запредельных кривых (при этом можно достичь очень высокого совпадения расчетного и экспериментального значений пределов прочности). Используя выражения (35)–(38), построены аналитические диаграммы “напряжение – деформация” для кубических образцов.

Так, экспериментальная диаграмма 1 аппроксимируется расчетной диаграммой 2 при $k_n = 60$ МПа, $\mu = 1.0$, $f = 0.02$, $E = 5.1 \cdot 10^4$ МПа; диаграмма 3 — расчетной диаграммой 4 при $k_n = 69$ МПа, $\mu = 1.0$, $f = 0.02$, $E = 5.8 \cdot 10^3$ МПа; диаграмма 5 — расчетной диаграммой 6 при $k_n = 59$ МПа, $\mu = 1.0$, $f = 0.02$, $E = 5.9 \cdot 10^3$ МПа; диаграмма 7 — расчетной диаграммой 8 при $k_n = 15$ МПа, $\mu = 1.0$, $f = 0.35$, $E = 3.5 \cdot 10^3$ МПа.

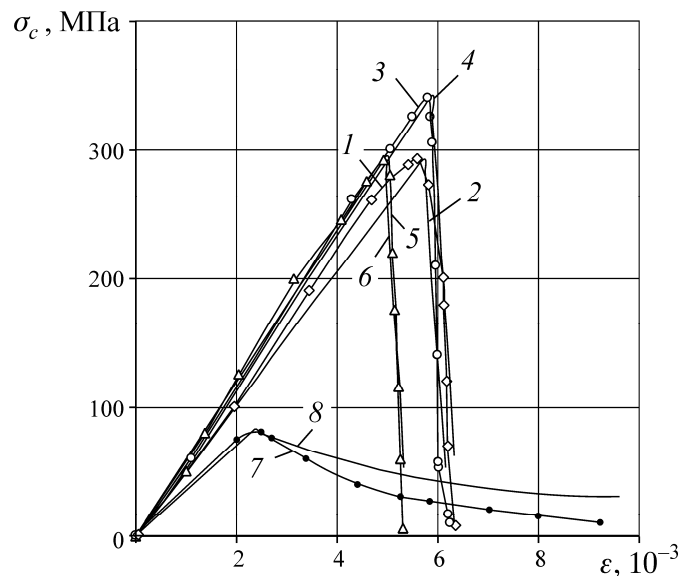


Рис. 2. Диаграммы “напряжение – продольная деформация”: 1 — биотитовый плагиогранит (Южуралзолото); 3 — плагиогранит (Южуралзолото); 5 — диабаз (Братская ГЭС); 7 — коелгинский мрамор; 2, 4, 6, 8 — соответствующие расчетные диаграммы

Сопоставление расчетных диаграмм с экспериментальными диаграммами “нормальное напряжение – продольная деформация”, полученными при одноосном сжатии, свидетельствует о высокой результативности предлагаемого метода расчета предела прочности и построения запредельных кривых разрушения горных пород.

ВЫВОДЫ

Представлена модель расчета напряжений в сжимаемом образце горных пород, основанная на критерии максимальных эффективных касательных напряжений Кулона путем введения в него показателей контактного трения.

Установлено, что изменение нормального напряжения на линии скольжения внутри хрупкого материала в локальной области прямо пропорционально углу ее поворота, а коэффициентом пропорциональности является удвоенная сумма сопротивляемости материала сдвигу и фрикционной составляющей касательного напряжения, равной произведению нормального напряжения на коэффициент внутреннего трения.

Разработан метод, основанный на критерии Кулона и дополненный показателями контактного трения, позволяющий в зависимости от углов поворота линий скольжения определить горизонтальные и вертикальные нормальные и эффективные касательные напряжения, равные пределу сопротивления сдвигу в вершинах трещин и не достигающие его значения в зонах обратимых деформаций.

Предложенная геомеханическая модель реализована применительно к усеченно-клиновой форме разрушения образцов разных пород. Сравнение теоретических предельных кривых с экспериментальными свидетельствует об их хорошем соответствии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Муздакбаев М. М., Никифоровский В. С. О прочности материалов на сжатие // ПМТФ. — 1978. — № 2.
2. Муздакбаев М. М., Никифоровский В. С. О возможных причинах разрушения трубчатых образцов при сжатии // ПМТФ. — 1981. — № 3.
3. Баклашов И. В. Механические процессы в горных массивах. — М.: Недра, 1986.
4. Соколовский В. В. Статика сыпучей среды. — М.: Стройиздат, 1960.
5. Панасюк В. В. Предельное равновесие хрупких тел с трещинами. — Киев: Наук. думка, 1968.
6. Биргер И. А. Сопротивление материалов. — М.: Наука, 1986.
7. Сторожев М. В. Теория обработки металлов давлением. — М.: Машиностроение, 1977.
8. Васильев Л. М., Васильев Д. Л. Теоретическое обоснование формирования горизонтальных нормальных напряжений в массивах горных пород // ФТПРПИ. — 2013 — № 2.
9. Унксов Е. П. Инженерная теория пластичности. Методы расчета усилий деформирования. — М.: Машгиз, 1959.
10. Томленов А. Д. Теория пластического деформирования металлов. — М.: Металлургия, 1972.
11. Ставрогин А. Н., Протосеня А. Г. Прочность горных пород и устойчивость выработок на больших глубинах. — М.: Недра, 1985.

Поступила в редакцию 11/IX 2014