

УДК 669.86:536.21

УСТОЙЧИВОСТЬ АДВЕКТИВНОГО ТЕЧЕНИЯ В НАКЛОННОМ ПЛОСКОМ СЛОЕ ЖИДКОСТИ, ОГРАНИЧЕННОМ ТВЕРДЫМИ ПЛОСКОСТЯМИ, ПРИ НАЛИЧИИ ПРОДОЛЬНОГО ГРАДИЕНТА ТЕМПЕРАТУРЫ 2. УСТОЙЧИВАЯ СТРАТИФИКАЦИЯ

Р. В. Сагитов, А. Н. Шарифулин*

Пермский государственный национальный исследовательский университет,
614990 Пермь, Россия

* Пермский национальный исследовательский политехнический университет,
614990 Пермь, Россия

E-mails: sagitovrv@mail.ru, albert.sharifulin@gmail.com

Исследована устойчивость стационарного конвективного течения в плоском наклонном слое жидкости, ограниченном идеально теплопроводными твердыми плоскостями, при наличии однородного продольного градиента температуры в условиях устойчивой стратификации, когда слой наклонен таким образом, что температура в его нижней части меньше, чем в верхней.

Ключевые слова: адвективное течение, наклонный слой, продольный градиент температуры, неустойчивость, устойчивая стратификация.

DOI: 10.15372/PMTF20170413

Введение. В горизонтальном плоском слое между твердыми идеально теплопроводными плоскостями с заданным продольным градиентом температуры, имеющим сколь угодно малое значение, возникает плоскопараллельное адвективное течение [1]. Результаты исследования устойчивости этого течения приведены во многих работах (см., например, [2–5]). В приложениях горизонтальная ориентация слоя может нарушаться, поэтому необходимо исследовать влияние угла наклона слоя на неустойчивость основного плоскопараллельного течения. Численное и аналитическое исследование случая, когда слой наклонен таким образом, что более нагретая жидкость находится ниже менее нагретой (неустойчивая стратификация), проведено в работах [6, 7]. Показано, что даже небольшое (на угол менее $0,5^\circ$) отклонение слоя от горизонтали, приводящее к возникновению в нем неустойчивой стратификации, вызывает смену типа критических возмущений.

В данной работе исследуется влияние отклонений слоя от горизонтали на устойчивость плоскопараллельного течения, в случае когда слой поворачивается таким образом, что более нагретая часть располагается выше менее нагретой (устойчивая стратификация). Такое исследование для случая идеально теплопроводных границ ранее не проводилось.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (код проекта 3.6990.2017/8.9).

© Сагитов Р. В., Шарифулин А. Н., 2017

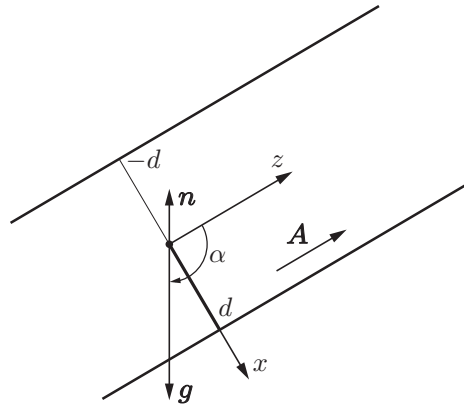


Рис. 1. Схема задачи

1. Постановка задачи. Рассмотрим плоский бесконечный слой жидкости, ограниченный твердыми параллельными плоскостями (рис. 1). На обеих плоскостях задана температура, линейно меняющаяся в зависимости от координаты z :

$$x = \pm 1: \quad T = z.$$

Здесь и далее переменные и уравнения приведены в безразмерном виде, процедура обезразмеривания описана в работе [6]. Слой может поворачиваться вокруг оси y . Угол наклона слоя $\alpha = 0^\circ$ соответствует нагреву снизу, $\alpha = 180^\circ$ — нагреву сверху. При горизонтальном положении слоя $|\alpha| = 90^\circ$. При таких условиях в слое возникает стационарное плоскопараллельное течение со скоростью \mathbf{v}_0 и профилем температуры T_0 , задаваемыми выражениями $\mathbf{v}_0 = (0, 0, v_0)$, $T_0 = z + \theta_0$. Аналитическое решение в размерном виде, соответствующее этому течению, при углах наклона $|\alpha| \leq 180^\circ$ получено в работе [8], анализ данного решения проведен в [6]. Устойчивость течения в интервале углов $|\alpha| \leq 90^\circ$, соответствующем неустойчивой стратификации, изучена в [7]. Если слой расположен горизонтально ($|\alpha| = 90^\circ$) или стратификация в слое устойчива ($|\alpha| > 90^\circ$), в случае плоскопараллельного течения выражения для скорости v_0 и отклонения температуры θ_0 от реализующейся в теплопроводном режиме имеют вид

$$v_0 = \text{Gr} \sin \alpha \frac{\cos \zeta \operatorname{sh} \zeta \sin \zeta x \operatorname{ch} \zeta x - \sin \zeta \operatorname{ch} \zeta \cos \zeta x \operatorname{sh} \zeta x}{2\zeta^2(\cos^2 \zeta - \operatorname{ch}^2 \zeta)}; \quad (1)$$

$$\theta_0 = \operatorname{tg} \alpha \left(x + \frac{\operatorname{ch} \zeta \sin \zeta \operatorname{ch} \zeta x \sin \zeta x + \operatorname{sh} \zeta \cos \zeta \operatorname{sh} \zeta x \cos \zeta x}{\cos^2 \zeta - \operatorname{ch}^2 \zeta} \right), \quad (2)$$

где

$$\zeta = \sqrt[4]{-(1/4) \operatorname{Pr} \operatorname{Gr} \cos \alpha}, \quad (3)$$

Pr , Gr — числа Прандтля и Грасгофа. Выполняя предельный переход $|\alpha| \rightarrow 90^\circ$, из (2), (3) получаем решение Бирixa [1]

$$v_0 = \sin \alpha (x - x^3) \frac{\operatorname{Gr}}{6}, \quad \theta_0 = \sin \alpha \left(-\frac{7}{30} x + \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{10} x^5 \right) \frac{\operatorname{Gr} \operatorname{Pr}}{12},$$

где $\alpha = \pm 90^\circ$.

Рассмотрим устойчивость решения (1)–(3) по отношению к малым пространственным возмущениям двух типов: плоским возмущениям в виде валов с осями, перпендикулярными направлению основного течения, и спиральным возмущениям в виде валов с осями, параллельными основному потоку. Возмущения первого типа пропорциональны $\exp(\lambda t + ikz)$,

возмущения второго типа — $\exp(\lambda t +iky)$. Спиральные возмущения, в свою очередь, также делятся на два типа: четные и нечетные относительно середины слоя. Каждый из трех указанных типов возмущений может быть как монотонным, для которого мнимая часть инкремента равна $\lambda_i = \omega = 0$, так и колебательным. Колебательное плоское (спиральное) возмущение представляет собой волну, распространяющуюся с фазовой скоростью ω/k вдоль оси $z(y)$. Таким образом, в настоящей работе рассмотрены шесть типов малых возмущений. Амплитуды возмущений удовлетворяют краевым задачам, полученным в [7]. Для расчета плоских возмущений использовался метод дифференциальной прогонки, спиральные возмущения рассчитывались методом ортогонализации.

2. Результаты исследования. Для исследования устойчивости решения (1)–(3) проведем анализ нейтральных кривых возмущений различного типа при относительно малом значении числа Прандтля $Pr = 0,07$. Нейтральные кривые $Gr(k)$ для всех шести типов возмущений при различных значениях угла наклона представлены на рис. 2, соответствующие зависимости частот нейтральных колебательных возмущений от волнового числа приведены на рис. 3. В отличие от случая горизонтальной ориентации ($\alpha = 90^\circ$) нейтральные кривые монотонных (колебательных) плоских возмущений замкнуты (кривые 1, 4). Замкнутыми являются также нейтральные кривые спиральных колебательных четных и нечетных возмущений (кривые 5, 6 на рис. 2, 3). Из результатов расчетов следует, что нейтральные кривые четных (кривые 2) и нечетных (кривые 3) спиральных монотонных возмущений могут иметь по две ветви. Это обусловлено сложностью исследуемого на устойчивость профиля скорости. Каждой ветви соответствует собственная функция, поэтому иногда ветви могут пересекаться. Пересечение двух нейтральных кривых монотонной устойчивости одного типа впервые обнаружено в работе [9] и описано в монографии [2].

Из рис. 2,а следует, что отклонение слоя от горизонтального положения на угол, равный 1° , не приводит к смене типа критического возмущения. Как и для горизонтального слоя, при малых значениях числа Прандтля наиболее опасными являются монотонные плоские возмущения. Критические значения числа Грасгофа также не меняются. Однако в семействе нейтральных кривых появляются замкнутые нейтральные кривые и нейтральные кривые колебательных спиральных нечетных возмущений (кривая 6), которые при некоторых значениях α и Pr оказывают существенное влияние на устойчивость течения. Замкнутость нейтральной кривой 1 означает, что монотонные плоские возмущения могут нарастать лишь в интервале $Gr_{\min}^{(1)} < Gr < Gr_{\max}^{(1)}$, где $Gr_{\min}^{(1)}$ — критическое число Грасгофа, при превышении которого затухавшие монотонные плоские возмущения начинают нарастать; $Gr_{\max}^{(1)}$ — критическое число Грасгофа, при превышении которого нараставшие монотонные плоские возмущения начинают затухать. Из рис. 2,б следует, что при $\alpha = 105^\circ$ $Gr_{\min}^{(5)} > Gr_{\max}^{(1)}$. Это означает, что при $Gr_{\max}^{(1)} < Gr < Gr_{\min}^{(5)}$ основное течение устойчиво. Таким образом, при $\alpha = 105^\circ$ области устойчивости и неустойчивости перемежаются.

Дальнейшее увеличение угла наклона приводит к исчезновению области существования нарастающих монотонных возмущений (нейтральная кривая 1 схлопывается и исчезает).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Известно, что плоские монотонные возмущения возникают на границе встречных потоков [2]. Анализ основного течения (см. формулу (3)), проведенный в работе [6], показал, что в случае $|\alpha| > 90^\circ$ при увеличении числа Грасгофа встречные потоки разделяются и условия возникновения гидродинамической неустойчивости отсутствуют. Этим объясняется замкнутость нейтральных кривых для плоских монотонных возмущений.

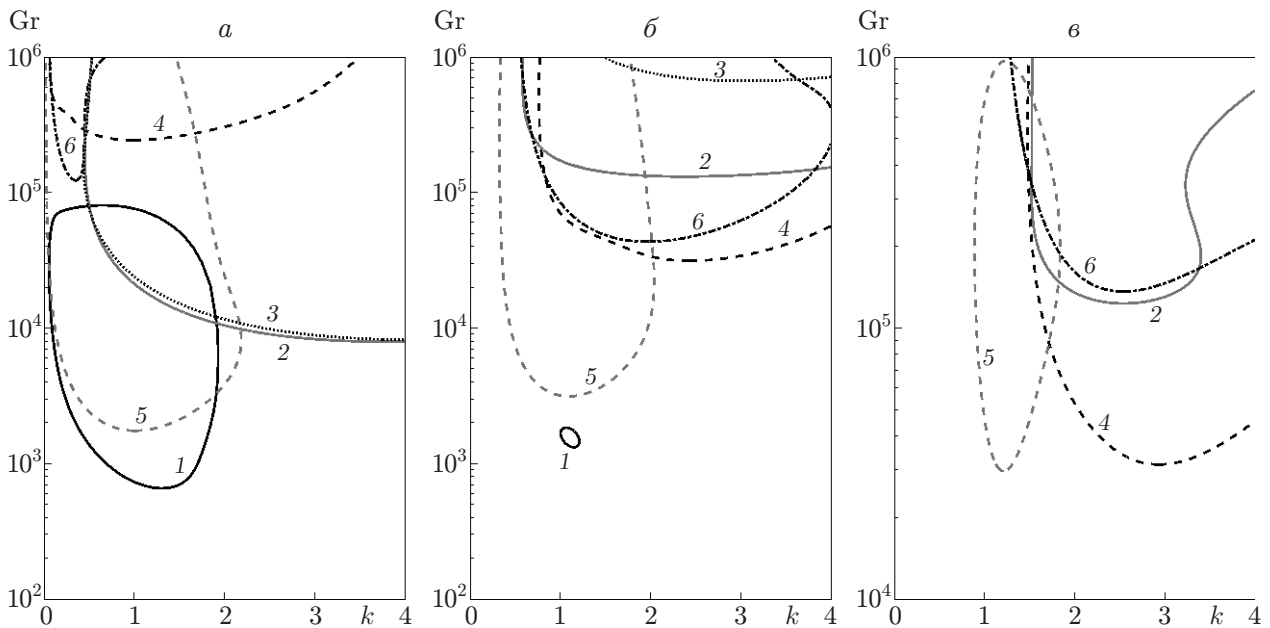


Рис. 2. Нейтральные кривые при $Pr = 0,07$ и различных углах наклона α :
 а — $\alpha = 91^\circ$, б — $\alpha = 105^\circ$, в — $\alpha = 120^\circ$; 1 — плоские монотонные возмущения, 2 — спиральные четные монотонные возмущения, 3 — спиральные нечетные монотонные возмущения, 4 — плоские колебательные возмущения, 5 — спиральные четные колебательные возмущения, 6 — спиральные нечетные колебательные возмущения

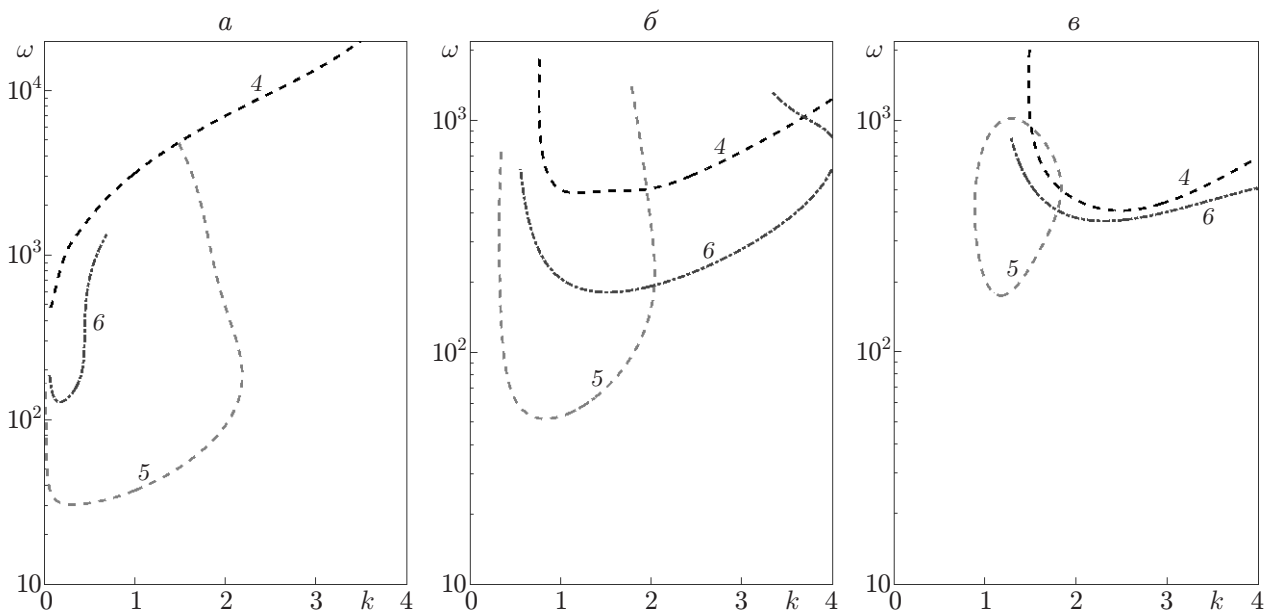


Рис. 3. Зависимость циклической частоты нейтральных колебательных возмущений от волнового числа при $Pr = 0,07$ и различных значениях угла наклона α (обозначения те же, что на рис. 2)

При $\alpha > 106^\circ$ наиболее опасными становятся спиральные четные колебательные возмущения (кривые 5 на рис. 2, 3), т. е. возникают нарастающие волны, движущиеся перпендикулярно направлению основного течения. Увеличение угла наклона приводит к стабилизации основного течения по отношению к этим поперечным волновым возмущениям: кривая 5 смещается в область больших значений числа Грасгофа, вследствие чего при $\alpha \approx 120^\circ$ наиболее опасными становятся плоские колебательные возмущения (кривая 4 на рис. 2, в), т. е. на фоне основного течения появляются нарастающие волны, движущиеся в направлении этого течения. При дальнейшем увеличении угла наклона колебательные плоские возмущения остаются наиболее опасными, соответствующее им критическое число Грасгофа стремится к бесконечности при $\alpha \rightarrow 180^\circ$.

Из рис. 3 следует, что изменение угла наклона слоя приводит к значительному изменению частоты критических возмущений. Так, в случае спиральных четных колебательных возмущений при отклонении слоя от горизонтали на угол, равный 30° , частота увеличивается почти в 10 раз (кривые 5). В случае плоских колебательных возмущений, наоборот, при отклонении слоя от горизонтали на угол, равный 30° , частота критических возмущений уменьшается приблизительно в 10 раз.

Анализ нейтральных кривых (частоты колебательных возмущений) для рассмотренных выше углов наклона при умеренном значении числа Прандтля $Pr = 0,2$ показывает, что отклонение слоя от горизонтального положения до $\alpha \approx 108^\circ$ не приводит к смене типа критического возмущения: как и в случае горизонтальной ориентации слоя, наиболее опасными являются колебательные четные спиральные возмущения. В узком диапазоне углов $108^\circ < \alpha < 111^\circ$ наблюдается описанное выше явление перемежаемости, когда между областями неустойчивости течения по отношению к колебательным четным и нечетным спиральным возмущениям расположена область устойчивости течения по отношению ко всем рассмотренным типам малых возмущений. В интервале $111^\circ < \alpha < 114^\circ$ наиболее опасными являются колебательные нечетные спиральные возмущения. Дальнейшее увеличение угла наклона, как и в рассмотренном выше случае $Pr = 0,07$, приводит к неустойчивости течения по отношению к колебательным плоским возмущениям.

При $Pr = 0,2$ угол отклонения от горизонтали оказывает такое же влияние на циклическую частоту, как и в случае $Pr = 0,07$. Увеличение числа Прандтля и угла отклонения от горизонтали приводит к незначительному уменьшению влияния угла наклона на частоту спиральных (плоских) возмущений. С увеличением числа Прандтля частоты критических плоских и спиральных четных возмущений уменьшаются, при этом частоты спиральных нечетных критических возмущений практически не изменяются.

Зависимость критического числа Грасгофа от числа Прандтля при различных углах наклона представлена на рис. 4. Перемежаемость областей устойчивости проявляется в наличии точек возврата в случае плоских монотонных возмущений (кривые 1), четных (кривые 5) и нечетных (кривые 6) колебательных спиральных возмущений. Видно, что при незначительных углах отклонения от горизонтали (менее 5°) с увеличением числа Прандтля происходит характерное для горизонтального слоя изменение типов критических возмущений (см. рис. 4, а). В области умеренных углов отклонения от горизонтали ($95^\circ < \alpha < 120^\circ$) с увеличением угла наклона диапазон чисел Прандтля, в котором возможна неустойчивость течения по отношению к колебательным четным спиральным возмущениям (кривая 5), сужается, что обусловлено расширением области неустойчивости течения по отношению к плоским колебательным возмущениям (кривые 4), а также возникновением неустойчивости течения по отношению к нечетным колебательным спиральным возмущениям (кривые 6). Из рис. 4 следует, что при $Pr \approx 0,2$ кривая 4 образует петлю. Это обусловлено наличием на ней двух локальных минимумов. При $\alpha > 120^\circ$ име-

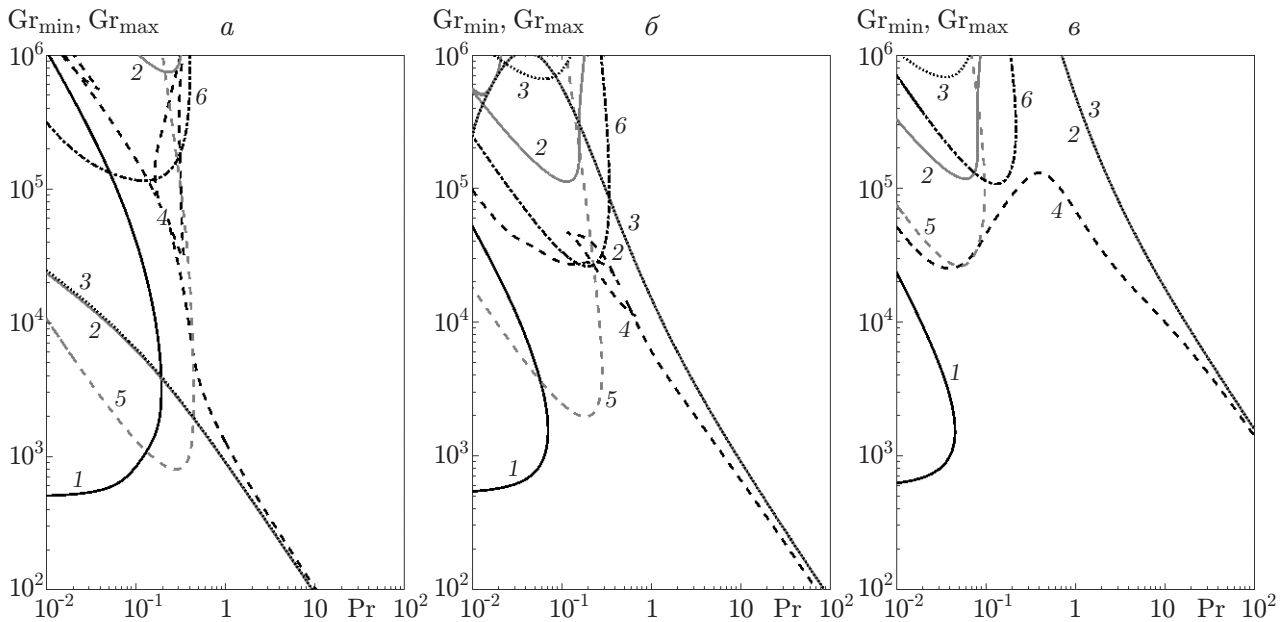


Рис. 4. Зависимости критических чисел Грасгофа от числа Прандтля при различных значениях угла наклона α :
 а — $\alpha = 91^\circ$, б — $\alpha = 105^\circ$, в — $\alpha = 120^\circ$; остальные обозначения те же, что на рис. 2

ют место критические возмущения только двух типов: плоские монотонные (кривая 1) и плоские колебательные (кривая 4).

ЗАМЕЧАНИЕ 2. При достаточно больших углах отклонения слоя от горизонтали (приблизительно 30° при $Pr = 0,07$ и приблизительно 15° при $Pr = 0,35$) критические возмущения имеют вид плоских валов и плоских бегущих тепловых волн. В работе [10] для случая кубической полости показано, что отклонение от горизонтального положения на угол, приблизительно равный 20° , приводит к подавлению многообразия неустойчивостей, характерных для горизонтальной ориентации (рэлеевской конвекции). В этом случае критическое возмущение представлено лишь валовым течением.

Заключение. Проведенные расчеты показывают, что в случае горизонтального слоя и при незначительных углах отклонения от горизонтали (менее 5°) критические возмущения и зависимость критических чисел Грасгофа от числа Прандтля различаются незначительно. При умеренных углах отклонения от горизонтали возникает перемежаемость типов критических возмущений. При углах отклонения от горизонтали, превышающих 30° , плоские колебательные возмущения становятся критическими. В области малых чисел Прандтля возникают также монотонные плоские возмущения, нарастающие в ограниченном интервале чисел Грасгофа в области устойчивости течения к плоским колебательным возмущениям.

Авторы выражают благодарность В. К. Андрееву и В. В. Пухначеву за внимание к работе и полезное обсуждение.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бирих Р. В.** О термокапиллярной конвекции в горизонтальном слое жидкости // ПМТФ. 1966. № 3. С. 69–72.
2. **Гершуни Г. З.** Устойчивость конвективных течений / Г. З. Гершуни, Е. М. Жуховицкий, А. А. Непомнящий. М.: Наука, 1989.

3. **Андреев В. К.** Устойчивость неизотермических жидкостей / В. К. Андреев, В. Б. Бекежанова. Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2010.
4. **Андреев В. К., Бекежанова В. Б.** Устойчивость неизотермических жидкостей (обзор) // ПМТФ. 2013. Т. 54, № 2. С. 3–20.
5. **Андреев В. К.** Решение Бириха уравнений конвекции и некоторые его обобщения. Красноярск, 2010. (Препр. / СО РАН. Ин-т вычисл. моделирования; № 1-10).
6. **Сагитов Р. В., Шарифулин А. Н.** Длинноволновая неустойчивость адвективного течения в наклонном слое жидкости с идеально теплопроводными границами // ПМТФ. 2011. Т. 52, № 6. С. 13–21.
7. **Сагитов Р. В., Шарифулин А. Н.** Устойчивость адвективного течения в наклонном плоском слое жидкости, ограниченном твердыми плоскостями, при наличии продольного градиента температуры. 1. Неустойчивая стратификация // ПМТФ. 2017. Т. 58, № 2. С. 90–97.
8. **Остроумов Г. А.** Свободная тепловая конвекция в условиях внутренней задачи. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1952.
9. **Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Шихов В. М.** Неустойчивость конвективного течения воды вблизи $4\text{ }^{\circ}\text{C}$ // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1979. № 2. С. 189–192.
10. **Torres J. F., Henry D., Komiya A., et al.** Transition from multiplicity to singularity of steady natural convection in a tilted cubical enclosure // Phys. Rev. E. 2015. V. 92, N 2. P. 23031–23034.

*Поступила в редакцию 10/VI 2014 г.,
в окончательном варианте — 29/VII 2016 г.*
