

УДК 532.51

## РАСЧЕТ ЛИНЕЙНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ РАССЛОЕННОГО ТЕЧЕНИЯ ГАЗА И ЖИДКОСТИ В НАКЛОННОМ ПЛОСКОМ КАНАЛЕ

Ю. Я. Трифонов

Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия  
E-mail: trifonov@itp.nsc.ru

Рассмотрена линейная устойчивость противоточных течений жидкости и газа в наклонном канале. Линеаризованы полные уравнения Навье — Стокса для обеих фаз, в результате решения спектральной задачи определена динамика периодических возмущений в широких диапазонах значений числа Рейнольдса для жидкости и скорости пара. В исследованных диапазонах найдены две неустойчивые моды: поверхностная (при малых скоростях газа соответствующая волнам Капицы) и сдвиговая в газовой фазе. Рассчитаны длина волны и фазовая скорость нейтральных возмущений обеих мод в зависимости от числа Рейнольдса для жидкости. Показано, что для поверхностной моды эти зависимости существенно зависят от скорости газа.

Ключевые слова: вязкое течение пленок, нелинейные волны, устойчивость.

DOI: 10.15372/PMTF20180107

**1. Введение и постановка задачи.** Теоретические исследования пленочных течений начаты в работе [1], в которой получено точное решение уравнений Навье — Стокса в случае свободного стекания тонкого слоя вязкой жидкости по гладкой вертикальной стенке, и в работах [2, 3], где экспериментально и теоретически изучены различные волновые режимы стекания пленки. В работах [4, 5] с использованием асимптотического подхода изучена линейная устойчивость решения Нуссельта и показано, что оно неустойчиво при числах Рейнольдса  $Re > Re_{cr} = 5 \operatorname{ctg}(\beta)/6$  ( $\beta$  — угол наклона поверхности течения). Найденные в [4, 5] неустойчивые возмущения (далее — поверхностная мода) являются длинноволновыми и на нелинейной стадии развития соответствуют волнам Капицы. В работах [6, 7] найдена еще одна мода неустойчивых возмущений для случая гравитационного стекания пленки вдоль наклонной плоскости в отсутствие поверхностного натяжения. Показано, что при очень малых углах наклона  $\beta$  неустойчивые возмущения этой моды являются более опасными, чем возмущения поверхностной моды. В работе [8] на основе полных линеаризованных уравнений Навье — Стокса проведены расчеты нейтральных кривых для обеих неустойчивых мод гравитационного стекания пленки с учетом сил поверхностного натяжения. В работе [9] впервые проведено исследование линейной устойчивости расслоенного течения Пуазейля в плоском канале при заданных объемных долях обеих фаз и суммарном среднем расходе жидкостей в канале. Показано, что различие вязкостей может приводить к возникновению неустойчивых возмущений. В работах [10–12] с использованием анало-

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 16-19-10449).

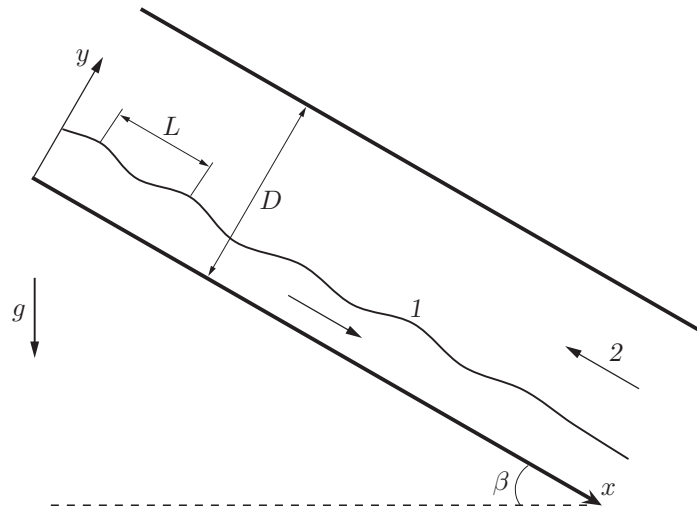


Рис. 1. Схема течения:

1 — пленка жидкости, 2 — поток газа

гичной постановки рассмотрена устойчивость расслоенного течения двух жидкостей в наклонном канале при различных значениях плотностей и объемных долей.

Целями настоящей работы являются поиск и исследование с помощью полных линеаризованных уравнений Навье — Стокса различных неустойчивых мод для противоточного течения жидкости и газа между двумя наклонными плоскостями. В качестве независимых параметров используются среднерасходные скорости для обеих фаз, что является принципиальным отличием от работ [9–12]. Аналогичные параметры используются в экспериментах при исследовании важного явления захлебывания [13].

**2. Основные уравнения.** Совместное волновое течение газа и жидкости между двумя наклонными плоскостями (рис. 1) описывается системой уравнений Навье — Стокса с соответствующими граничными условиями. Далее в уравнениях, описывающих течение жидкости, используется координата  $\eta = y^*/H^*(x^*, t^*)$ , в уравнениях, описывающих течение газа, —  $\tilde{\eta} = (D - y^*)/(D - H^*)$ . Здесь и далее  $D$  — ширина канала; величины с верхним индексом “\*” являются размерными;  $H^*(x^*, t^*)$  — мгновенная толщина слоя жидкости. В новых координатах область течения известна:  $\eta \in [0, 1]$ ,  $\tilde{\eta} \in [0, 1]$ , уравнения течения записываются следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \eta_t \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \eta_x \frac{\partial u^2}{\partial \eta} + \eta_y \frac{\partial uv}{\partial \eta} &= -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} - \eta_x \frac{\partial \bar{P}}{\partial \eta} - Z\varepsilon_\rho n^2 + \\ &+ \frac{1}{\text{Re}} \left( 3 + \eta_y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \eta_x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + 2\eta_x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \eta} + (\eta_{x\xi} + \eta_x \eta_{x\eta}) \frac{\partial u}{\partial \eta} \right), \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \eta_t \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial uv}{\partial x} + \eta_x \frac{\partial uv}{\partial \eta} + \eta_y \frac{\partial v^2}{\partial \eta} &= -\eta_y \frac{\partial \bar{P}}{\partial \eta} - \frac{3 \text{ctg } \beta}{\text{Re}(1 - \varepsilon_\rho)} + \\ &+ \frac{1}{\text{Re}} \left( \eta_y^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \eta_x^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + 2\eta_x \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial \eta} + (\eta_{x\xi} + \eta_x \eta_{x\eta}) \frac{\partial v}{\partial \eta} \right), \end{aligned}$$

$$v(x, \eta) = -H(x)u(x, \eta)\eta_x - \frac{\partial}{\partial x} \left( H \int_0^\eta u(x, \eta') d\eta' \right), \quad (1)$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( H(x) \int_0^1 u(x, \eta') d\eta' \right) = 0;$$

$$u(x, \eta) = 0, \quad \eta = 0; \quad (2)$$

$$-\varepsilon_\rho n^2 \bar{P}^g + \bar{P} = \frac{2}{\text{Re}} \left( \eta_y \frac{\partial v}{\partial \eta} - \varepsilon_\mu n \tilde{\eta}_y \frac{\partial v^g}{\partial \tilde{\eta}} \right) \frac{1 + (\partial H / \partial x)^2}{1 - (\partial H / \partial x)^2} - \frac{(3 \text{Fi})^{1/3}}{(\sin \beta)^{1/3} \text{Re}^{5/3}} \frac{\partial^2 H / \partial x^2}{[1 + (\partial H / \partial x)^2]^{3/2}}, \quad \eta = \tilde{\eta} = 1, \quad (3)$$

$$\left( \eta_y \frac{\partial u}{\partial \eta} - \varepsilon_\mu n \tilde{\eta}_y \frac{\partial u^g}{\partial \tilde{\eta}} + \frac{\partial v}{\partial x} + \eta_x \frac{\partial v}{\partial \eta} - \varepsilon_\mu n \frac{\partial v^g}{\partial x} - \varepsilon_\mu n \tilde{\eta}_x \frac{\partial v^g}{\partial \tilde{\eta}} \right) \left[ 1 - \left( \frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 \right] + 4 \left( \eta_y \frac{\partial v}{\partial \eta} - \varepsilon_\mu n \tilde{\eta}_y \frac{\partial v^g}{\partial \tilde{\eta}} \right) \frac{\partial H}{\partial x} = 0, \quad \eta = \tilde{\eta} = 1; \\ u = nu^g, \quad \eta = \tilde{\eta} = 1; \quad (4)$$

$$v^g(x, \tilde{\eta}) = u^g(x, \tilde{\eta}) \tilde{\eta} \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial}{\partial x} \left( (1 - \varepsilon_2 H) \int_0^{\tilde{\eta}} u^g(x, \tilde{\eta}') d\tilde{\eta}' \right), \quad (5)$$

$$\frac{1}{n} \frac{\partial H}{\partial t} - \frac{1}{\varepsilon_2} \frac{\partial}{\partial x} \left( (1 - \varepsilon_2 H) \int_0^1 u^g(x, \tilde{\eta}') d\tilde{\eta}' \right) = 0;$$

$$\frac{1}{n} \frac{\partial u^g}{\partial t} + \frac{\tilde{\eta}_t}{n} \frac{\partial u^g}{\partial \tilde{\eta}} + \tilde{\eta}_y \frac{\partial u^g v^g}{\partial \tilde{\eta}} + \frac{\partial (u^g)^2}{\partial x} + \tilde{\eta}_x \frac{\partial (u^g)^2}{\partial \tilde{\eta}} = -\frac{\partial \bar{P}^g}{\partial x} - \tilde{\eta}_x \frac{\partial \bar{P}^g}{\partial \tilde{\eta}} - Z + \frac{1}{\varepsilon_2 \text{Re}^g} \left( \tilde{\eta}_y^2 \frac{\partial^2 u^g}{\partial \tilde{\eta}^2} + \frac{\partial^2 u^g}{\partial x^2} + \tilde{\eta}_x^2 \frac{\partial^2 u^g}{\partial \tilde{\eta}^2} + 2\tilde{\eta}_x \frac{\partial^2 u^g}{\partial x \partial \tilde{\eta}} + (\tilde{\eta}_{x\xi} + \tilde{\eta}_x \tilde{\eta}_{x\eta}) \frac{\partial u^g}{\partial \tilde{\eta}} \right), \quad (6)$$

$$\frac{1}{n} \frac{\partial v^g}{\partial t} + \frac{\tilde{\eta}_t}{n} \frac{\partial v^g}{\partial \tilde{\eta}} + \frac{\partial u^g v^g}{\partial x} + \tilde{\eta}_x \frac{\partial u^g v^g}{\partial \tilde{\eta}} + \tilde{\eta}_y \frac{\partial (v^g)^2}{\partial \tilde{\eta}} = -\tilde{\eta}_y \frac{\partial \bar{P}^g}{\partial \tilde{\eta}} - \frac{3 \text{ctg} \beta}{\text{Re} (1 - \varepsilon_\rho)} \frac{1}{n^2} + \frac{1}{\varepsilon_2 \text{Re}^g} \left( \tilde{\eta}_y^2 \frac{\partial^2 v^g}{\partial \tilde{\eta}^2} + \frac{\partial^2 v^g}{\partial x^2} + \tilde{\eta}_x^2 \frac{\partial^2 v^g}{\partial \tilde{\eta}^2} + 2\tilde{\eta}_x \frac{\partial^2 v^g}{\partial x \partial \tilde{\eta}} + (\tilde{\eta}_{x\xi} + \tilde{\eta}_x \tilde{\eta}_{x\eta}) \frac{\partial v^g}{\partial \tilde{\eta}} \right); \\ u^g = 0, \quad \tilde{\eta} = 0. \quad (7)$$

Здесь  $P = Z\varepsilon_\rho n^2 x + \bar{P}$  — общее давление в жидкости;  $Z\varepsilon_\rho n^2 x$  — перепад давления в канале;  $Z$  — неизвестное число;  $u, v$  — компоненты вектора скорости жидкости вдоль осей  $x$  и  $y$  соответственно;  $\eta_{x\eta} \equiv \eta_x / \eta$ ;  $\eta_y \equiv 1/H$ ;  $\eta_t \equiv -\eta_y \eta \partial H / \partial t$ ;  $\eta_x \equiv -\eta_y \eta \partial H / \partial x$ ;  $\eta_{x\xi} \equiv -\eta_y (\eta_x \partial H / \partial x + \eta \partial^2 H / \partial x^2)$ ; аналогично для газовой фазы  $P^g = Zx + \bar{P}^g$  — общее давление;  $u^g, v^g$  — компоненты вектора скорости жидкости вдоль осей  $x$  и  $y$  соответственно;  $\tilde{\eta}_{x\eta} \equiv \tilde{\eta}_x / \tilde{\eta}$ ;  $\tilde{\eta}_y \equiv -\varepsilon_2 / (1 - \varepsilon_2 H)$ ;  $\tilde{\eta}_x \equiv -\tilde{\eta}_y \tilde{\eta} \partial H / \partial x$ ;  $\tilde{\eta}_t \equiv -\tilde{\eta}_y \tilde{\eta} \partial H / \partial t$ ;  $\tilde{\eta}_{x\xi} \equiv -\tilde{\eta}_y (\tilde{\eta}_x \partial H / \partial x + \tilde{\eta} \partial^2 H / \partial x^2)$ .

Уравнения (1)–(7) записаны в безразмерном виде. Безразмерные величины связаны с соответствующими размерными величинами следующим образом:

$$x = \frac{x^*}{H_0}, \quad t = \frac{u_0 t^*}{H_0}, \quad y = \frac{y^*}{H_0}, \quad u = \frac{u^*}{u_0}, \quad v = \frac{v^*}{u_0}, \quad P = \frac{P^*}{\rho u_0^2}, \quad H = \frac{H^*}{H_0}, \quad u^g = \frac{(u^g)^*}{u_0^g},$$

$$v^g = \frac{(v^g)^*}{u_0^g}, \quad P^g = \frac{(P^g)^*}{\rho_g (u_0^g)^2}, \quad H_0 \equiv \left( \frac{3\nu^2 \text{Re}}{g(1 - \varepsilon_\rho) \sin \beta} \right)^{1/3}, \quad u_0 \equiv \frac{\nu \text{Re}}{H_0}, \quad \varepsilon_2 = \frac{H_0}{D},$$

$$\varepsilon_\mu = \frac{\mu_g}{\mu}, \quad \varepsilon_\rho = \frac{\rho_g}{\rho}, \quad n = \frac{u_0^g}{u_0}, \quad u_0^g \equiv \frac{\nu_g \text{Re}^g}{D}, \quad \text{Fi} = \frac{(\sigma/\rho)^3}{g(1 - \varepsilon_\rho)\nu^4}.$$

Здесь  $\nu$ ,  $\mu$  — кинематическая и динамическая вязкости жидкости;  $\rho$  — плотность жидкости;  $\sigma$  — поверхностное натяжение;  $\text{Fi}$  — пленочное число;  $\text{Re}$  — число Рейнольдса для жидкости; аналогично для газовой фазы  $\nu_g$ ,  $\mu_g$  — кинематическая и динамическая вязкости;  $\rho_g$  — плотность;  $\text{Re}^g$  — число Рейнольдса для газа. Далее в качестве масштаба скорости  $u_0^g$  будем использовать половину величины среднерасходной скорости газа в канале  $U_{gs}$ . Эквивалентный диаметр плоского канала равен  $D_e = 2D$ , стандартное число Рейнольдса в четыре раза превышает значение  $\text{Re}^g$ .

Уравнения (1) представляют собой законы сохранения импульса и массы для жидкости, а также кинематическое условие на границе раздела, уравнение (2) — условие прилипания на стенке, уравнения (3) — условия равенства касательных и нормальных сил на поверхности раздела, уравнение (4) — условие прилипания на поверхности раздела. Уравнения (6) представляют собой закон сохранения импульса для газовой фазы, уравнения (5) — закон сохранения массы и кинематическое условие, уравнение (7) является условием прилипания на верхней стенке канала для газовой фазы.

В данной работе рассматривается устойчивость стационарных решений  $[u_b(\eta), P_b(x, \eta), u_b^g(\tilde{\eta}), P_b^g(x, \tilde{\eta}), H_b]$  системы уравнений (1)–(7), соответствующих безволновому течению системы жидкость — газ:

$$u_b(x, \eta) = \alpha_1 \eta^2 + \beta_1 \eta, \quad v_b(x, \eta) = 0, \quad P_b(x, \eta) = \varepsilon_\rho n^2 (Z_b x + K) - \frac{3 \text{ctg} \beta H_b (\eta - 1)}{\text{Re} (1 - \varepsilon_\rho)},$$

$$u_b^g(x, \tilde{\eta}) = C \tilde{\eta}^2 + C_1 \tilde{\eta}, \quad v_b^g(x, \tilde{\eta}) = 0, \quad P_b^g(x, \tilde{\eta}) = Z_b x + K \tilde{\eta}.$$

Здесь  $\alpha_1 = [1/(4\varphi\delta) - 2\delta/\varepsilon_2 - 1/(nH_b)]/[1/(6n) - 1/(6\varphi\delta H_b^2)]$ ;  $\beta_1 = -2\alpha_1/3 + 2/H_b$ ;  $C = 3/(2\varphi\delta) + \alpha_1/(\varphi\delta H_b^2)$ ;  $C_1 = -2C/3 - 4\delta/\varepsilon_2$ ;  $Z_b = 2C\delta^2/(\varepsilon_2 \text{Re}^g)$ ;  $K = 3 \text{ctg} \beta / [\delta n^2 \text{Re} (1 - \varepsilon_\rho)]$ ;  $\varphi \equiv \varepsilon_\mu \varepsilon_2 n / (1 - \varepsilon_2 H_b)$ ;  $\delta \equiv \varphi / (\varepsilon_\mu n)$ . Для расчета толщины  $H_b$  и величин  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $C$ ,  $C_1$ ,  $Z_b$  при фиксированных значениях параметров  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_\rho$ ,  $\varepsilon_\mu$ ,  $n$ ,  $\text{Re}$ ,  $\text{Re}^g$  решалось нелинейное уравнение

$$\frac{4\alpha_1/3 + 2/H_b}{H_b} + \varphi \left( C + \frac{\alpha_1/3 + 2/H_b}{n} \right) = 0. \quad (8)$$

При выводе уравнения (8) учтены балансные соотношения для среднерасходных скоростей в жидкости и газе:

$$H_b \int_0^1 u_b d\eta = 1, \quad (1 - \varepsilon_2 H_b) \int_0^1 u_b^g d\tilde{\eta} = -2.$$

Подставляя

$$H = H_b + \hat{H} e^{-\lambda t} e^{-i\alpha x} + \text{к.с.}, \quad u = u_b(\eta) + \hat{u}(\eta) e^{-\lambda t} e^{-i\alpha x} + \text{к.с.}, \quad v = \hat{v}(\eta) e^{-\lambda t} e^{-i\alpha x} + \text{к.с.},$$

$$P = P_b(x, \eta) + \hat{P}(\eta) e^{-\lambda t} e^{-i\alpha x} + \text{к.с.}, \quad u^g = u_b^g(\tilde{\eta}) + \hat{u}^g(\tilde{\eta}) e^{-\lambda t} e^{-i\alpha x} + \text{к.с.},$$

$$v^g = \hat{v}^g(\tilde{\eta}) e^{-\lambda t} e^{-i\alpha x} + \text{к.с.}, \quad P^g = P_b^g(x, \tilde{\eta}) + \hat{P}^g(\tilde{\eta}) e^{-\lambda t} e^{-i\alpha x} + \text{к.с.}$$

(к.с. — комплексно-сопряженная величина) в уравнения (1)–(7) и линеаризуя их в окрестности стационарного решения, получаем систему уравнений для нахождения спектра собственных значений

$$\frac{i\alpha\hat{H}}{H_b} + i\alpha H_b \int_0^1 \hat{u}(\eta') d\eta' = \lambda\hat{H}, \quad (9)$$

$$\left(\frac{1}{H_b} + \frac{2n}{1 - \varepsilon_2 H_b}\right)\hat{H} + H_b \int_0^1 \hat{u}(\eta') d\eta' + \frac{1 - \varepsilon_2 H_b}{\varepsilon_2} n \int_0^1 \hat{u}^g(\tilde{\eta}') d\tilde{\eta}' = 0;$$

$$\begin{aligned} & \frac{3i\alpha \operatorname{ctg} \beta}{\operatorname{Re}(1 - \varepsilon_\rho)} \eta\hat{H} + i\alpha \left\{ \varepsilon_\rho n^2 \hat{P}^g \Big|_{\hat{\eta}=1} - \frac{2i\alpha}{\operatorname{Re}} \hat{u} \Big|_{\eta=1} (1 - \varepsilon_\mu) + \frac{(3 \operatorname{Fi})^{1/3} \alpha^2}{(\sin \beta)^{1/3} \operatorname{Re}^{5/3}} \hat{H} + \right. \\ & + H_b \int_\eta^1 \left[ i\alpha u_b \hat{v} - \frac{1}{\operatorname{Re}} \left( \frac{1}{H_b^2} \frac{d^2 \hat{v}}{d\eta^2} - \alpha^2 \hat{v} \right) \right] d\eta' + \frac{3 \operatorname{ctg} \beta \hat{H} (1 - \eta)}{\operatorname{Re}(1 - \varepsilon_\rho)} \Big\} - \\ & - \frac{1}{\operatorname{Re}} \left( \frac{1}{H_b^2} \frac{d^2 \hat{u}}{d\eta^2} - \frac{2\hat{H}}{H_b^3} \frac{d^2 u_b}{d\eta^2} - \alpha^2 \hat{u} + \frac{\alpha^2 \eta \hat{H}}{H_b} \frac{du_b}{d\eta} \right) + 2i\alpha u_b \hat{u} - \\ & - \frac{i\alpha \eta}{H_b} \frac{du_b^2}{d\eta} \hat{H} + \frac{1}{H_b} \frac{d(u_b \hat{v})}{d\eta} = \lambda \hat{u} - \lambda \frac{\eta \hat{H}}{H_b} \frac{du_b}{d\eta} + i\alpha \lambda H_b \int_\eta^1 \hat{v} d\eta'; \quad (10) \end{aligned}$$

$$\hat{u} \Big|_{\eta=0} = 0, \quad (11)$$

$$\frac{1}{H_b} \frac{d\hat{u}}{d\eta} \Big|_{\eta=1} - \varepsilon_\mu n \tilde{\eta}_y \frac{d\hat{u}^g}{d\tilde{\eta}} \Big|_{\tilde{\eta}=1} + \frac{\tilde{\eta}_y \hat{H}}{\varepsilon_2 H_b^2} \frac{du_b}{d\eta} \Big|_{\eta=1} + i\alpha (1 - \varepsilon_\mu) \hat{v} \Big|_{\eta=1} = 0;$$

$$\hat{v} - i\alpha \left( \eta u_b - \int_0^\eta u_b(\eta') d\eta' \right) \hat{H} + i\alpha H_b \int_0^\eta \hat{u}(\eta') d\eta' = 0; \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & - \frac{\varepsilon_2}{1 - \varepsilon_2 H_b} \frac{d(u_b^g \hat{v}^g)}{d\tilde{\eta}} + 2i\alpha u_b^g \hat{u}^g + \frac{i\alpha \tilde{\eta} \varepsilon_2 \hat{H}}{1 - \varepsilon_2 H_b} \frac{d(u_b^g)^2}{d\tilde{\eta}} + i\alpha \left\{ \hat{P}^g \Big|_{\tilde{\eta}=1} + \frac{\varepsilon_2 K \hat{H}}{1 - \varepsilon_2 H_b} (1 - \tilde{\eta}) + \right. \\ & + \frac{1 - \varepsilon_2 H_b}{\varepsilon_2} \int_{\tilde{\eta}}^1 \left[ \frac{1}{\varepsilon_2 \operatorname{Re}^g} \left( \tilde{\eta}_y^2 \frac{d^2 \hat{v}^g}{d\tilde{\eta}^2} - \alpha^2 \hat{v}^g \right) - i\alpha u_b^g \hat{v}^g \right] d\tilde{\eta}' \Big\} + \frac{i\alpha \tilde{\eta} \varepsilon_2 \hat{H}}{1 - \varepsilon_2 H_b} K - \\ & - \frac{1}{\varepsilon_2 \operatorname{Re}^g} \left[ \tilde{\eta}_y^2 \frac{d^2 \hat{u}^g}{d\tilde{\eta}^2} - 2\tilde{\eta}_y^3 \hat{H} \frac{d^2 u_b^g}{d\tilde{\eta}^2} - \alpha^2 \left( \hat{u}^g + \frac{\varepsilon_2 \tilde{\eta} \hat{H}}{1 - \varepsilon_2 H_b} \frac{du_b^g}{d\tilde{\eta}} \right) \right] = \\ & = \frac{\lambda}{n} \hat{u}^g - \frac{i\alpha (1 - \varepsilon_2 H_b)}{\varepsilon_2} \frac{\lambda}{n} \int_{\tilde{\eta}}^1 \hat{v}^g d\tilde{\eta}' + \frac{\lambda \tilde{\eta} \varepsilon_2 \hat{H}}{1 - \varepsilon_2 H_b} \frac{1}{n} \frac{du_b^g}{d\tilde{\eta}}; \quad (13) \end{aligned}$$

$$\hat{u} \Big|_{\eta=1} = n \hat{u}^g \Big|_{\tilde{\eta}=1}, \quad \hat{u}^g \Big|_{\tilde{\eta}=0} = 0; \quad (14)$$

$$\hat{v}^g - i\alpha \left( \tilde{\eta} u_b^g - \int_0^{\tilde{\eta}} u_b^g(\tilde{\eta}') d\tilde{\eta}' \right) \hat{H} - i\alpha \frac{1 - \varepsilon_2 H_b}{\varepsilon_2} \int_0^{\tilde{\eta}} \hat{u}^g(\tilde{\eta}') d\tilde{\eta}' = 0. \quad (15)$$

В уравнениях (9)–(15) давление в обеих фазах выражено через возмущения поля скорости и толщины слоя жидкости:

$$\hat{P} = \hat{P}|_{\eta=1} + H_b \int_{\eta}^1 \left[ -\lambda \hat{v} + i\alpha u_b \hat{v} - \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{1}{H_b^2} \frac{d^2 \hat{v}}{d\eta^2} - \alpha^2 \hat{v} \right) \right] d\eta' + \frac{3 \text{ctg } \beta \hat{H}}{\text{Re}(1 - \varepsilon_\rho)} (1 - \eta),$$

$$\hat{P}|_{\eta=1} = \varepsilon_\rho n^2 \hat{P}^g|_{\tilde{\eta}=1} - \frac{2i\alpha\varepsilon}{\text{Re}} \hat{u}|_{\eta=1} (1 - \varepsilon_\mu) + \frac{(3 \text{Fi})^{1/3} \alpha^2}{(\sin \beta)^{1/3} \text{Re}^{5/3}} \hat{H},$$

$$\hat{P}^g = \hat{P}^g|_{\tilde{\eta}=1} + \frac{1 - \varepsilon_2 H_b}{\varepsilon_2} \int_{\tilde{\eta}}^1 \left[ \frac{\lambda}{n} \hat{v}^g - i\alpha u_b^g \hat{v}^g + \frac{1}{\varepsilon_2 \text{Re}^g} \left( \tilde{\eta}_y^2 \frac{d^2 \hat{v}^g}{d\tilde{\eta}^2} - \alpha^2 \hat{v}^g \right) \right] d\tilde{\eta}' + \frac{\varepsilon_2 K \hat{H}}{1 - \varepsilon_2 H_b} (1 - \tilde{\eta}).$$

Для аппроксимации полей скорости  $[\hat{u}(\eta), \hat{v}(\eta)]$  и  $[\hat{u}^g(\tilde{\eta}), \hat{v}^g(\tilde{\eta})]$  использовались полиномы Чебышева  $T_m(\eta_1)$ ,  $\eta_1 = 2\eta - 1$  и  $T_m(\tilde{\eta}_1)$ ,  $\tilde{\eta}_1 = 2\tilde{\eta} - 1$  соответственно:

$$\hat{u}(\eta) = \frac{1}{2} \hat{U}_1 + \sum_{m=2}^M \hat{U}_m T_{m-1}(\eta_1), \quad \hat{v}(\eta) = \frac{1}{2} \hat{V}_1 + \sum_{m=2}^M \hat{V}_m T_{m-1}(\eta_1), \quad \eta_1 = 2\eta - 1,$$

$$\hat{u}^g(\tilde{\eta}) = \frac{1}{2} (\hat{U}^g)_1 + \sum_{m=2}^{M^g} (\hat{U}^g)_m T_{m-1}(\tilde{\eta}_1), \quad \hat{v}^g(\tilde{\eta}) = \frac{1}{2} (\hat{V}^g)_1 + \sum_{m=2}^{M^g} (\hat{V}^g)_m T_{m-1}(\tilde{\eta}_1), \quad \tilde{\eta}_1 = 2\tilde{\eta} - 1.$$

В ходе расчетов путем изменения общего количества полиномов  $M$  и  $M^g$  обеспечено выполнение следующих условий аппроксимации функций  $\hat{u}(\eta)$ ,  $\hat{u}^g(\tilde{\eta})$  соответственно:  $|\hat{U}_M| / \sup |\hat{U}_m| < 10^{-3}$ ,  $|\hat{U}_{M^g}^g| / \sup |\hat{U}_m^g| < 10^{-3}$ .

В результате задача сводится к обобщенной задаче на собственные значения для комплексных матриц общего вида:

$$A \hat{x} = \lambda B \hat{x}, \quad \hat{x} = (\hat{H}, \hat{P}^g|_{\tilde{\eta}=1}, \hat{U}_m, \hat{V}_m, (\hat{U}^g)_m, (\hat{V}^g)_m)^T. \quad (16)$$

Матрицы  $A$  и  $B$  имеют размерность  $2(M + M^g + 1)$ , их элементы определяются численно путем перебора единичных векторов возмущений. Для каждого вектора рассчитывалась невязка линейризованных уравнений и определялись элементы соответствующих столбцов матриц  $A$  и  $B$ . Граничные условия (11) используются вместо двух последних уравнений в разложении (10) по полиномам Чебышева. Аналогично для учета граничных условий (14) отбрасываются последние два уравнения в разложении (13) по полиномам Чебышева.

Для получения ответа на вопрос об устойчивости стационарного решения  $[u_b(\eta), P_b(x, \eta), u_b^g(\tilde{\eta}), P_b^g(x, \tilde{\eta}), H_b]$  необходимо проанализировать  $2(M + M^g + 1)$  собственных чисел задачи (16), варьируя волновое число возмущений  $\alpha = 2\pi H_0/L$  ( $L$  — длина волны возмущения). Решение устойчиво, если вещественные части всех собственных значений больше или равны нулю при всех положительных значениях волнового числа. Возмущение является нейтральным, если вещественная часть соответствующего ему собственного значения равна нулю:  $\text{Real}(\lambda) = 0$ . В этом случае фазовая скорость возмущения  $c_{neut} \equiv \text{Imag}(\lambda)/\alpha$ .

В задаче (16) имеется девять параметров:  $\alpha$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\varepsilon_\mu$ ,  $\varepsilon_\rho$ ,  $n$ ,  $\beta$ ,  $\text{Fi}$ ,  $\text{Re}$ ,  $\text{Re}^g$ . Нетрудно показать, что  $n = \varepsilon_2 \varepsilon_\mu \text{Re}^g / (\varepsilon_\rho \text{Re})$  и только восемь параметров являются независимыми. Например, с учетом соотношения  $\varepsilon_2 = (3 \text{Re} / (\sin \beta \text{Ka}))^{1/3} (\sqrt{\sigma / [\rho g (1 - \varepsilon_\rho)]} D) / \text{Ka}^{3/2}$ , где  $\text{Ka} \equiv \text{Fi}^{1/11}$  — число Капицы, такими параметрами являются  $\alpha$ ,  $\text{Ka}$ ,  $\beta$ ,  $\sqrt{\sigma / (\rho g)} / D$ ,  $\varepsilon_\mu$ ,  $\varepsilon_\rho$ ,  $\text{Re}$ ,  $\text{Re}^g$ . Пять параметров задачи  $\text{Ka}$ ,  $\beta$ ,  $\sqrt{\sigma / (\rho g)} / D$ ,  $\varepsilon_\mu$ ,  $\varepsilon_\rho$  зависят только от физических свойств газа и жидкости и от размера канала.

Размерные и безразмерные параметры, использованные в расчетах

$\sqrt{\sigma/(\rho g)}/D$		$U_{gs}, \text{ м/с}$	$Re^g$	
$D = 10 \text{ мм}$	$D = 20 \text{ мм}$		$D = 10 \text{ мм}$	$D = 20 \text{ мм}$
0,2765	0,1383	0,1	33,3	66,6
0,2765	0,1383	5,0	1666,5	3333,0
0,2765	0,1383	6,0	1999,8	3999,6
0,2765	0,1383	10,0	3333,0	6666,0
0,2765	0,1383	15,0	4999,5	9999,0
0,2765	0,1383	20,0	6666,0	13 332,0

Для тестирования алгоритма решения задачи (16) были построены линии нейтральной устойчивости, полученные ранее в работе [14], в которой рассматривалось однофазное течение Пуазейля для плоского канала. В работе [8] исследовалось гравитационное стекание жидкости со свободной поверхностью вдоль наклонной плоскости. Построены нейтральные кривые двух неустойчивых мод: поверхностной моды и сдвиговой моды, приводящих на нелинейной стадии развития к возникновению волн Капицы и волн Толмина — Шлихтинга соответственно. Для угла наклона  $\beta = 4^\circ$  были построены нейтральные кривые, полученные ранее в [8], при различных значениях числа Капицы. Заметим, что при больших значениях числа Капицы характер нейтральных кривых  $\alpha_{neut}(Re)$  для сдвиговой моды существенно отличается от характера нейтральной кривой для задачи, рассмотренной в [14]. В работе [15] в полной постановке рассчитывались различные нелинейные волновые режимы при противоточном течении газа и жидкости в плоском вертикальном канале. Для волн малой амплитуды в [15] построены нейтральные кривые для системы вода — воздух при  $D = 10$  мм. В ходе решения задачи (16) удалось воспроизвести эти результаты. Следует отметить, что в данной работе применялись методы и алгоритмы, отличные от методов и алгоритмов, использованных в [15].

**3. Результаты расчетов.** В расчетах варьировались числа Рейнольдса для жидкости и газа, угол наклона ( $\beta = 10, 45, 90^\circ$ ), ширина канала  $D = 10, 20$  мм при  $Ka = 9,262$ ,  $\varepsilon_\rho = 0,0012$ ,  $\varepsilon_\mu = 0,0182$ . В таблице приведены размерные и безразмерные параметры, использованные в расчетах. На первом этапе при фиксированном значении среднерасходной скорости газа  $U_{gs}$  и различных значениях  $Re$  вычислялось общее количество неустойчивых мод в задаче (16) путем уменьшения с малым шагом волнового числа  $\alpha$ . На втором этапе были построены нейтральные кривые для найденных неустойчивых мод. Результаты расчетов представлены на рис. 2–4. В исследованном диапазоне параметров обнаружены только две неустойчивые моды: поверхностная (на нелинейной стадии развития соответствующая волнам Капицы) и сдвиговая (соответствующая волнам Толмина — Шлихтинга) в газовой фазе.

На рис. 2 сплошные линии соответствуют безразмерным волновым числам  $\gamma = 2\pi\sqrt{\sigma/(\rho g)}/\lambda_{neut}^*$  нейтрального возмущения поверхностной моды при различных значениях скорости газа. Возмущения этой моды с длиной волны  $L > \lambda_{neut}^*$  (области ниже сплошных линий 1–4 на рис. 2) со временем нарастают. При малых значениях скорости газа существует критическое число Рейнольдса  $Re_{cr}$ , соответствующее началу волнообразования (см. рис. 2, а). С увеличением  $U_{gs}$  диапазон чисел Рейнольдса, в котором течение устойчиво, уменьшается и затем исчезает. Следует отметить, что при малых углах наклона  $\beta$  характер зависимости  $\lambda_{neut}^*(Re)$  существенно изменяется с увеличением скорости  $U_{gs}$ .

Штриховые линии на рис. 2 соответствуют волновым числам нейтрального возмущения сдвиговой моды. Волновые числа неустойчивых возмущений этой моды имеют верхнюю и нижнюю границы, которым соответствуют две ветви кривой нейтральных возмущений. Фазовая скорость нейтральных возмущений этой моды имеет большое отрица-

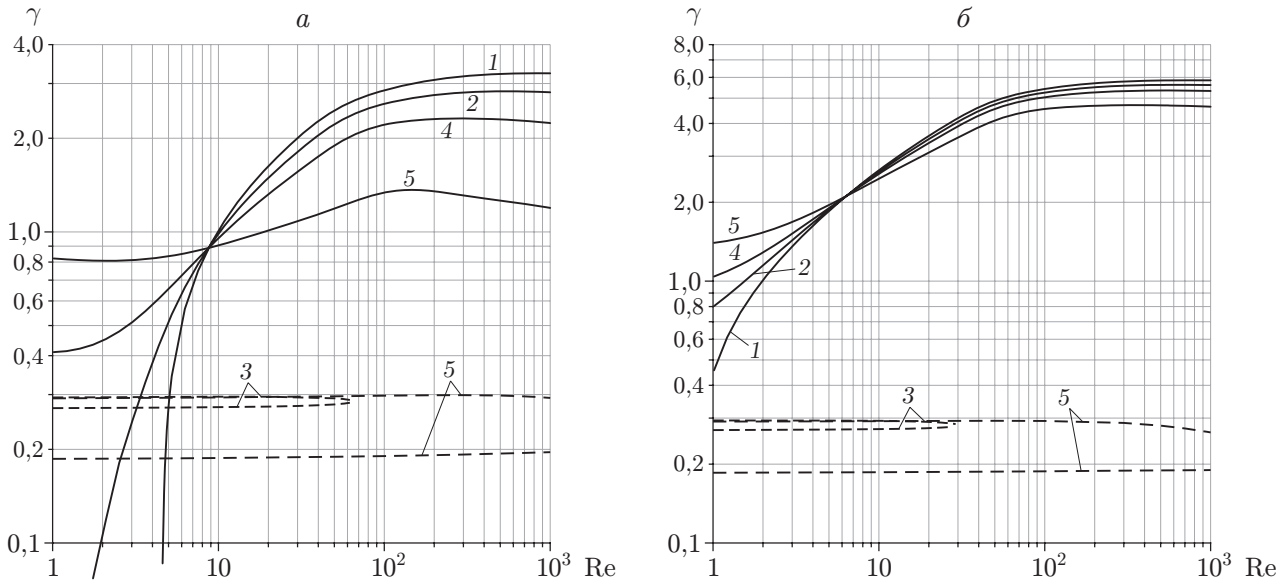


Рис. 2. Зависимость волнового числа нейтральных возмущений для двух мод от числа Рейнольдса при  $D = 20$  мм и различных значениях угла наклона канала и скорости газа:

$a$  —  $\beta = 10^\circ$ ,  $b$  —  $\beta = 45^\circ$ ; сплошные линии — поверхностная мода, штриховые — сдвиговая мода в газовой фазе; 1 —  $U_{gs} = 0,1$  м/с, 2 —  $U_{gs} = 5$  м/с, 3 —  $U_{gs} = 6$  м/с, 4 —  $U_{gs} = 10$  м/с, 5 —  $U_{gs} = 20$  м/с

тельное значение. При уменьшении скорости газа  $U_{gs}$  эта мода исчезает и длина волны нейтрального возмущения  $\lambda_{neut}^*$  слабо зависит от угла наклона  $\beta$  и числа Рейнольдса  $Re$ .

На рис. 3 все линии соответствуют нейтральным возмущениям поверхностной моды для двух значений ширины канала. В расчетах, результаты которых приведены на рис. 3, б, число Рейнольдса для газа  $Re^g$  меняется в более широком диапазоне. Несмотря на это, фазовая скорость и волновое число на рис. 3, б варьируются в меньшем диапазоне, чем на рис. 3, а. Следует отметить, что при больших скоростях газа фазовые скорости могут принимать отрицательные значения (линия 5' на рис. 3, а).

На рис. 4 все линии соответствуют нейтральным возмущениям сдвиговой моды. Кривая 1 находится вблизи линии нейтральной устойчивости классического течения Пуазейля в плоском канале (на рис. 4 не приведена). Нейтральные кривые этой моды слабо зависят от числа Рейнольдса жидкости (см. рис. 2), поэтому на рис. 4 приведены кривые для одного значения  $Re$ . Зависимости волнового числа и фазовой скорости от ширины и угла наклона канала также являются достаточно слабыми (см. рис. 4). Увеличение параметра  $\varepsilon_\rho$  при фиксированных значениях параметров  $Ka$ ,  $\beta$ ,  $\sqrt{\sigma/(\rho g)}/D$ ,  $\varepsilon_\mu$ ,  $Re$  приводит к существенному изменению характера кривых нейтральной устойчивости сдвиговой моды (см. рис. 4).

**Заключение.** С использованием полных уравнений Навье — Стокса для обеих фаз исследована линейная устойчивость противоточного течения жидкости и газа в наклонном канале. В качестве независимых параметров использовались число Рейнольдса для жидкой фазы и среднерасходная скорость в газе, что является принципиальным отличием от других работ. Показано, что динамика периодических возмущений описывается восьмью параметрами:  $2\pi\sqrt{\sigma/(\rho g)}/L$ ,  $Ka$ ,  $\beta$ ,  $\varepsilon_\mu$ ,  $\varepsilon_\rho$ ,  $\sqrt{\sigma/(\rho g)}/D$ ,  $Re$ ,  $Re^g$ . Рассчитаны инкременты нарастания (или затухания) во времени различных мод периодических возмущений. Вследствие большого количества параметров расчеты проведены только для системы вода — воздух.



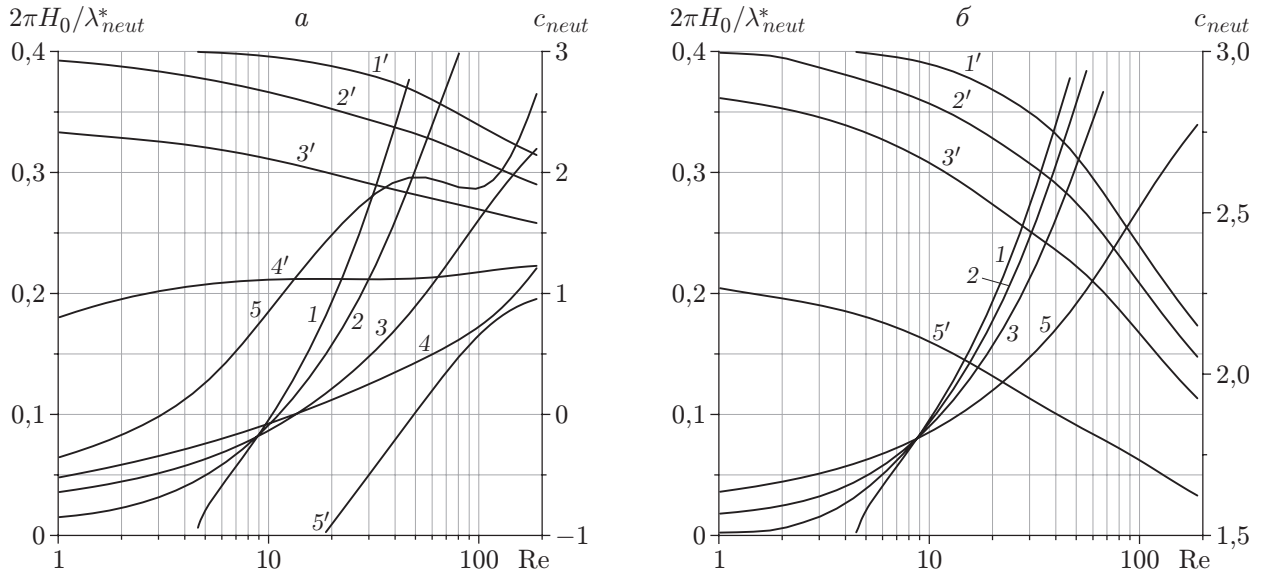


Рис. 3. Зависимости волнового числа (1–5) и фазовой скорости (1'–5') нейтральных возмущений для поверхностной моды от числа Рейнольдса при  $\beta = 10^\circ$  и различных значениях ширины канала и скорости газа:  
 а —  $D = 10$  мм, б —  $D = 20$  мм; 1, 1' —  $U_{gs} = 0,1$  м/с, 2, 2' —  $U_{gs} = 5$  м/с, 3, 3' —  $U_{gs} = 10$  м/с, 4, 4' —  $U_{gs} = 15$  м/с, 5, 5' —  $U_{gs} = 20$  м/с

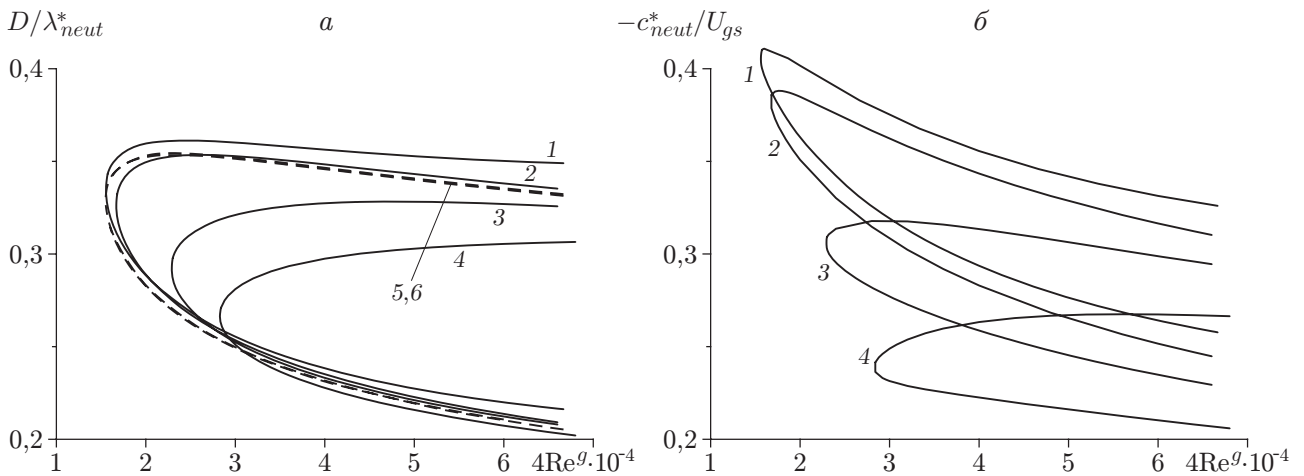


Рис. 4. Зависимости волнового числа (а) и фазовой скорости (б) нейтральных возмущений для сдвиговой моды в газовой фазе от числа Рейнольдса для газа при  $Re = 10$  и различных значениях угла наклона, ширины канала и параметра  $\varepsilon_\rho$ :  
 1–4 —  $\beta = 10^\circ$ ,  $D = 10$  мм (1 —  $\varepsilon_\rho = 0,0012$ , 2 —  $\varepsilon_\rho = 0,01$ , 3 —  $\varepsilon_\rho = 0,04$ , 4 —  $\varepsilon_\rho = 0,08$ );  
 5 —  $\beta = 10^\circ$ ,  $D = 20$  мм,  $\varepsilon_\rho = 0,0012$ ; 6 —  $\beta = 90^\circ$ ,  $D = 10$  мм,  $\varepsilon_\rho = 0,0012$

В исследованном диапазоне параметров обнаружены только две неустойчивые моды: поверхностная (на нелинейной стадии развития и при малых скоростях газа соответствующая волнам Капицы) и сдвиговая (волны Толмина — Шлихтинга) в газовой фазе. Рассчитаны длина волны и фазовая скорость для нейтральных возмущений обеих мод в зависимости от числа Рейнольдса жидкости. Показано, что для поверхностной моды эти зависимости существенно зависят от скорости газа, угла наклона канала и его ширины. Установлено, что при уменьшении ширины канала существенно усиливается взаимодействие газа и жидкости при одних и тех же значениях числа Рейнольдса для обеих фаз.

Неустойчивые возмущения сдвиговой моды обуславливают переход к турбулентности в газовой фазе. Эти возмущения возникают при критическом числе Рейнольдса для газа, слабо зависящем от угла наклона и ширины канала, а также от параметров течения жидкости.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Nusselt W.** Die Oberflächenkondensation des Wasserdampfes // Z. VDI. 1916. Bd 60. S. 541–546.
2. **Капица П. Л.** Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости. 1. Свободное течение // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1948. Т. 18, вып. 1. С. 3–28.
3. **Капица П. Л., Капица С. П.** Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости. 3. Опытное изучение волнового режима течения // Журн. эксперим. и теорет. физики. 1949. Т. 19, вып. 2. С. 105–120.
4. **Benjamin T. B.** Wave formation in laminar flow down on inclined plane // J. Fluid Mech. 1957. V. 2. P. 554–574.
5. **Yih C.-H.** Stability of liquid flow down an inclined plane // Phys. Fluids. 1963. V. 6. P. 321–334.
6. **Lin S. P.** Instability of a liquid film flowing down an inclined plane // Phys. Fluids. 1967. V. 10. P. 308–313.
7. **De Bruin G. J.** Stability of a layer of liquid flowing down an inclined plane // J. Engng Math. 1974. V. 8. P. 259–270.
8. **Floryan J. M., Davis S. H., Kelly R. E.** Instabilities of a liquid film flowing down a slightly inclined plane // Phys. Fluids. 1987. V. 30. P. 983–989.
9. **Yih C. S.** Instability due to viscosity stratification // J. Fluid Mech. 1967. V. 27. P. 337–352.
10. **Yiantsios S. G., Higgins B. G.** Numerical solution of eigenvalue problems using the compound matrix method // J. Comput. Phys. 1988. V. 74. P. 25–40.
11. **Yiantsios S. G., Higgins B. G.** Linear stability of plane Poiseuille flow of two superposed fluids // Phys. Fluids. 1988. V. 31. P. 3225–3238.
12. **Tilley B. S., Davis S. H., Bankoff S. G.** Linear stability theory of two-layer fluid flow in an inclined channel // Phys. Fluids. 1994. V. 6. P. 3906–3922.
13. **Maron D. M., Dukler A. E.** Flooding and upward film flow in vertical tubes. 2. Speculations on film flow mechanisms // Intern. J. Multiphase Flow. 1984. V. 10. P. 599–621.
14. **Orszag S. A.** Accurate solution of the Orr — Sommerfeld stability equation // J. Fluid Mech. 1971. V. 50. P. 689–703.
15. **Trifonov Y. Y.** Counter-current gas-liquid wavy film flow between the vertical plates analyzed using the Navier — Stokes equations // AIChE J. 2010. V. 56. P. 1975–1987.

*Поступила в редакцию 6/XII 2016 г.,  
в окончательном варианте — 16/I 2017 г.*