

Ю. И. Кадашевич, С. П. Помяткин

ТЕОРИЯ ПОЛЗУЧЕСТИ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ МАТЕРИАЛОВ,
УЧИТЫВАЮЩАЯ ВЛИЯНИЕ ФАЗЫ ПОДОБИЯ ДЕВИАТОРОВ

В [1] впервые экспериментально обнаружено существенное отклонение от законов подобия девиаторов напряжений и деформаций в условиях ползучести. В [2—7] эта проблема нашла свое дальнейшее развитие. В [8] высказана точка зрения авторов данной публикации на роль влияния фазы подобия девиаторов в теории пластичности. Ниже положения из [8] распространяются на теорию ползучести.

1. В [9] предложена формула связи двух соосных девиаторов a'_{ij} и b'_{ij} :

$$(1.1) \quad a'_{ij} = 2G \left[\frac{\cos(3\beta + \omega)}{\cos 3\beta} b'_{ij} - \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{b_2}} \frac{\sin \omega}{\cos 3\beta} \left(b'_{ik} b'_{kj} - \frac{1}{3} b_2 \delta_{ij} \right) \right],$$

$$2G = f_1(\sqrt{b_2}, \beta), \quad \omega = f_2(\sqrt{b_2}, \beta), \quad \omega = \alpha - \beta,$$

$$\beta = -\frac{1}{3} \arcsin \frac{\sqrt{6} b_3}{b_2^{3/2}}, \quad -\frac{\pi}{6} \leq \beta \leq \frac{\pi}{6},$$

$$\alpha = -\frac{1}{3} \arcsin \frac{\sqrt{6} a_2}{a_2^{3/2}}, \quad -\frac{\pi}{6} \leq \alpha \leq \frac{\pi}{6},$$

$$a_2 = a'_{ij} a'_{ij}, \quad a_2 = a'_{ik} a'_{kj} a'_{ji},$$

$$b_2 = b'_{ij} b'_{ij}, \quad b_2 = b'_{ik} b'_{kj} b'_{ji}.$$

Здесь ω — фаза подобия девиаторов a'_{ij} и b'_{ij} , характеризующая меру отклонения девиаторов от закона подобия. В [10] рекомендована модификация (1.1) в виде

$$a'_{ij} = \sqrt{a_2} \left[\sin \alpha \frac{\partial(\sqrt{b_2} \sin \beta)}{\partial b'_{ij}} + \cos \alpha \frac{\partial(\sqrt{b_2} \cos \beta)}{\partial b'_{ij}} \right],$$

$$\sqrt{a_2} = \Phi_1(\sqrt{b_2}, \beta), \quad \omega = \Phi_2(\sqrt{b_2}, \beta).$$

В [11] предложена несколько иная форма представления двух соосных девиаторов:

$$a'_{ij} = W \left[\frac{1}{\sqrt{b_2}} \frac{\partial \sqrt{b_2}}{\partial b'_{ij}} + \operatorname{tg} \omega \frac{\partial \beta}{\partial b'_{ij}} \right],$$

$$W = \sqrt{a_2} \sqrt{b_2} \cos \omega, \quad W = \Phi_3(\sqrt{b_2}, \beta), \quad \omega = \Phi_4(\sqrt{b_2}, \beta).$$

В [12] рекомендуется представление

$$a'_{ij} = W \left[(1 - \operatorname{tg} 3\beta \operatorname{tg} \omega) \frac{b'_{ij}}{b_2} - \frac{\operatorname{tg} 3\beta \operatorname{tg} \omega}{b_3} \left(b'_{ik} b'_{kj} - \frac{1}{3} b_2 \delta_{ij} \right) \right].$$

И наконец, в [8] предлагается зависимость

$$(1.2) \quad a'_{ij} = \sqrt{a_2} \left[\cos \omega \frac{b'_{ij}}{\sqrt{b_2}} - \sin \omega \frac{b_{ij}^*}{\sqrt{b_2}} \right], \quad \sqrt{a_2} = \Phi_1(\sqrt{b_2}, \beta), \quad \omega = \Phi_2(\sqrt{b_2}, \beta),$$

где

$$b_{ij}^* = \frac{\sqrt{6}}{\cos 3\beta} \left[\frac{b'_{ik} b'_{kj}}{\sqrt{b_2}} - \frac{\sqrt{b_2} \delta_{ij}}{3} + \frac{\sin 3\beta}{\sqrt{6}} b'_{ij} \right].$$

Формулу (1.2) можно переписать и в более компактном виде

$$a'_{ij} = \sqrt{a_2} [\cos \omega \eta_{ij} - \sin \omega \mu_{ij}].$$

Здесь $\eta_{ij} = \partial \sqrt{b_2} / \partial b'_{ij}$ и $\mu_{ij} = -\sqrt{b_2} \partial \beta / \partial b'_{ij}$ — нормированные градиенты инвариантов $\sqrt{b_2}$ и β , обладающие очевидными свойствами: $\eta_{ij} \eta_{ij} = 1$, $\mu_{ij} \mu_{ij} = 1$, $\eta_{ij} \mu_{ij} = 0$. Если потребовать, чтобы

$$\operatorname{tg} \omega = \frac{\partial \Phi_1(\sqrt{b_2}, \beta) / \partial \beta}{\sqrt{b_2} \partial \Phi_1(\sqrt{b_2}, \beta) / \partial \sqrt{b_2}},$$

то соотношения (1.2) будут градиентного типа. Если предположить, что $\Phi_1(\sqrt{b_2}, \beta) = \Phi_1(\sqrt{b_2} \varphi(\beta))$, то $\operatorname{tg} \omega = \varphi'(\beta) / \varphi(\beta)$. Отметим, что в [11, 12]

$$a'_{ij} = d\varepsilon_{ij}^H / dt, \quad b'_{ij} = \sigma'_{ij},$$

а в [8]

$$a'_{ij} = d\varepsilon_{ij}^H, \quad b'_{ij} = \sigma'_{ij} - \rho_{ij}.$$

Здесь ε_{ij}^H — девиатор тензора неупругих деформаций; σ'_{ij} — девиатор тензора напряжений; ρ_{ij} — девиатор тензора микронапряжений.

Из формул (1.2) можно найти и более общие соотношения, которые лучше отвечают опытным данным на ползучесть. В частности,

$$a'_{ij} = d\varepsilon_{ij}^H / d\mu, \quad b'_{ij} = \sigma'_{ij} - \rho_{ij}, \quad \rho_{ij} = k(\lambda, \beta) \varepsilon_{ij}^H, \\ d\mu / d\lambda = 1 / f(\lambda, \lambda^*, \mu), \quad d\lambda = (d\varepsilon_{ij}^H d\varepsilon_{ij}^H)^{1/2}, \quad \lambda^* = d\lambda / dt.$$

Легко убедиться, что при таком представлении можно получить различные варианты теории пластичности и ползучести.

2. В качестве простейшего варианта теории, учитывающей фазу подобия девиаторов, примем

$$b'_{ij} = \sigma'_{ij} - \rho_{ij} \equiv \tau_{ij}, \quad \Phi_1(\sqrt{b_2}, \beta) = \Phi_1(\sqrt{b_2} \varphi(\beta)), \quad f(\lambda, \lambda^*, \mu) = Q(\lambda, \lambda^*)$$

(τ_{ij} — девиатор тензора активных напряжений). Тогда соотношения (1.2) запишем в виде

$$d\varepsilon_{ij}^H / d\mu = \Phi_1(\sqrt{\tau_2} \varphi(\beta)) L_{ij}, \quad d\mu / d\lambda = 1 / Q(\lambda, \lambda^*),$$

где

$$L_{ij} = \cos \omega \cdot \tau_{ij} / \sqrt{\tau_2} - \sin \omega \cdot \tau_{ij}^* / \sqrt{\tau_2}, \quad \tau_2 = \tau_{ij} \tau_{ij},$$

или

$$Q(\lambda, \lambda^*) d\varepsilon_{ij}^H / d\lambda = \Phi_1(\sqrt{\tau_2} \varphi(\beta)) L_{ij}.$$

Отсюда $Q(\lambda, \lambda^*) = \Phi_1(\sqrt{\tau_2} \varphi(\beta))$ или $\lambda^* = F(\sqrt{\tau_2} \varphi(\beta), \lambda)$.

Учитывая, что $d\varepsilon_{ij}^H / d\lambda = (d\varepsilon_{ij}^H / dt) (1 / \lambda^*)$, получим $d\varepsilon_{ij}^H / dt = \lambda^* L_{ij}$ или окончательно $d\varepsilon_{ij}^H / dt = F(\sqrt{\tau_2} \varphi(\beta), \lambda) L_{ij}$.

В [11] функция $\varphi(\beta) = 1 + k_1 \sin 3\beta + k_2 \sin^2 3\beta$. В [13] предложена аппроксимация при помощи показательной функции $\varphi(\beta) = \exp(k_1 \sin 3\beta + k_2 \sin^2 3\beta)$, а в [8] — зависимость

$$(2.1) \quad \varphi(\beta) = \begin{cases} \exp(k_1 (\cos 6\beta - 1)), & \beta \leq 0, \\ \exp(k_2 (\cos 6\beta - 1)), & \beta \geq 0. \end{cases}$$

3. Для демонстрации возможностей теории, учитывающей соосность девиаторов, рассмотрим примеры деформирования материалов в условиях ползучести. Положим $\tau_{ij} = \sigma'_{ij} - k\varepsilon_{ij}^H$, $F(\sqrt{\tau_2} \varphi(\beta), \lambda) = B[\sqrt{\tau_2} \varphi(\beta) + k\lambda]^n \lambda^m$. Тогда рабочие формулы запишем как

$$(3.1) \quad d\varepsilon_{ij}^H / dt = B[\sqrt{\tau_2} \varphi(\beta) + k\lambda]^n \lambda^m L_{ij}, \\ \tau_{ij} = \sigma'_{ij} - k\varepsilon_{ij}^H, \quad \sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{ii} \delta_{ij},$$

$$L_{ij} = \cos \omega \frac{\tau_{ij}}{\sqrt{\tau_2}} - \sin \omega \frac{\tau_{ij}^*}{\sqrt{\tau_2}}, \quad \operatorname{tg} \omega = \varphi'(\beta) / \varphi(\beta),$$

$$\tau_{ij}^* = \frac{\sqrt{6}}{\cos 3\beta} \left[\frac{\tau_{ih}\tau_{kj}}{\sqrt{\tau_2}} - \frac{\sqrt{\tau_2}\delta_{ij}}{3} + \frac{\sin 3\beta}{\sqrt{6}} \tau_{ij} \right],$$

$$\tau_2 = \tau_{ij}\tau_{ij}, \tau_3 = \tau_{ih}\tau_{kj}\tau_{ji}, d\lambda = (d\varepsilon_{ij}^H d\varepsilon_{ij}^H)^{1/2},$$

$$\beta = -\frac{1}{3} \arcsin \frac{\sqrt{6}}{3} \frac{\tau_3}{\tau_2^{3/2}}, \quad -\frac{\pi}{6} \leq \beta \leq \frac{\pi}{6}.$$

Функция $\varphi(\beta)$ имеет вид (2.1). Параметры k, k_1, k_2, B, n, m — константы материала, B, n, m находили из опытов на одноосную ползучесть (считается, что справедлив закон деформационного упрочнения $\varepsilon = B\sigma^n \varepsilon^m$), k_1, k_2 определяли, например, из [14], перестроив опытные данные в осях $\lg \omega \sim \xi$. Способ нахождения k укажем ниже. Сравнение теории с опытами [5] при сложном нагружении для материала Ti6Al4V проводили так: при $\sigma_i = (3\sigma'_{ij}\sigma'_{ij}/2)^{1/2} = \text{const}$ и $\theta = \text{arctg}(\sqrt{3}\tau/\sigma) = \text{const}$ реализовывали процесс ползучести, а затем при t_* осуществляли поворот вектора напряжений на угол $\Delta\theta$, оставляя $\sigma_i = \text{const}$. Для этого материала $B = 7 \cdot 10^{-20}$, $n = 6$, $m = -3$, $\varphi(\beta) = 1$. Параметр k подбирали так, чтобы кривая $A(t)$ (A — диссипируемая в процессе ползучести работа,

$A = \int_0^t \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^E$) совпадала на участке $A(t_* + 0)$ с опытной кривой. Так, для данного материала $k = 1450$.

На рис. 1 приведены графики $A \sim t$, где 1 — опытная кривая стационарного нагружения ($\sigma_i = 637$ МПа = const, $\theta = 0 = \text{const}$), 2 — опытная кривая сложного нагружения ($\sigma_i = 637$ МПа = const, $\theta(t_* - 0) = 0$, $\theta(t_* + 0) = 90^\circ$), 3 — расчет сложного нагружения по предлагаемой теории ($k = 1450 = \text{const}$). Рассмотрим опыт [4]. Здесь при изменении θ во время t_* (после стационарного нагружения $\sigma_i = 230$ МПа, $\theta = 60^\circ$) σ_i уменьшалось до такой величины, чтобы график $A(t)$ оставался некоторое время неизменным (по сравнению со стационарным нагружением). В следующем опыте снова изменялось θ (после стационарного нагружения) и вновь подбиралось σ_i так, чтобы $A(t_* - 0) = A(t_* + 0)$. Получающаяся поверхность в пространстве напряжений представлена на рис. 2 кривой 2 ($B = 7 \cdot 10^{-34}$, $n = 18$, $m = -2$, $\varphi(\beta) = 1$, $k = 2000$). Ее можно назвать поверхностью равной интенсивности процесса ползучести [4, 5]. Кружками изображены экспериментальные данные по схеме описанных опытов [4]. Четко видно, что мгновенная поверхность ползучести меняет свою форму, это отвечает опытам. При $k = 0$ указанная поверхность остается круговой (кривая 1). Из опытов установлено [4, 5], что при $\sigma_i = \text{const}$ и изменениях θ после стационарного нагружения присутствует фаза подобия девиаторов $d\varepsilon_{ij}^H/dt$ и σ_{ij} , которая с течением времени

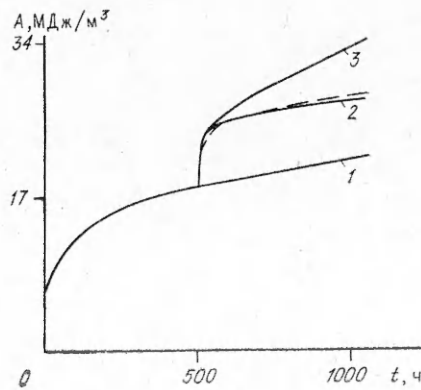


Рис. 1

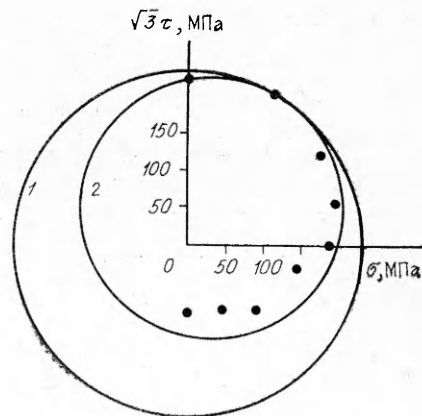


Рис. 2

стремится к нулю. В расчетах описываемых выше опытов при $k = \text{const}$ фаза подобия четко фиксируется, но остается постоянной.

На рис. 3 представлены расчеты фазы подобия ω по схеме опытов [4] ($\sigma_i = \text{const}$, а $\Delta\theta$ изменялось). Здесь $\omega = \alpha - \xi$, ξ — угол вида девиатора σ_{ij} , α — угол вида девиатора $d\varepsilon_{ij}^n/dt$, $k = k(\beta) = A_1 + A_2\beta$, $A_1 = 2000$, $A_2 = -1000$, β — угол вида девиатора τ_{ij} . На рис. 3 расчет ω по теории: линия 1 — $\Delta\theta = 30^\circ$ при $k = \text{const}$, 2 — $\Delta\theta = 30^\circ$ при $k = k(\beta)$, кружки — аппроксимированные по [5] опытные данные.

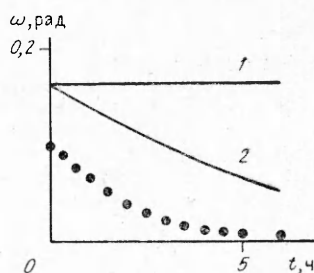


Рис. 3

Кроме того, на рис. 1 (кривая 3) видно, что «хвост» графика $A(t)$ лежит выше опытной кривой 2. Для устранения этого «дефекта» теории предлагалось использовать $k(\lambda) = C \exp(-\kappa\lambda) + D$ ($\kappa = 170$, $D = 250$, $C = 1,351 \cdot 10^6$). Расчет по этому варианту представлен на рис. 1 штриховой линией. Предложение $k(\lambda, \beta) = (C \exp(-\kappa\lambda) + D)(1 + A_3\beta)$ уточняет поведение фазы подобия.

Рассматривалась и другая форма связи тензоров ρ_{ij} и ε_{ij}^n :

$$d\rho_{ij}/d\lambda + a\rho_{ij} = b(\beta) d\varepsilon_{ij}^n/d\lambda.$$

Тогда рабочие формулы (3.1) примут вид

$$(3.2) \quad d\varepsilon_{ij}^n/dt = B [\sqrt{\tau_2} \varphi(\beta) + \sqrt{\rho_2}]^n \lambda^m L_{ij},$$

$$d\rho_{ij}/dt = b(\beta) d\varepsilon_{ij}^n/dt - a\rho_{ij} d\lambda/dt, \quad d\lambda/dt = B [\sqrt{\tau_2} \varphi(\beta) + \sqrt{\rho_2}]^n \lambda^m.$$

Здесь $\rho_2 = \rho_{ij}\rho_{ij}$; $a = \text{const}$, $b(\beta) = B_1 + B_2\beta$.

На рис. 4 приведены расчеты по формулам (3.2) для $\sigma_i = 637 \text{ МПа} = \text{const}$ (кривая 1 — $\theta = 0$, $\Delta\theta = 0$, 2 — $\Delta\theta = 90^\circ$, 3 — $\Delta\theta = 30^\circ$, штриховые линии — расчеты по теории при $a = 3$, $b(\beta) = \text{const} = 1400$). Фаза подобия девиаторов $d\varepsilon_{ij}^n/dt$ и σ_{ij} фиксируется и слабо убывает с течением времени.

На рис. 5 представлены данные расчета диссипируемой в процессе ползучести работы при стационарном нагружении материала АК4-1Т. В формуле (2.1) для этого сплава $k_1 = 0,0505$, $k_2 = 0,1364$. Расчет уже по простейшему варианту теории дает «расщепление» графиков $A(t)$ при $\sigma_i = \text{const}$ для разных θ (кривые 1—3 для $\theta = 90, 60^\circ$ и 0) и наличие постоянной фазы подобия девиаторов скоростей деформации ползучести и напряжений уже при стационарном нагружении, что соответствует результатам опытов.

Таким образом, сформулированная теория позволяет описывать ряд интересных эффектов при ползучести материалов, не чувствительных к виду напряженного состояния и реагирующих на вид нагружения, как при стационарном, так и при сложном нагружении.

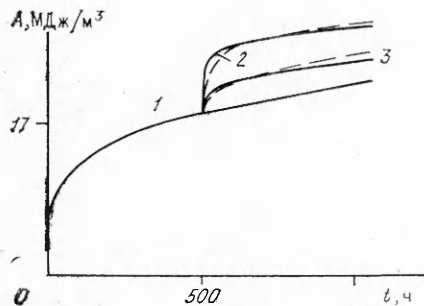


Рис. 4

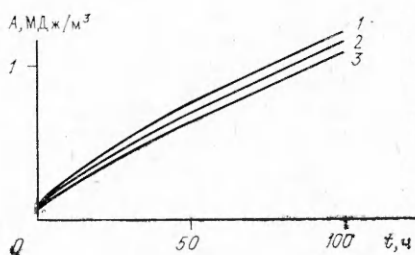


Рис. 5

ЛИТЕРАТУРА

1. Наместников В. С. О ползучести при постоянных нагрузках в условиях сложного напряженного состояния // Изв. АН СССР. ОТН.— 1957.— № 4.
2. Никитенко А. Ф., Соснин О. В. О соотношениях между приращениями деформаций ползучести и напряжениями при нестационарных режимах нагружения // ПМТФ.— 1978.— № 5.
3. Горев Б. В., Рубанов В. В., Соснин О. В. О ползучести материалов с разными свойствами при растяжении и сжатии // Пробл. прочности.— 1979.— № 7.
4. Соснин О. В. К вопросу о существовании потенциала ползучести // Инж. журнал. МТТ.— 1971.— № 5.
5. Никитенко А. Ф. Экспериментальное обоснование гипотезы существования поверхности ползучести в условиях сложного нагружения // Пробл. прочности.— 1984.— № 8.
6. Писаренко Г. С., Можаровский Н. С., Антипов Е. А. Пластичность и прочность материалов при нестационарных нагружениях.— Киев: Наук. думка, 1984.
7. Писаренко Г. С., Лебедев А. А. Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии.— Киев: Наук. думка, 1976.
8. Кадашевич Ю. И., Луценко А. М., Помыткин С. П. Статистическая теория пластичности, учитывающая вид напряженного состояния // Исследования по механике строительных конструкций и материалов.— Л.: Изд-во Ленингр. инж.-строит. ин-та, 1989.
9. Новожилов В. В. О связи между напряжениями и деформациями в нелинейно упругой среде // ПММ.— 1951.— Т. 15, вып. 2.
10. Черных К. Ф. О функциональных связях между соосными симметричными тензорами второго ранга // Проблемы механики твердого деформированного тела: к 60-летию В. В. Новожилова/Отв. ред. Л. И. Седов.— Л.: Судостроение, 1970.
11. Цвелодуб И. Ю. О некоторых подходах к описанию установившейся ползучести в сложных средах // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики.— 1976.— Вып. 25.
12. Никитенко А. Ф. Об одной гипотезе в теории ползучести металлических материалов // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр./АН СССР, Сиб. отд-ние, Ин-т гидродинамики.— 1986.— Вып. 75.
13. Панов А. Д., Стасенко И. В. К построению теории пластичности материалов, различно сопротивляющихся растяжению и сжатию // Расчеты на прочность.— М.: Машиностроение, 1985.— Вып. 26.
14. Никитенко А. Ф. Экспериментальная проверка гипотезы существования термомеханической поверхности процесса ползучести // Пробл. прочности.— 1978.— № 9.

г. Санкт-Петербург

Поступила 5/XII 1990 г.

УДК 539.3

В. П. Ольшанский

ДЕЙСТВИЕ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛЫ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКУЮ ОБОЛОЧКУ, ПОДКРЕПЛЕННУЮ ПРОДОЛЬНЫМ РЕБРОМ

Вопросы передачи локальных нагрузок оболочкам через ребра жесткости решались в работах, представленных в обзоре [1]. В большинстве из них из-за сложности решений численные результаты получены на ЭВМ и оформлены в виде графиков и таблиц. Поэтому с позиций построения простых аналитических решений проблема требует дальнейшего изучения.

Ниже за счет применения полубезмоментной теории оболочек удалось построить компактные формулы для вычисления контактных реакций, прогибов и изгибающих моментов в ребре. При этом существенно использовалось быстрое затухание локальных возмущений по направлению окружности [2], т. е. оболочка считалась бесконечной в окружном направлении, а условие периодичности решений по угловой координате не выполнялось. Применение непериодических решений в задачах локальной прочности оболочек берет начало из работ У. Финстервальдера, Ф. Одквиста и других зарубежных авторов, а анализ их погрешностей позволил Г. Н. Чернышеву [3] сделать выбор в пользу тех упрощений, которые они приносят.

1. Разложение компонент напряженно-деформированного состояния в одинарные тригонометрические ряды. Пусть оболочка радиуса R , тол-