

ФАЗОВЫЙ ПЕРЕХОД В УСЛОВИЯХ НЕИЗОТЕРМИЧЕСКОГО КУЭТТОВСКОГО ТЕЧЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

С. В. Маклаков, А. М. Столин, С. И. Худяев

(Черноголовка)

При течении термочувствительных жидкостей диссипативное тепловыделение приводит к критическим тепловым явлениям, различающимся в зависимости от типа течений и реологических свойств самой жидкости [1]. Зачастую течение жидкостей сопровождается фазовыми или структурными превращениями в узком температурном интервале. Примерами таких процессов могут служить транспорт высокопарафинистых нефтей по трубопроводам [2], вискозиметрические течения жидкокристаллических полимеров [3], движение магмы по дайке [4, 5], деформирование жидкой прослойки в зоне скользящего контакта твердых тел [6, 7] и т. д. Взаимное влияние диссипативного тепловыделения и фазового перехода приводит к специфическим особенностям критических тепловых режимов. В связи с этим вызывает интерес исследование критических тепловых явлений (определение критических условий, устойчивости, неединственности решений, характер нестационарности процесса после потери устойчивости и др.) с учетом фазового перехода. Эти вопросы еще не нашли обсуждения в литературе. Их описание можно провести в рамках задачи Стефана [8] с учетом диссипативного тепловыделения.

В данной работе рассмотрено влияние фазового перехода на гидродинамический тепловой взрыв. Известно, что при куэттовском неизотермическом течении вязкой жидкости это явление имеет место в режиме постоянного напряжения на подвижной границе [9]. Показана неединственность стационарных состояний и выяснен характер их устойчивости. Получены аналитические выражения для двух типов критических условий, выражающих соответственно предел теплового взрыва и условие установления фазовой границы внутри слоя. Найдены области параметров, разделяющие качественно различные режимы течения: стационарный режим и нестационарные режимы теплового взрыва и полного фазового превращения.

Интересные особенности возникают при рассмотрении фазового перехода в режиме постоянной скорости. В этом случае возможно единственное и устойчивое стационарное состояние с произвольным положением фазовой границы, зависящим от интенсивности диссипативного тепловыделения.

Обсуждается практически важный вопрос интерпретации вискозиметрического эксперимента в условиях фазового перехода.

1. Постановка задачи. Рассмотрим течение вязкой жидкости между двумя бесконечными параллельными пластинами $x = 0$ и $x = h$, одна из которых $x = 0$ движется вдоль оси y . Учитывается диссипативное тепловыделение в жидкости, причем зависимость вязкости η от температуры T принимается в форме $\eta = \eta_0 \exp(E/RT)$. Здесь η_0 — предэкспоненциальный множитель; E — энергия активации вязкого течения; R — универсальная газовая постоянная. Пластина $x = 0$ считается теплоизолированной. На другой пластине температура мгновенно понижается до значения T_0 , меньшего, чем температура фазового перехода T_* , и поддерживается в дальнейшем постоянной. В результате переохлаждения $\Delta T = T_0 - T_*$ происходит фазовый переход первого рода с выделением тепла. За счет отвода тепла фазовый фронт движется от пластины $x = h$.

Математически задача сводится к решению следующих уравнений:

$$(1.1) \quad T > T_*: c_1 \rho_1 \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_1 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \sigma_{xy} \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x}, \quad \sigma_{xy} = \eta \frac{\partial v_x}{\partial x};$$

$$(1.2) \quad T < T_*: c_2 \rho_2 \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_2 \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

Граничные условия для уравнений теплопроводности имеют вид

$$(1.3) \quad x = 0: \partial T / \partial x = 0; \quad x = h: T = T_0;$$

$$(1.4) \quad x = x_*: T = T_*, \quad Q_0 \rho_1 \frac{\partial x_*}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_*-0} = \lambda_2 \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_{x=x_*+0}.$$

Ниже отдельно будут рассмотрены случаи заданного напряжения и заданной скорости на подвижной границе:

$$(1.5) \quad x = 0: \quad \sigma_{xy} = \sigma_0; \quad x = x_*: \quad v_y = 0;$$

$$(1.6) \quad x = 0: \quad v_y = v_0; \quad x = x_*: \quad v_y = 0.$$

В уравнениях (1.4)–(1.6) v_y , σ_{xy} — скорость и напряжение деформирования; c_1 , c_2 , ρ_1 , ρ_2 , λ_1 , λ_2 — соответственно теплоемкости, плотности, коэффициент теплопроводности фаз; x , t — пространственная координата и время; x_* — координата фазового фронта; Q_0 — тепловой эффект фазового перехода. Начальное распределение температур не задается, поскольку в дальнейшем исследуется стационарная задача, которая в безразмерных переменных

$$\theta = E(T - T_*)/RT_*^2, \quad \xi = x/h, \quad v = v_y/v_0, \quad \sigma = \sigma_{xy}/\sigma_0$$

и в приближении экспоненты по Франк-Каменецкому [10] принимает вид

$$(1.7) \quad \theta > 0: \quad \theta'' + \delta c^2 \exp \theta = 0, \quad [v' \exp(-\theta)]' = 0;$$

$$(1.8) \quad \theta < 0: \quad \theta'' = 0;$$

$$(1.9) \quad \xi = 0: \quad \theta' = 0; \quad \xi = 1: \quad \theta = \theta_0;$$

$$(1.10) \quad \xi = \xi_*: \quad \theta = 0; \quad \lambda \theta'_+ = \theta'_-.$$

Здесь $\lambda = \lambda_2/\lambda_1$; $\theta_0 = E(T_0 - T_*)/RT_*^2$; θ'_+ , θ'_- — предельные значения θ' справа и слева в точке $\xi_* = x_*/h$. Граничные условия (1.5), (1.6) для скорости принимают вид

$$(1.11) \quad \xi = 0: \quad \sigma = v' \exp(-\theta) = 1; \quad \xi = \xi_*: \quad v = 0;$$

$$(1.12) \quad \xi = 0: \quad v = 1; \quad \xi = \xi_*: \quad v = 0.$$

Параметр δ (см. (1.7), (1.8)) имеет различный вид зависимости от граничных условий:

$$(1.13) \quad \delta = v_0 E \eta_0 (\lambda_1 R T_*^2)^{-1} \exp(E/RT_*)$$

в случае заданной скорости (1.12);

$$(1.14) \quad \delta = h^2 \sigma_0^2 E (\eta_0 \lambda_1 R T_*^2)^{-1} \exp(-E/RT_*)$$

в случае заданного напряжения (1.11). Из уравнений (1.7) выражения для температур, тепловых потоков и скоростей определяются в виде в области $\xi_* < \xi < 1$

$$(1.15) \quad \theta = \theta_0 (\xi - \xi_*) / (1 - \xi_*), \quad \theta' = \theta_0 / (1 - \xi_*);$$

в области $0 < \xi < \xi_*$ (ср. [11, 12])

$$(1.16) \quad \theta = \ln \frac{a}{\text{ch}^2(b + \sqrt{a\delta c^2/2} \xi)}, \quad \theta' = -2 \sqrt{a\delta c^2/2} \text{th}(\sqrt{a\delta c^2/2} \xi + b);$$

$$(1.17) \quad v = \sqrt{2a/\delta} [\text{th}(\sqrt{a\delta c^2/2} \xi_* + b) - \text{th}(\sqrt{a\delta c^2/2} \xi + b)].$$

Здесь a , b , c — постоянные интегрирования, которые имеют различный вид в зависимости от режима деформирования.

2. Режим заданного напряжения. Константы интегрирования $c = 0$ и $c = 1$ получаем из первого граничного условия (1.9), (1.11) соответственно. Для определения третьей константы и координаты фазового фронта из второго условия (1.9), (1.10) получаем соотношения:

$$(2.1) \quad \text{ch}^2(\sqrt{a\delta/2} \xi_*) = a;$$

$$(2.2) \quad 2s/(1 - \xi_*) = \sqrt{2a\delta} \text{th}(\sqrt{a\delta/2} \xi_*).$$

Здесь и в дальнейшем используется обозначение $s = -\lambda \theta_0/2$. Из (2.1) для ξ_* имеем

$$(2.3) \quad \sqrt{\delta/2} \xi_* = (1/\sqrt{a}) \ln(\sqrt{a} + \sqrt{a-1}).$$

Из (2.2), (2.3) легко получить следующее соотношение:

$$(2.4) \quad \sqrt{\delta/2} = (1/\sqrt{a}) \ln(\sqrt{a} + \sqrt{a-1}) + s/(\sqrt{a-1}).$$

Выражение (2.4) совместно с формулами (1.15) — (1.17), (2.3) можно рассматривать как параметрическое решение задачи. Таким образом, при любых значениях параметров $a > 1$ и $s > 0$ однозначно находится δ и соответствующее решение ξ_{*} . θ . Замечая, что $\delta \rightarrow \infty$ при $a \rightarrow 1$, $\delta \rightarrow 0$ при $a \rightarrow \infty$, можем заключить, что при любых значениях $\delta > 0$, $s > 0$ существует решение задачи.

Соотношение (2.2) имеет смысл теплового баланса: левая часть выражает скорость теплоотвода q_- из области $\xi < \xi_*$, правая — скорость тепловыделения q_+ в этой области. В квазистационарном приближении, когда времена тепловой и гидродинамической релаксации существенно меньше характерного времени фазового превращения (большая теплота фазового превращения), уравнение движения границы фаз (см. (1.4)) принимает вид

$$(2.5) \quad \frac{d\xi_*}{d\tau} = q_+ - q_-, \quad \tau = t \frac{\lambda_1 R T_*^2}{h^2 \rho_1 Q_0 E}$$

и позволяет связать стационарные характеристики q_+ , q_- с динамикой фазового фронта.

Прежде всего заметим, что каждому значению ξ_* соответствуют два значения $q_+(\xi_*)$. Однако в записи уравнения (2.5) имеется ввиду лишь нижняя ветвь. Верхнее значение q_+ должно быть отброшено как отвечающее неустойчивому распределению температуры (ср. задачу о тепловом взрыве [10] при фиксированном ξ_*). Далее, с развитием фазового превращения (уменьшением ξ_*) скорости тепловыделения и теплоотвода q_+ и q_- нелинейно падают (фиг. 1).

При изменении параметра δ функция q_- остается неизменной, меняется лишь q_+ . В некотором диапазоне изменения δ (при достаточно малых $s < s_*$, как будет показано ниже) кривые q_+ и q_- пересекаются в трех точках, отвечающих стационарным значениям ξ_* : нижнее ξ_{*1} , промежуточное ξ_{*2} и верхнее ξ_{*3} . Согласно уравнению (2.5), в соответствии с физическим смыслом (ξ_* уменьшается при $q_+ < q_-$ и увеличивается при $q_+ > q_-$) нижнее и верхнее значения ξ_{*1} , ξ_{*3} неустойчивы. Лишь промежуточное состояние ξ_{*2} является устойчивым.

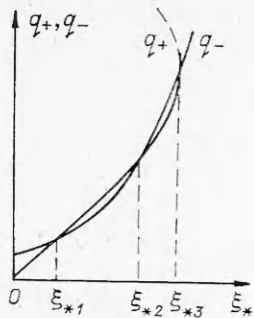
При $\xi < \xi_{*1}$ скорость теплоотвода превышает скорость тепловыделения и, согласно (2.5), ξ_* убывает до нуля, что говорит о полном фазовом превращении. При этом разность $q_- - q_+$ возрастает, и, следовательно, движение ξ_* происходит с возрастающей скоростью. Таким образом, можно говорить о режиме «прогрессивного замерзания». Отметим, что в классической задаче Стефана в отсутствие тепловыделения ($\delta = 0$) такой режим невозможен.

Если $\xi_* > \xi_{*3}$, то $q_+ - q_- > 0$ и фазовая граница стремится к холодной стенке: $\xi_* \rightarrow 1$. Таким образом, при начальном условии $\xi_{*|\tau=0} > \xi_{*3}$ (см. (2.5)) устойчивый стационарный режим $\xi_* = \xi_{*2}$ не реализуется, как и при начальном значении $\xi_{*|\tau=0} < \xi_{*1}$.

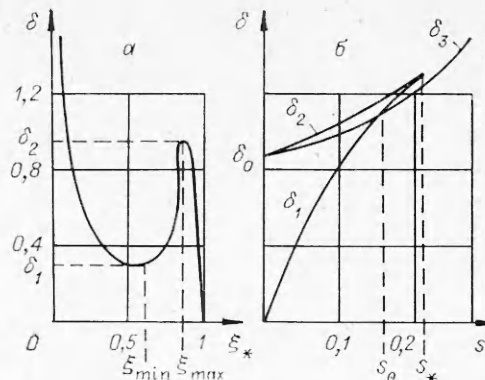
При уменьшении δ происходит сближение ξ_{*1} и ξ_{*3} и их слияние в точке касания q_+ и q_- при достижении критического условия $\delta = \delta_1(s)$, разделяющего режим установившегося фазового фронта внутри слоя от нестационарного развития полного фазового превращения. Отметим, что это критическое условие возникает и при постоянном источнике тепла ($\theta > 0$: $\theta'' \neq \delta = 0$).

При увеличении δ происходит сближение ξ_{*2} и ξ_{*3} , которые сливаются при достижении верхнего критического значения $\delta = \delta_2(s)$, разделяющего режимы установления фазового фронта внутри слоя от нестационарного процесса прогрессивного саморазогрева жидкости, названного гидродинамическим тепловым взрывом [13] (ГТВ). Критическое условие $\delta_2(s)$ обусловлено нелинейностью источника тепла.

Для нахождения критических условий δ_1 и δ_2 обратимся к зависимости $\delta(\xi_*)$ (см. (2.3), (2.4)). Необходимо отметить, что математическая постановка задачи в случае заданного напряжения полностью соответствует



Фиг. 1



Фиг. 2

задаче о химической реакции в условиях фазового превращения [14] и расчеты критических условий [14] можно использовать в настоящей работе.

В некоторой области изменения параметра s зависимость $\delta(\xi_*)$ оказывается немонотонной, тем самым относительно исходного параметра δ решение оказывается неединственным (фиг. 2, а). При этом границы области неединственности задаются неравенством $0 < s < s_*$, $\delta_1(s) < \delta < \delta_2(s)$, где δ_1 , δ_2 — экстремальные значения $\delta(\xi_*)$, $s_* \approx 0,21$ (см. [14]). Функции $\delta_1(s)$ и $\delta_2(s)$ находятся приближенно в виде асимптотических разложений по степеням s (см. [14]):

$$(2.6) \quad \delta_1 = 8s(1 - (2/3)s - \dots);$$

$$(2.7) \quad \delta_2 = \delta_0(1 + 2s + \dots), \quad \delta_0 = 0,878.$$

На фиг. 2, б изображены области стационарных состояний системы. Фиг. 2, а показывает зависимость $\delta(\xi_*)$ в области неединственности. Для координат экстремумов ξ_{\min} , ξ_{\max} кривой $\delta(\xi_*)$ можно получить асимптотические приближения при малых значениях параметра s [14]:

$$(2.8) \quad \xi_{\min} = (1/2)(1 + (2/3)s + \dots);$$

$$(2.9) \quad \xi_{\max} = 1 - s - \dots$$

При возрастании s δ_1 и δ_2 сливаются и исчезают при $s > s_*$. Зависимость $\delta(\xi_*)$ становится монотонно убывающей, а решение задачи — единственным при любом δ . Как было сказано выше, крайние стационарные значения в области неединственности неустойчивы. Нетрудно понять из физического смысла ξ_* или из анализа квазистационарного уравнения (2.5), что неустойчиво любое стационарное состояние, отвечающее падающему участку кривой $\delta(\xi_*)$. Таким образом, в области $s > s_*$ устойчивое стационарное состояние отсутствует, и проведенный выше анализ возможных режимов не распространяется на нее. Между тем естественно ожидать, что в этой области также реализуются режимы полного фазового перехода и гидродинамического теплового взрыва, что в ней существует критическое условие $\delta = \delta_3(s)$, разделяющее эти режимы. Однако в рамках стационарного подхода этот вопрос решить не удастся.

Анализируя квазистационарное уравнение (2.5), определенное также и в области $s > s_*$, можно показать, что в области параметров, где вообще отсутствует стационарное состояние, происходит полное фазовое превращение, ξ_* убывает до нуля, а в области существования неустойчивого стационарного состояния фазовый фронт ξ_* (с начальным условием $\xi_* = 1$ при $\tau = 0$) не может приближаться к нулю (чему препятствует неустойчивое стационарное значение ξ_*) и происходит прогрессивный саморазогрев жидкости (ГТВ).

Граница $\delta_3(s)$ этих областей может быть найдена из условия исчезновения стационарной точки (2.5) или перехода ее на верхнюю ветвь кривой $q_+(\xi_*)$: $q_+ = q_-$, $d\xi_*/dq_+ = 0$.

Принимая во внимание (2.1)–(2.3), систему уравнений можно переписать в виде

$$(2.10) \quad 2s(1 - \xi_*)^{-1} = [2\delta(a - 1)]^{1/2};$$

$$(2.11) \quad \ln(\sqrt{a} + \sqrt{a - 1}) = \sqrt{a}/\sqrt{a - 1}.$$

Уравнение (2.11) хорошо известно из теории теплового взрыва. Относительно $2/(a - 1)$ оно дает решение 0,878 или $a = 3,28$. Для искомой границы $\delta_3(s)$ получаем

$$(2.12) \quad \delta_3 = 0,878(1 + s)^2.$$

На фиг. 2, б приведена диаграмма областей в плоскости параметров δ, s качественно различных режимов. В области $\delta > \delta_3(s), s > 0$, происходит гидродинамический тепловой взрыв, несмотря на то что в этой области частично оказываются устойчивые стационарные состояния. Начальное значение $\xi_* = 1$ при $\tau = 0$ оказывается вне области их притяжения. В области $\delta_1(s) < \delta < \delta_3(s), s < s_0$, устанавливается стационарное значение ξ_* внутри слоя, которое рассчитывается по формулам (2.3), (2.4). Точка пересечения s_0 кривых δ_1 и δ_3 может быть легко найдена: $s_0 \approx 0,168$. В области $\delta < \delta_1(s)$ при $s < s_0, \delta < \delta_3(s)$ при $s > s_0$ независимо от начального значения ξ_* происходит полное фазовое превращение.

Необходимо подчеркнуть, что проведенный анализ предполагает ограничения на начальное распределение температуры. Во всяком случае оно должно допускать изложенное выше квазистационарное приближение: не может быть слишком большим, предопределяющим взрывное протекание процесса, не может быть и слишком близким к T_* , когда тепловые процессы замедлены или отсутствуют.

3. Режим заданной скорости. Из граничного условия (1.9) сразу следует $b = 0$. Для определения двух других постоянных интегрирования и координат фазового фронта из второго условия (1.9), (1.10) имеем

$$(3.1) \quad \text{th}(\sqrt{a\delta c^2/2} \xi_*) = -\sqrt{\delta/2a}, \quad \text{ch}^2(\sqrt{a\delta c^2/2} \xi_*) = a;$$

$$(3.2) \quad 2s(1 - \xi_*)^{-1} = 2\sqrt{a\delta c^2/2} \text{th}(\sqrt{a\delta c^2/2} \xi_*).$$

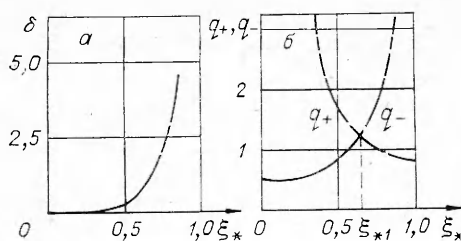
Решение этих соотношений дает

$$(3.3) \quad a = \delta/2 + 1, \quad c = \frac{2s}{\delta(1 - \xi_*)^2}$$

$$\xi_*(\delta) = \frac{f(\delta)}{f(\delta) + s}, \quad f(\delta) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\delta}{\delta + 2}} \ln \left(\frac{\sqrt{\delta + 2} + \sqrt{\delta}}{\sqrt{\delta + 2} - \sqrt{\delta}} \right).$$

Соотношение (3.2), как указывалось выше, имеет смысл теплового баланса. Здесь справа стоит скорость тепловыделения, слева — теплоотвода. Нетрудно показать, что зависимость (3.3) монотонно возрастающая, $\xi_* \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$ и $\xi_* \rightarrow 1$ при $\delta \rightarrow \infty$ (фиг. 3, а, $s = 0,2$), следовательно, каждому $\delta > 0$ однозначно соответствует ξ_* .

Как и в п. 2, полезно провести анализ зависимостей скоростей тепловыделения q_+ и теплоотвода q_- от степени фазового превращения ξ_* (фиг. 3, б, $s = 0,2, \delta = 1$). Оказывается, что при любых значениях существует единственная точка пересечения ξ_{*1} , соответствующая стационарному решению. Если учесть соображения о направлении движения фазовой границы при различных соотношениях между q_+ и q_- , то можно сделать вывод, что любые возмущенные значения левее или правее ξ_{*1} притягиваются к этому стационарному решению, т. е. оно устойчиво.



Ф и г. 3

Важно отметить, что по мере продвижения фазового фронта вглубь скорость тепловыделения увеличивается и $q_+ \rightarrow \infty$ при $\xi_* \rightarrow 0$. Это связано с тем, что при уменьшении ξ_* градиент скорости $\dot{\gamma} = dv_y/dx$ прогрессивно возрастает. Из-за этого в ходе фазового превращения конкурентное действие диссипативного тепловыделения растет, продвижение фазового фронта тормозится, и в конечном итоге фронт устанавливается внутри зазора. Отсюда следует, что полное фазовое превращение невозможно, в чем и состоит важная особенность режима течения с постоянной скоростью, обусловленная зависимостью диссипативного тепловыделения от скорости сдвига ($q_+ \sim \dot{\gamma}^2$). Например, в случае с постоянным источником тепловыделения ($\theta'' + \delta = 0$, $\theta > 0$) легко показать наличие критического условия $\delta_* = 8s$ (решение задачи дает $\delta = 2s\xi_*^{-1}(1 - \xi_*)^{-1}$), ниже которого не существует стационарного решения и происходит полное фазовое превращение.

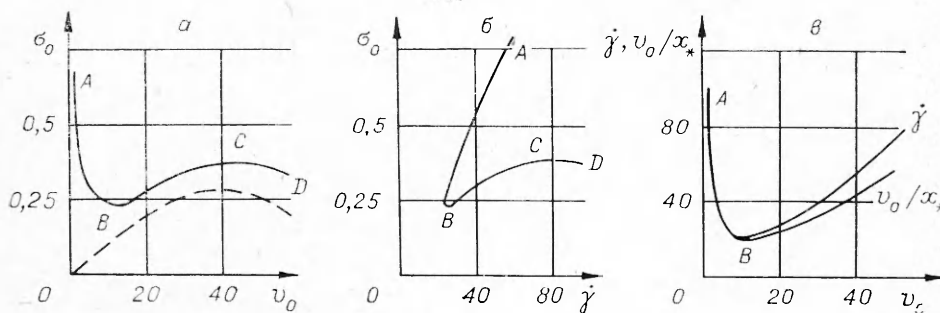
Установление стационарных устойчивых состояний с любым возможным положением фазового фронта в зависимости от скорости подвижной границы открывает принципиальную возможность использования диссипативного тепловыделения для осуществления направленной кристаллизации, чего, например, невозможно достичь при использовании ВЧ-нагрева [15].

4. Реологическая кривая в условиях фазового перехода. Практически важным вопросом является определение реологических характеристик в условиях фазового превращения. Из (2.1), (2.2) можно получить зависимости $\sigma_0(v_0)$ и $\sigma_0(\dot{\gamma})$ на основе следующих соотношений:

$$(4.1) \quad \sigma_0 = \frac{2\eta(T_*)}{h\delta} [s + f(\delta)], \quad \dot{\gamma} = \left. \frac{dv_y}{dx} \right|_{x=0} = \frac{\sigma_0}{\eta(T_*)} \left(\frac{\delta}{2} + 1 \right),$$

где δ определяется соотношением (1.12). Для сравнения на фиг. 4, а штриховой линией показан качественный вид реологической кривой в отсутствие фазового перехода. Из фиг. 4, б видно, что вискозиметрическая кривая $\sigma_0(v_0)$ и реологическая кривая $\sigma_0(\dot{\gamma})$ даже качественно между собой не совпадают, поэтому реологическую трактовку результатов измерений при фазовом переходе следует проводить с большой осторожностью. В режиме постоянного напряжения сдвига $\sigma_0 = \text{const}$ лишь ветвь *BC* является истинно реологической в том смысле, что она является устойчивой и на ней корректно определение вязкости. В режиме постоянной скорости $v_0 = \text{const}$ все ветви реологической кривой оказываются устойчивыми, однако при определении вязкости на ветви *AB* следует учитывать большую глубину фазового перехода, а на ветвях *BC* и *CD* дополнительно проявляется влияние разогрева жидкости.

Известно, что в ротационной вискозиметрии градиент скорости $\dot{\gamma}$ определяется по заданной скорости на подвижной границе v_0 и зазору между измерительными поверхностями h . В частности, для принятой здесь плоской модели вискозиметра используется формула $\dot{\gamma} = v_0/h$. Однако



Ф и г. 4

анализ зависимости $\dot{\gamma}(v_0)$ (фиг. 4, в) показывает неправомочность этой формулы при фазовом превращении. В почти изотермическом режиме течения при достаточно малых v_0 (ветвь AB фиг. 4, в) фазовый фронт перемещается на большую глубину ($\xi_* < 0,5$) и соответственно уменьшается толщина жидкой фазы. В этом случае можно ожидать применимость формулы

$$(4.2) \quad \dot{\gamma} = v_0/\xi_*$$

с учетом которой вязкость, отнесенная к температуре на изотермической стенке $T = T_0$, определяется соотношением

$$(4.3) \quad \eta = \sigma_0 \xi_*/v_0.$$

Справедливость формул (4.2), (4.3) вдоль ветви AB подтверждается проведенными расчетами: градиент скорости вплоть до точки минимума на фиг. 4, в совпадает с теоретическими значениями, а вязкость, как и заложено принятыми допущениями, остается вдоль AB постоянной.

5. Влияние условий теплообмена. Если на пластине $x = h$ для уравнения теплопроводности выполняется граничное условие третьего рода, то второе соотношение (1.9) примет вид

$$\xi = 1: d\theta/d\xi = -Bi(\theta - \theta_0), \quad Bi = \alpha h/\lambda_1.$$

Тогда для констант интегрирования имеем в режиме заданной скорости

$$a = \delta/2 + 1, \quad b = 0, \quad c = \frac{2}{\delta} \frac{s}{1 - \xi_* + Bi^{-1}}$$

и в режиме заданного напряжения

$$a = 1 + \frac{2}{\delta} \left[\frac{s}{1 - \xi_* + Bi^{-1}} \right]^2, \quad b = 0, \quad c = 1.$$

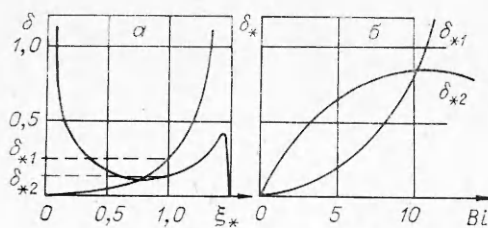
Для координаты фазового фронта в режиме заданной скорости имеем (ср. (3.3))

$$(5.1) \quad \xi_*(\delta) = (1 + Bi^{-1})f(\delta)/(f(\delta) + s).$$

В случае заданного напряжения решение получается в параметрической форме (ср. (2.3), (2.4))

$$(5.2) \quad \delta = \left[\frac{\sqrt{2/a} \ln(\sqrt{a} + \sqrt{a-1}) - \sqrt{2} s/\sqrt{a-1}}{1 + Bi^{-1}} \right]^2, \\ \xi_* = \sqrt{\frac{2}{a\delta}} \ln(\sqrt{a} + \sqrt{a-1}).$$

На фиг. 5, а ($Bi = 2, s = 0,05$) приведены зависимости $\delta(\xi_*)$ в случаях заданной скорости и напряжения. Из (5.1), в частности, следует, что зависимость $\delta(\xi_*)$ в режиме заданной скорости имеет асимптотику $\xi_* = 1 + Bi^{-1}$. При этом часть кривой может оказаться вне интервала $0 < \xi_* < 1$. Следовательно, существует некоторое критическое значение δ_{*1} такое, что при $\delta > \delta_{*1}$ фазовое превращение не имеет места, поскольку мощность диссипативного тепловыделения слишком велика. В случае заданного напряжения часть кривой $\delta(\xi_*)$ также может оказаться вне интервала $0 < \xi_* < 1$ и аналогично возникает порог фазового перехода δ_{*2} . В интервале $0 < \xi_* < 1$ в зависимости от Bi может остаться только падающая ветвь $\delta(\xi_*)$, отвечающая неустойчивым стационарным состояниям. На фиг. 5, б изображены зависимости $\delta_{*1}(Bi)$ и $\delta_{*2}(Bi)$ для случаев заданной скорости и заданного напряжения.



Ф и г. 5

Критические условия ГТВ и полного фазового превращения удобно представить в терминах параметров:

$$\bar{\xi}_* = \xi_* (1 + \text{Bi}^{-1})^{-1}, \quad \bar{\delta} = \delta (1 + \text{Bi}^{-1})^2.$$

Относительно $\bar{\xi}_*$, $\bar{\delta}$ соотношения (5.2) принимают вид (2.3), (2.4) и все дальнейшие расчеты п. 2 критических значений δ_1 , δ_2 , δ_3 и экстремальных точек ξ_{\min} , ξ_{\max} (см. (2.6)–(2.12)) остаются в силе и для соответствующих величин, т. е. для граничного условия третьего рода на неподвижной пластине.

ЛИТЕРАТУРА

1. Столин А. М., Малкин А. Я., Мержанов А. Г. Неизотермические процессы и методы исследования в химии и механике полимеров.— Успехи химии, 1979, т. 48, № 8.
2. Агапкин В. М., Кривошеин Б. А., Юфин В. А. Тепловой и гидравлический расчеты трубопроводов для нефти и нефтепродуктов. М.: Недра, 1981.
3. Шиббаев В. П., Куличихин В. Г. и др. Особенности реологических свойств термотропных жидкокристаллических полимеров.— ДАН СССР, 1982, т. 263, № 1.
4. Федотов С. А. О подъеме основных магм в земной коре и механизме трещинных базальтовых извержений.— Изв. АН СССР. Сер. геол., 1976, № 10.
5. Титов В. В., Федотов С. А. Математическое моделирование подъема вязкой магмы по вертикальной дайке. Препринт ИЭА АН СССР 3470116. М., 1981.
6. Амосов А. П. Фрикционный разогрев и образование пластической и жидкой прослоек в зоне скользящего контакта твердых тел.— ДАН СССР, 1982, т. 262, № 2.
7. Амосов А. П. Разогрев и воспламенение твердых реакционноспособных систем при высокоскоростном трении, сопровождающемся образованием пластической и жидкой прослоек.— ХФ, 1982, № 10.
8. Карслоу Г., Егер Д. Теплопроводность твердых тел. М.: Наука, 1964.
9. Мержанов А. Г., Посецельский А. П. и др. Экспериментальное осуществление гидродинамического теплового взрыва.— ДАН СССР, 1973, т. 210, № 1.
10. Франк-Каменецкий Д. А. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука, 1967.
11. Столин А. М., Бостанджиян С. А., Плотникова Н. В. Критические условия гидродинамического теплового взрыва при течении степенной жидкости.— В кн.: Теплообмен-V. Минск, 1976.
12. Бостанджиян С. А., Мержанов А. Г., Худяев С. И. Некоторые задачи о неизотермическом стационарном течении вязкой жидкости.— ПМТФ, 1965, № 5.
13. Бостанджиян С. А., Мержанов А. Г., Худяев С. И. О гидродинамическом тепловом «взрыве».— ДАН СССР, 1965, т. 163, № 1.
14. Худяев С. И., Столин А. М., Маклаков С. В. Тепловой взрыв в условиях фазового превращения.— ФГВ, 1983, № 5.
15. Мержанов А. Г., Радучев В. А., Руманов Э. Н. Тепловые волны плавления и кристаллизации диэлектрика.— ДАН СССР, 1980, т. 253, № 2.

Поступила 9/VI 1983 г.

УДК 536.25

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ КОНВЕКТИВНОГО ТЕПЛООБМЕНА В СФЕРИЧЕСКИХ СЛОЯХ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Г. Б. Петражицкий, Н. М. Станкевич

(Горький)

Сферические жидкостные и газовые прослойки часто встречаются в системах, нуждающихся в отводе тепла, чем и обусловлено довольно интенсивное и всестороннее изучение характера теплообмена в них. В частности, выполнен ряд экспериментальных работ [1–3], в которых в качестве рабочих сред рассмотрены вода, воздух и кремнийорганические жидкости ($0,7 \leq \text{Pr} \leq 4148$). Получены общие характеристики теплообмена, профили температуры для различных отношений диаметров сфер, проведена классификация режимов течения. Аналитическое решение задачи при низких числах Рэлея дано в [4]. Для одной группы параметров ($r_2/r_1 = 2$, $\text{Gr} = 10^3$, $\text{Pr} = 0,7$) приведено распределение локальных потоков тепла на границах области. Описание метода и результаты численного исследования естественной конвекции в сферических газовых слоях представлены в [5]. Исследование проводилось на основе полной системы дифференциальных уравнений, записанной в переменных V' , p' , ρ' , T' и учиты-