УДК 517.9
DOI: 10.15372/PMTF202415500

АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ВЯЗКОУПРУГОЙ МОДЕЛИ МАКСВЕЛЛА С КРИТИЧЕСКОЙ ТОЧКОЙ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ

Ч. Читтам, С. В. Мелешко

Институт науки Технологического университета им. Суранари, Накхон Ратчасима, Таиланд
E-mails: nursejaypark@gmail.com, sergey@math.sut.ac.th

С использованием конвективной производной Джонсона — Сигалмана рассматриваются двумерные течения вблизи свободной критической точки в несжимаемой вязкоупругой среде Максвелла. Предполагается, что течение осесимметричное, профиль его скорости является линейным вдоль осевой координаты. Найдено общее точное решение осесимметричной задачи о распределении компонент тензора напряжений вблизи критической точки.

Ключевые слова: вязкоупругая жидкость, уравнения Максвелла, конвективная производная Джонсона — Сигалмана, критическая точка

Введение. Изучение поведения жидкостей имеет важное значение в науке и технике. Исследование динамики жидкостей позволяет решать такие задачи, как прогнозирование погоды, проектирование транспортных средств, разработка лекарств, оптимизация производственных процессов.

Уравнения Навье — Стокса являются основными при анализе поведения жидкостей, но не всегда точно описывают поведение таких жидкостей, как высоковязкие или вязкоупругие жидкости с полимерами. Для их описания требуются более сложные модели, например уравнения Максвелла, в которых учитываются дополнительные физические характеристики, например вязкоупругость.

В данной работе рассматривается модель Максвелла с производными Джонсона — Сигалмана [1] для вязкоупругих жидкостей, описание которых вызывает затруднение при математическом анализе вследствие большего числа неизвестных функций по сравнению с моделями ньютоновских жидкостей. Точные решения задач, описывающих поведение вязкоупругих жидкостей, используются при тестировании численных методов и эмпирических моделей.

Классическим примером вязкоупругого течения является течение вблизи критической точки — простое двумерное течение, используемое в качестве модели. В работе [2] впервые изучены эти стационарные течения путем сведения с помощью преобразования подобия уравнений Навье — Стокса к дифференциальному уравнению третьего порядка.

В ряде работ проведены аналитические исследования течений вязкоупругой жидкости с критической точкой, описываемых уравнениями Максвелла с верхней конвективной производной. В [3] рассмотрены задачи о плоском и осесимметричном течении, сводящиеся к обыкновенным дифференциальным уравнениям. В работе [4] предложено общее аналитическое решение для полей напряжений и давления в двумерном плоском течении, но это решение не удовлетворяет уравнению импульса. Аналитическое решение для поля напряжений в аналогичном течении получено в [5], однако оно также не удовлетворяет нелинейным уравнениям движения. В [4, 5] точные решения уравнений в модели вязкоупругих напряжений строились с использованием верхней конвективной производной для максвелловской жидкости.

Количество работ, посвященных исследованию нестационарных течений, существенно меньше количества работ, в которых изучаются установившиеся течения жидкости Максвелла. В работе [6] проведен анализ нестационарных плоских течений несжимаемой вязкоупругой жидкости Максвелла и получены точные решения с нетривиальной зависимостью элементов тензора напряжений от пространственных координат. В [7] рассматривалось двумерное течение, уравнения были сведены к гиперболической системе, также были исследованы задачи о сдвиговом и поперечном сдвиговом течениях. В работе [8] изучены численные решения для случая нестационарного течения вблизи критической точки.

Большинство точных решений задач для моделей вязкоупругих жидкостей получены в случае стационарных течений с двумя пространственными переменными либо в случае нестационарных одномерных течений. В [9] с помощью различных конвективных производных найдено общее точное решение задачи о двумерном течении вблизи свободной критической точки несжимаемой вязкоупругой жидкости Максвелла. Это решение было использовано для вывода точных стационарных решений [10]. В работе [11] получены аналитические решения задачи о распределении напряжений для случая течения, не ограниченного стенками, в критической точке для восьмиконстантной модели Олдройда.

В данной работе строится общее решение задачи об осесимметричном течении вязкоупругих жидкостей вблизи критической точки, более точно описывающее экспериментальные данные.

1. Исследуемые уравнения. Исследуется система уравнений, описывающая движение несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла. Уравнения неразрывности и количества движения несжимаемой сплошной среды имеют вид

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}=0,\qquad \rho(\boldsymbol{v}_t+\boldsymbol{v}\cdot\nabla\boldsymbol{v})=-\nabla p+\operatorname{div}S,\tag{1}$$

где t — время; $\boldsymbol{v}$ — вектор скорости; p — давление; S — тензор напряжений; ρ — постоянная плотность. Определяющие уравнения с объективной производной Джонсона — Сигалмана можно записать следующим образом:

$$\tau\Big(\frac{\partial S}{\partial t}+\boldsymbol{v}\cdot\nabla S+\frac{1+\alpha}{2}\,(-L\cdot S-S\cdot L^{\mathrm{T}})+\frac{1-\alpha}{2}\,(L^{\mathrm{T}}\cdot S+S\cdot L)\Big)+S=2\mu D.\tag{2}$$

Здесь L — градиент скорости; D — тензор скорости деформации; τ — время релаксации; μ — вязкость; $\alpha\in[-1,1]$ — параметр модели Джонсона — Сигалмана. Уравнения (1), (2) представляют собой обобщение классических уравнений Навье — Стокса для описания движения вязкой жидкости, учитывающее вязкоупругие эффекты, в частности временные задержки реакции материала на приложенное напряжение. В этих уравнениях содержится поправочное слагаемое, называемое объективной производной Джонсона — Сигалмана [1]. Объективная производная Джонсона — Сигалмана, добавляемая к уравнениям Максвелла, зависит от истории деформирования материала и представляется в виде

$$\dot S_{\mathrm{JS}}=-\frac{1}{\tau}\,(S-2\mu D)+\frac{\partial}{\partial t}\,(S-2\mu D).$$

Таким образом, определяющие уравнения с объективной производной Джонсона — Сигалмана учитывают вязкоупругость, поэтому представляют собой более сложную модель по сравнению с классическими уравнениями Навье — Стокса. Они имеют большое значение при анализе движения жидкостей, особенно при исследовании различных инженерных и прикладных задач.

2. Уравнения в цилиндрических координатах с верхней конвективной производной ($\alpha = 1$). Пусть r, θ, z — цилиндрические координаты, v_r, v_θ, v_z — компоненты скорости в цилиндрических координатах. Предполагается, что v_r и v_z не зависят от θ и $v_\theta = 0$. Введем обозначения для физических компонент тензора напряжений S в цилиндрических координатах:

$$\begin{bmatrix} P_{rr} & P_{rz} \\ P_{rz} & P_{zz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix}.$$

В случае осесимметричного течения уравнения (1) в цилиндрических координатах принимают вид

$$\frac{1}{r}\,\frac{\partial (rv_r)}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0;$$

$$\rho\Big(\frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r\,\frac{\partial v_r}{\partial r} + v_z\,\frac{\partial v_r}{\partial z}\Big) = -\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{\partial B}{\partial z} + \frac{A}{r}; \qquad (3)$$

$$\rho\Big(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r\,\frac{\partial v_z}{\partial r} + v_z\,\frac{\partial v_z}{\partial z}\Big) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial B}{\partial r} + \frac{\partial C}{\partial z} + \frac{B}{r}, \qquad (4)$$

уравнения Максвелла (2) записываются следующим образом:

$$\frac{\partial A}{\partial t} + v_r\,\frac{\partial A}{\partial r} + v_z\,\frac{\partial A}{\partial z} - 2\Big(A\,\frac{\partial v_r}{\partial r} + B\,\frac{\partial v_r}{\partial z}\Big) + \tau^{-1}A = 2\mu\tau^{-1}\,\frac{\partial v_r}{\partial r},$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} + v_r\,\frac{\partial B}{\partial r} + v_z\,\frac{\partial B}{\partial z} - A\,\frac{\partial v_z}{\partial r} - B\Big(\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_z}{\partial z}\Big) - C\,\frac{\partial v_r}{\partial z} + \tau^{-1}B = \mu\tau^{-1}\Big(\frac{\partial v_r}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial r}\Big),$$

$$\frac{\partial C}{\partial t} + v_r\,\frac{\partial C}{\partial r} + v_z\,\frac{\partial C}{\partial z} - 2\Big(C\,\frac{\partial v_z}{\partial z} + B\,\frac{\partial v_z}{\partial r}\Big) + \tau^{-1}C = 2\mu\tau^{-1}\,\frac{\partial v_z}{\partial z}.$$

Исключая давление p путем дифференцирования уравнения (3) по z, а затем вычитая из него уравнение (4), продифференцированное по r, получаем уравнение совместности

$$\rho r(\omega_t + v_r\omega_r + v_z\omega_z) = \frac{\partial^2 A}{\partial z\,\partial r} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{\partial^2 B}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 B}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial B}{\partial r} + \frac{B}{r^2} - \frac{\partial^2 C}{\partial r\,\partial z} = 0, \qquad (5)$$

где

$$\omega = \frac{1}{r}\Big(\frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r}\Big).$$

3. Общие точные аналитические решения с линейной функцией $v_z(t, z)$. Ниже строятся общие решения системы уравнений (1), (2). Функция v_z полагается линейной относительно z: $v_z = zf_1(t) + f_0(t)$, $f_1 \ne 0$. Для несингулярных при $r = 0$ решений из уравнения неразрывности находим $v_r = -rf_1/2$.

Подставляя координаты скорости в определяющие уравнения (2), получаем

$$\begin{gathered} \tau(A_t - f_1 rA_r/2 + (zf_1 + f_0)A_z) + (1 + \tau f_1)A + \mu f_1 = 0, \\ \tau(B_t - f_1 rB_r/2 + (zf_1 + f_0)B_z) + (1 - \tau f_1/2)B = 0, \\ \tau(C_t - f_1 rC_r/2 + (zf_1 + f_0)C_z) + (1 - 2\tau f_1)C - 2\mu f_1 = 0. \end{gathered} \qquad (6)$$

Введем функции $f_1 = \psi'\psi^{-1}$ и $f_0 = \varphi'\psi$. Решая уравнения (6) методом характеристик, находим

$$A = \psi^{-1}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,(H^A(z_1, z_2) + h_1(t)),$$

$$B = \psi^{1/2}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,H^B(z_1,z_2), \tag{7}$$
$$C = \psi^2\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,(H^C(z_1,z_2)+h_2(t)),$$

где H^A, H^B, H^C — произвольные функции переменных $z_1 = r\psi^{1/2}$, $z_2 = z/\psi - \varphi$; функции $h_1(t)$ и $h_2(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$h_1' = -\frac{\mu}{\tau}\,\psi'\,\mathrm{e}^{t/\tau}, \qquad h_2' = -2\,\frac{\mu}{\tau}\,\frac{\psi'}{\psi}\,\mathrm{e}^{t/\tau}\,.$$

Заметим, что переменные t, z_1, z_2 могут рассматриваться в качестве новых независимых переменных вместо t, r, z.

Подставляя решения уравнений (7) в условие совместности (5), получаем

$$\psi^3(H^B_{z_1z_1} + H^B_{z_1}/z_1 - H^B/z_1^2 + H^C_{z_1z_2}) - H^A_{z_1z_2} - H^A_{z_2}/z_1 - H^B_{z_2z_2} = 0, \tag{8}$$

где индексы z_1, z_2 обозначают производные по этим переменным. Поскольку переменные t, z_1, z_2 являются независимыми и предполагается, что $\psi' \neq 0$, уравнение (8) может быть расщеплено по ψ:

$$H^B_{z_1z_1} + H^B_{z_1}/z_1 - H^B/z_1^2 + H^C_{z_1z_2} = 0; \tag{9}$$
$$H^A_{z_1z_2} + H^A_{z_2}/z_1 + H^B_{z_2z_2} = 0. \tag{10}$$

При решении уравнения (9) предположим, что $H^B(z_1,z_2) = \tilde{G}_{z_1z_2}(z_1,z_2)$. Таким образом, общее решение этого уравнения может быть записано в форме

$$\tilde{G}_{z_1z_1} + \tilde{G}_{z1}/z_1 + H^C = g_{11}(z_1) + g_{12}(z_2), \tag{11}$$

где $g_{11}(z_1)$, $g_{12}(z_2)$ — произвольные функции своих аргументов. Для решения второго уравнения (10) введем функции $F(z_1,z_2)$ и $\hat{G}(z_1,z_2)$, такие что $H^A = z_1F_{z_1}$ и $\tilde{G} = \hat{G}_{z_1}$. Тогда, интегрируя уравнение (10) по z_1 и z_2, находим

$$z_1F + \hat{G}_{z_2z_2} = z_1g_{22} + g_{23} + g_{21}, \tag{12}$$

где $g_{22}(z_2)$, $g_{23}(z_2)$, $g_{21}(z_1)$ — произвольные функции. Уравнение (11) принимает вид

$$\hat{G}_{z_1z_1z_1} + \hat{G}_{z_1z_1}/z_1 + H^C = g_{11} + g_{12}. \tag{13}$$

Вводя функции $b_1(z_1)$, $b_2(z_2)$, $b_3(z_2)$, $G(z_1,z_2)$, такие что

$$\hat{G} = G + z_1b_2 + b_3 + b_1, \qquad b_1''' = -(b_1''/z_1 + g_{11}), \qquad b_3'' = g_{23},$$

уравнения (12), (13) можно упростить:

$$z_1F + G_{z_2z_2} + g_{21} = 0, \qquad G_{z_1z_1z_1} + G_{z_1z_1}/z_1 + H^C + g_{12} = 0.$$

Следовательно,

$$H^A = -G_{z_1z_2z_2} + G_{z_2z_2}/z_1 - g_{21}' + g_{21}/z_1, \qquad H^C = -(G_{z_1z_1z_1} + G_{z_1z_1}/z_1 + g_{12}).$$

Подставляя найденные выражения в (7), получаем окончательные выражения для функций A, B, C

$$A = \psi^{-1}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,(-G_{z_1z_2z_2} + G_{z_2z_2}/z_1 - g_{21}' + g_{21}/z_1 + h_1(t)),$$
$$B = \psi^{1/2}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,G_{z_1z_1z_2}, \qquad C = \psi^2\,\mathrm{e}^{-t/\tau}\,(-G_{z_1z_1z_1} - G_{z_1z_1}/z_1 - g_{12} + h_2(t)),$$

где $G(z_1,z_2)$, $g_{21}(z_1)$, $g_{12}(z_2)$ — произвольные функции своих аргументов; функции $h_1(t)$, $h_2(t)$ удовлетворяют уравнениям

$$h_1' = -\frac{\mu}{\tau}\,\psi'\,\mathrm{e}^{t/\tau}, \qquad h_2' = 2\,\frac{\mu}{\tau}\,\frac{\psi'}{\psi^3}\,\mathrm{e}^{t/\tau}\,.$$

Поскольку условие совместности (5) выполнено, давление восстанавливается по квадратуре

$$p = M - \mathrm{e}^{-t/\tau}\,(\psi^2 g_{12} + \psi^{-1} g'_{21} - \psi^{-1}\ln(z_1) h_1) + f,$$

где $f(t)$ — произвольная функция,

$$M = -\rho z_2(\varphi''\psi^2 + 2\varphi'\psi\psi' + \psi''\psi(\varphi + z_2/2)) + \rho z_1^2\psi^{-3}(2\psi\psi'' - 3\psi'^2)/8.$$

Заключение. Исследования уравнений Максвелла, выполненные в настоящей работе, были инициированы В. В. Пухначевым [9]. В данной работе получено общее аналитическое решение уравнений Максвелла с верхней конвективной производной ($\alpha = 1$) для осесимметричного случая задачи о течении вблизи критической точки. Заметим, что способ решения уравнений, использованный в случае плоского течения [9], приводит к громоздким выкладкам в случае осесимметричного течения. Кроме того, использование предложенного в данной работе подхода позволяет найти решение задачи о течении вблизи критической точки при любых значениях параметра α не только в случае осесимметричного течения, но и в случае плоских течений и более сложных моделей.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Johnson M. W., Segalman D.** A model for viscoelastic fluid behavior which allows non-affine deformation // J. Non-Newton. Fluid Mech. 1977. V. 2, N 15. P. 255–270.
2. **Hiemenz K.** Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszylinder // Dinglers Polytech. J. 1911. V. 326. P. 321–324.
3. **Phan-Thien N.** Plane and axi-symmetric stagnation flow of a Maxwellian fluid // Rheol. Acta. 1983. V. 22. P. 127–130.
4. **Van Gorder R. A.** Do general viscoelastic stresses for the flow of an upper convected Maxwell fluid satisfy the momentum equation? // Meccanica. 2012. V. 47. P. 1977–1985.
5. **Cruz D. O. A., Pinho F. T.** Analytical solution of steady 2d wall-free extensional flows of UCM fluids // J. Non-Newton. Fluid Mech. 2015. V. 223, N 15. P. 157–164.
6. **Пухначев В. В.** Математическая модель несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла // ПМТФ. 2010. Т. 51, № 4. С. 116–126.
7. **Ляпидевский В. Ю., Пухначев В. В.** Гиперболические подмодели несжимаемой вязкоупругой среды Максвелла // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 2013. Т. 281. С. 84–97.
8. **Мошкин Н. П.** Нестационарные течения вязкоупругой жидкости Максвелла около критической точки с противотоком в начальный момент // Сиб. журн. индустр. математики. 2022. Т. 25, № 1. С. 92–104.
9. **Meleshko S. V., Moshkin N. P., Pukhnachev V. V.** On exact analytical solutions of equations of Maxwell incompressible viscoelastic medium // Intern. J. Non-Linear Mech. 2018. V. 105. P. 152–157.
10. **Meleshko S. V., Moshkin N. P., Pukhnachev V. V., Samatova V.** On steady two-dimensional analytical solutions of the viscoelastic Maxwell equations // J. Non-Newton. Fluid Mech. 2019. V. 270. P. 1–7.
11. **Liu J., Oberlack M., Wang Y.** Analytical investigation of viscoelastic stagnation-point flows with regard to their singularity // Appl. Sci. 2021. V. 11, N 15. 6931.

Поступила в редакцию 27/IV 2024 г.,
после доработки — 25/V 2024 г.
Принята к публикации 3/VI 2024 г.