

О РАЗЛЕТЕ ЧАСТИЦ ГРУНТА ПРИ ПОДЗЕМНОМ ВЗРЫВЕ

Т. Н. Чубинишвили

(Москва)

1. Рассматривается изотропное упругое однородное полупространство, на поверхности которого имеется насыпь — однородный слой мелких частиц. Частицы между собой не взаимодействуют. В точке O на расстоянии z_0 от поверхности находится точечный источник возбуждения, от которого распространяется сферическая волна сжатия.

Выберем цилиндрическую систему координат с началом на поверхности так, чтобы ось oz проходила через точку O (рис. 1).

Источник возбуждения начинает действовать в момент $t=0$. В момент $t=t_0$ волна достигает точки M на дневной поверхности. При $t < t_0$ напряжение $zz < 0$. Считаем, что отрыв частиц насыпи от поверхности m произойдет в тот момент $t=t_1$, когда zz станет равным нулю и скорость частицы будет направлена вверх. Это зависит от веса частиц насыпи, от формы и интенсивности волны. Например, если рассматривать падающую волну сжатия с линейным характером действия, то отрыв вообще не произойдет, так как ни при каком значении t zz не обратится в нуль и скорость частицы на поверхности не будет направлена вверх. Ниже будет сказано подробнее о том случае, когда нет отрыва частиц при рассматриваемой нами форме падающей волны.

Считаем, что скорость частицы насыпи до момента отрыва равна скорости соответствующей точки M дневной поверхности. При $t > t_1$ частицы движутся под действием силы тяжести, не взаимодействуя между собой.

Будем считать, что длина волны меньше z_0 так, что волна для малого участка фронта является локально плоской.

Рассмотренная задача может служить простой моделью разрушения верхнего непрочного слоя грунта при подземном взрыве на выброс.

2. Рассмотрим произвольное сечение полупространства плоскостью, проходящей через ось oz , и обозначим его через xoz . Обозначим через p_0 — продольную падающую волну; ϕ_0 — угол падения этой волны; через p и φ — соответственно продольную отраженную волну и угол ее отражения ($\varphi=\phi_0$); через s и ψ — поперечную отраженную волну и угол ее отражения, a — скорость распространения продольной волны, b — поперечной.

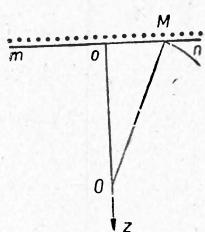


Рис. 1. Схема задачи.

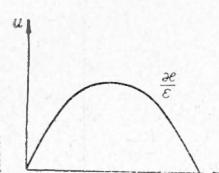


Рис. 2. Форма падающей волны.

Вектор перемещения \vec{u} представим в виде

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + \vec{u}_p + \vec{u}_s, \quad (2.1)$$

здесь \vec{u}_0 — перемещение в продольной падающей волне, \vec{u}_p и \vec{u}_s — перемещения в продольной и поперечной отраженных волнах.

Имеем:

$$\begin{aligned} u_x &= u_{ox} + u_{px} + u_{sx}; \quad u_z = u_{oz} + u_{pz} + u_{sz}; \\ u_{ox} &= -u_0 \cdot \sin \varphi_0, \quad u_{oz} = u_0 \cos \varphi_0; \\ u_{px} &= u_p \sin \varphi_0, \quad u_{pz} = u_p \cos \varphi_0; \\ u_{sx} &= -u_s \cos \psi, \quad u_{sz} = u_s \sin \psi. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Аналогичные обозначения примем для скоростей \vec{v} , \vec{v}_0 , \vec{v}_p , \vec{v}_s .

Пусть плотность насыпи есть $\frac{dm}{dS}$, где dm — элемент массы насыпи, соответствующий элементу площади dS поверхности m . Для характеристики веса частиц насыпи введем параметр $\alpha = \frac{g dm}{(\lambda + 2\mu) dS}$. Учитывая вес частиц насыпи напряжения σ_{zz} и τ_{xz} при $z = 0$, запишем так:

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_{zz}}{\lambda + 2\mu} &= -\alpha + \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \frac{\partial u_x}{\partial x}, \\ \frac{\tau_{xz}}{\lambda + 2\mu} &= \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Продольную падающую волну задаем как плоскую, семейством параболов:

$$\begin{aligned} u_0 &= \cos^2 \varphi_0 \left[\varepsilon g \left(t - t_0 - \frac{x - x_0}{a} \sin \varphi_0 + \frac{z}{a} \cos \varphi_0 \right)^2 - \right. \\ &\quad \left. - a \times \left(t - t_0 - \frac{x - x_0}{a} \sin \varphi_0 + \frac{z}{a} \cos \varphi_0 \right) \right] \end{aligned} \quad (2.4)$$

при

$$0 < t - t_0 < \frac{a}{g} \cdot \frac{z}{\varepsilon}.$$

$$u_0 = 0 \text{ при } \frac{a}{g} \cdot \frac{z}{\varepsilon} \leq t - t_0,$$

где x_0 — координата точки M ; α — параметр, характеризующий интенсивность волны; ε — характеризует продолжительность действия импульса (рис. 2).

Введем обозначения для скорости в падающей волне

$$v_0 = f_0(\zeta_0) = (2\varepsilon g \zeta_0 - \alpha a) \cos^2 \varphi_0, \quad (2.5)$$

$$\zeta_0 = t - t_0 - \frac{x - x_0}{a} \sin \varphi_0 + \frac{z}{a} \cos \varphi_0,$$

а через $v_p = f_1(\zeta_p)$ и $v_s = f_2(\zeta_s)$ — искомые скорости в отраженных волнах, где

$$\zeta_p = t - t_0 - \frac{x - x_0}{a} \sin \varphi_0 - \frac{z}{a} \cos \varphi_0;$$

$$\zeta_s = t - t_0 - \frac{x - x_0}{a} \sin \varphi_0 - \frac{z}{b} \cos \psi.$$

При $z=0$, $\zeta_0 = \zeta_p = \zeta_s = \xi$; в дальнейшем под ξ_0 , ξ_1 и т. д. будем подразумевать значения ξ при $t=t_0$, t_1 и т. д.

Наша задача заключается в отыскании значений v_p и v_s при $\xi=\xi_1$, т. е. когда $\sigma_{zz}=0$.

3. Для определения $f_1(\xi)$ и $f_2(\xi)$ имеем условия на границе $z=0$ (закон Ньютона):

$$\begin{aligned} gdm + \sigma_{zz} dS &= u_z dm; \\ \tau_{xz} dS &= u_x dm. \end{aligned} \quad (3.1)$$

Кроме того, при $t=t_0$

$$u_x = u_z = v_x = v_z = 0.$$

Далее, для определения момента отрыва t_1 имеем условие

$$\sigma_{zz}(t_1) = 0. \quad (3.2)$$

Условия на границе (3.1) перепишем так:

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\sigma_{zz}}{\lambda + 2\mu} = v_z' \frac{\alpha}{g}; \\ \frac{\tau_{xz}}{\lambda + 2\mu} &= v_x' \frac{\alpha}{g}. \end{aligned}$$

Подставив сюда вместо σ_{zz} , τ_{xz} , v_x , v_z их выражения через $f_0(\xi)$, $f_1(\xi)$, $f_2(\xi)$, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для f_1 и f_2 :

$$\begin{aligned} \frac{a_1}{a} f_1(\xi) + \frac{a_2}{a} f_2(\xi) + \alpha \frac{c_1}{g} f_1'(\xi) + \alpha \frac{c_2}{g} f_2'(\xi) &= \\ = \frac{a_1}{a} f_0(\xi) - \alpha \frac{c_1}{g} f_0'(\xi), \quad (3.3) \\ \frac{b_1}{a} f_1(\xi) + \frac{b_2}{a} f_2(\xi) + \alpha \frac{d_1}{g} f_1'(\xi) + \alpha \frac{d_2}{g} f_2'(\xi) &= \\ = - \frac{b_1}{a} f_0(\xi) - \alpha \frac{d_1}{g} f_0'(\xi) \end{aligned}$$

и начальные условия при $\xi=\xi_0$:

$$f_1'(\xi_0) = M_1 f_0'(\xi_0), \quad f_2'(\xi_0) = M_2 f_0'(\xi_0). \quad (3.4)$$

Здесь не выписаны условия для перемещений ($u_x = u_z = 0$ при $t=t_0$), так как нас интересуют только скорости.

В (3.3) и (3.4) введены обозначения:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{b^2}{a^2} \left(\frac{\alpha}{\mu} + 2 \cos^2 \varphi_0 \right), \quad a_2 = 2 \frac{b^2}{a^2} \sin \varphi_0 \cos \psi; \\ b_1 &= \frac{b^2}{a^2} \sin 2\varphi_0, \quad b_2 = \frac{b^2}{a^2} \left(\frac{a}{b} - \frac{2b}{a} \sin^2 \varphi_0 \right); \\ c_1 &= \cos \varphi_0, \quad c_2 = \sin \psi, \quad d_1 = \sin \varphi_0, \quad d_2 = \cos \psi; \\ \sin \psi &= \frac{b}{a} \sin \varphi_0; \quad \cos \psi = \frac{b}{a} \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - \sin^2 \varphi_0}; \end{aligned}$$

$$M_1 = \frac{d_1 c_2 - c_1 d_2}{c_1 d_2 + c_2 d_1}; \quad M_2 = -\frac{2c_1 d_1}{c_1 d_2 + d_1 c_2}.$$

Решая систему (3.3) при условиях (3.4), получим

$$\begin{aligned} f_i(\xi) = & A_i f_0(\xi) + \varepsilon \alpha a B_i + [C_i f_0(\xi_0) + \varepsilon \alpha a D_i] e^{\frac{l_1 \tau}{a}} + \\ & + [K_i f_0(\xi_0) + \varepsilon \alpha a L_i] e^{\frac{l_2 \tau}{a}} \quad (3.5) \\ & (i=1,2), \end{aligned}$$

где $\tau = \xi \frac{g}{a}$;

$$\begin{aligned} A_i = & -\left(\frac{R_1}{l_1} \gamma_i^{(2)} + \frac{R_2}{l_1} \gamma_i^{(1)} \right); \\ B_i = & -2 \left(\frac{R_1 + Q_1 l_2}{l_2^2} \gamma_i^{(2)} + \frac{R_2 + Q_2 l_1}{l_1^2} \gamma_i^{(1)} \right) \cos^2 \varphi_0; \\ C_i = & \frac{R_2}{l_1} \gamma_i^{(1)} + \frac{\gamma_2^{(2)} M_1 - \gamma_1^{(2)} M_2}{\Delta} \gamma_i^{(1)}; \quad D_i = 2 \frac{R_2 + Q_2 l_1}{l_1^2} \gamma_i^{(1)} \cos \varphi_0; \\ K_i = & \frac{R_1}{l_2} \gamma_i^{(2)} + \frac{\gamma_1^{(1)} M_2 - \gamma_2^{(1)} M_1}{\Delta} \gamma_i^{(2)}; \\ L_i = & 2 \frac{R_1 + Q_1 l_2}{l_2^2} \gamma_i^{(2)} \cos^2 \varphi_0; \\ & (i=1,2), \end{aligned}$$

здесь

$$R_i = (-1)^i \frac{a_1 N^i + b_1 M^i}{\Delta_1}; \quad Q_i = (-1)^{i+1} \frac{c_1 N^i + d_1 M^i}{\Delta_1};$$

$$N^i = d_1 \gamma_1^{(i)} - d_2 \gamma_2^{(i)}; \quad M^i = c_1 \gamma_1^{(i)} + c_2 \gamma_2^{(i)};$$

$$\Delta = \gamma_1^{(1)} \gamma_2^{(2)} - \gamma_2^{(1)} \gamma_1^{(2)}; \quad \Delta_1 = -(c_1 d_2 + d_1 c_2) \Delta;$$

l_1 и l_2 — корни характеристического уравнения

$$(c_1 d_2 + c_2 d_1) l^2 + (a_1 d_2 + a_2 d_1 + b_1 c_2 + b_2 c_1) l + (a_1 b_2 + a_2 b_1) = 0.$$

$$\gamma_1^{(1)} = a_2 + l_1 c_2; \quad \gamma_1^{(2)} = b_2 + l_2 d_2;$$

$$\gamma_2^{(1)} = a_1 + l_1 c_1; \quad \gamma_2^{(2)} = b_1 + l_2 d_1.$$

Таким образом, $f_1(\xi)$ и $f_2(\xi)$ определены. Определим теперь момент отрыва t_1 , а также v_x и v_z при $t=t_1$. Условие (3.2) можно записать так:

$$a_1 f_0(\xi_1) - a_1 f_1(\xi_1) - a_2 f_2(\xi_1) - a a = 0.$$

Переходя к безразмерному времени τ , получаем уравнение для определения τ_1 :

$$S_1 e^{\frac{l_1}{a} \tau_1} + S_2 e^{\frac{l_2}{a} \tau_1} + S = 0. \quad (3.6)$$

$$S_1 = -(a_1 C_1 + a_2 C_2) \cos^2 \varphi_0 + \varepsilon a (a_1 D_1 + a_2 D_2);$$

$$S_2 = -(a_1 K_1 + a_2 K_2) \cos^2 \varphi_0 + \varepsilon a (a_1 L_1 + a_2 L_2);$$

$$S = a (1 + \varepsilon a_1 B_1 + \varepsilon a_2 B_2).$$

Значения горизонтальной и вертикальной скоростей частиц v_x и v_z в момент отрыва будут:

$$v_x = [f_1(\xi_1) - f_0(\xi_1)] \sin \varphi_0 - f_2(\xi_1) \frac{b}{a} \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - \sin^2 \varphi_0}, \quad (3.7)$$

$$v_z = [f_0(\xi_1) + f_2(\xi_1)] \cos \varphi_0 + f_2(\xi_1) \frac{b}{a} \sin \varphi_0.$$

Рассматривая центральную зону ($\varphi_0=0^\circ$) из (3.6) и (3.7), получаем

$$\tau_1 = \alpha \ln \frac{1 + \frac{z}{\alpha} \frac{1}{2\varepsilon}}{1 - \frac{1}{4\varepsilon}},$$

$$v_x = 0, \quad v_z(\tau_1) = -2\varepsilon + \alpha \left(4\varepsilon \ln \frac{1 + \frac{z}{\alpha} \frac{1}{2\varepsilon}}{1 - \frac{1}{4\varepsilon}} - 1 \right).$$

Для существования τ_1 необходимо $\frac{1}{4\varepsilon} < 1$; если $\frac{1}{4\varepsilon} \geqslant 1$, то σ_{zz} никогда не станет равным нулю и отрыв не произойдет. На рис. 3 показаны области тех значений параметра

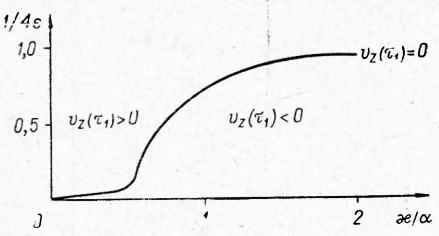


Рис. 3. График v_z при $\varphi_0=0^\circ$.

ров $\left(\frac{1}{4\varepsilon}, \frac{z}{\alpha} \right)$, для которых $v_z > 0$ (отрыв не происходит) и $v_z < 0$ (отрыв происходит). Отрыв частиц от дневной поверхности не произойдет также на кривой $v_z = 0$, для которой прямая $\frac{1}{4\varepsilon} = 1$ является асимптотой.

После отрыва движение частиц насыпи характеризуется дальностью полета ($t > t_1$)

$$r = v_x(t - t_1) + z_0 \operatorname{tg} \varphi_0 \quad (3.8)$$

и высотой полета

$$z = \frac{g(t - t_1)^2}{2} + v_z(t - t_1). \quad (3.9)$$

Максимальная высота полета частицы насыпи z_{\max} и точка падения r_1 даются выражениями:

$$z_{\max} = -\frac{v_z^2}{2g},$$

$$r_1 = -\frac{2v_x v_z}{g} + z_0 \operatorname{tg} \varphi_0. \quad (3.10)$$

Фиксируя положения разных частиц насыпи в разные моменты времени, получаем картину движения поверхности насыпи (образование купола). После падения частиц на дневную поверхность нарушается однородность слоя насыпи, в слое появляется кратер и горка (см. рис. 10).

Общую картину расположения частиц на поверхности mn после падения определяем так: пусть N частиц, расположенных в кольце $(r_0, r_0 + dr_0)$, после падения размещается в кольце $(r_1, r_1 + dr_1)$. Плотность $\frac{N}{2\pi r_0 dr_0}$ меняется на $\frac{N}{2\pi r_1 dr_1}$, и «рассевивание» частиц характеризуется так

$$\gamma = \frac{r_0 dr_0}{r_1 dr_1};$$

представляя r_0 как $r_0 = F(r_1)$, получим

$$\gamma = \frac{F(r_1)}{r_1} F'(r_1). \quad (3.11)$$

До этого мы считали, что $\alpha \neq 0$. Пусть теперь $\alpha = 0$. В этом случае подразумевается, что частицы насыпи не оказывают давления на полу-пространство $z > 0$. Условия на границе (3.1) теперь напишутся так (условия свободной поверхности)

$$\text{при } z = 0 \quad \sigma_{zz} = 0, \quad \tau_{xz} = 0.$$

Определение f_1 и f_2 в этом случае сводится к определению коэффициента отражения продольной волны A и коэффициента отражения по-перечной волны B :

$$A = \frac{a_1 b_2 - a_2 b_1}{a_1 b_2 + a_2 b_1}; \quad B = \frac{2a_1 b_1}{a_1 b_2 + a_2 b_1}.$$

В этом случае момент прихода волны в точку M совпадает с моментом отрыва частиц насыпи от поверхности с начальной скоростью \bar{v} (v_x, v_z):

$$v_x = -\kappa a \cos^2 \varphi_0 \left[(A - 1) \sin \varphi_0 - B \frac{b}{a} \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - \sin^2 \varphi_0} \right];$$

$$v_z = -\kappa a \cos^2 \varphi_0 \left[(A + 1) \cos \varphi_0 + B \frac{b}{a} \sin \varphi_0 \right].$$

Движение частиц насыпи после отрыва характеризуется по формулам (3.8) — (3.11).

4. Рассмотренная модель разрушения верхнего непрочного слоя грунта при подземном взрыве на выброс включает следующие главные моменты: 1) приход волны к поверхности, 2) начало движения частиц поверхностной насыпи, 3) образование купола — движение слоя частиц насыпи вверх, 4) образование воронки выброса. Рисунки 3—10 отражают картину $t_1 - \tau_0$ описанной задачи для следующих значений параметров $\alpha = 0; 0,1; 0,2; 0,5; \kappa = 0,5; \epsilon = 1; \varphi_0 = 0, 10, 20, 30, 40, 60^\circ$, коэффициент Пуассона $\nu = 0,29$.

На рис. 4 дана кривая $t_1 - \tau_0$ — это промежуток времени между приходом волны к поверхности mn и началом движения частиц насыпи. При первом рассмотрении явления ($\alpha \neq 0$) видим, что эта временная разница увеличивается с увеличением веса частиц насыпи, т. е. возрастает α : для углов $0—20^\circ$ меняется незначительно, потом начинает быстро возра-

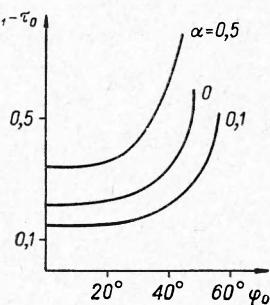


Рис. 4. График $t_1 - \tau_0$.

стать и при $46-58^\circ$ уже стремится к бесконечности. Это означает, что частицы насыпи, заметно отдаленные от эпицентра взрыва, остаются неподвижными. Если не учитывать взаимодействия насыпанного слоя с упругим полупространством (т. е. $\alpha=0$), то видим, что $\tau_1-\tau_0=0$. В этом случае частицы насыпи начинают движение — «подпрыгивают», как только волна приходит к поверхности.

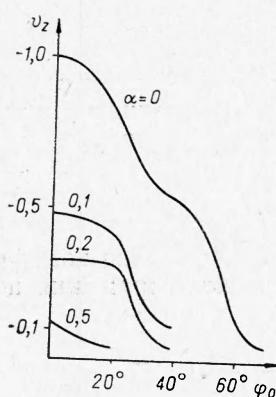
На рис. 5 дана вертикальная составляющая скорости v_z . Для всех значений α она от своего максимального значения, при $\varphi_0=0^\circ$ уменьшаясь, приближается к нулевому значению (с увеличением φ_0). С увеличением веса частиц уменьшается (по модулю) скорость v_z . С увеличением α область значений φ_0 , где $v_z < 0$, резко уменьшается,

например: при $\alpha=0$, $v_z=0$, когда $\varphi_0=90^\circ$, а при $\alpha=0,5$ $v_z=0$ уже при $\varphi_0=30^\circ$). Рис. 6 показывает горизонтальную составляющую скорости v_x . В зависимости от значения параметра α , v_x достигает своего максимального значения в промежутке $25-45^\circ$. С увеличением веса частиц v_x уменьшается. Как и для v_z , с увеличением α область значений, где $v_x > 0$, резко уменьшается.

Кривая z_{\max} (рис. 7) — максимальная высота полета — меняется от своего максимального значения при $\varphi_0=0^\circ$ к нулю ($\varphi_0=10, 30, 40, 90^\circ$). Как видно для значений $\alpha=0$ и $\alpha \neq 0$ величина z_{\max} резко отличается.

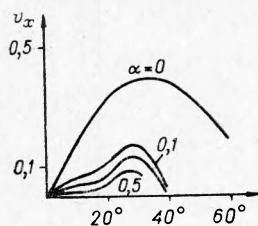
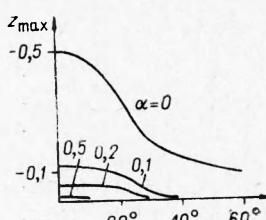
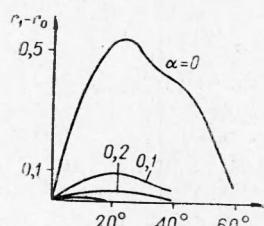
На рис. 8 дана кривая r_1-r_0 в зависимости от φ_0 и от α . r_1-r_0 — это перемещение частиц насыпи, т. е. расстояние от места падения до их начального положения. Частица, лежащая на отметке $\varphi_0=0^\circ$, падает на то же место. Все остальные частицы насыпи, для которых начальная скорость направлена вверх, меняют свое начальное положение. Расположение кривых для разных значений α показывает, что с увеличением веса частиц уменьшается r_1-r_0 .

Разница во времени начала движения частиц насыпи, разная начальная скорость и разная продолжительность времени полета частиц образуют неплоскую поверхность движущегося слоя насыпи. На рис. 9 взяты три момента времени и для этих моментов определены положения разных частиц на соответствующих траекториях движения (график составлен для $\alpha=0$). Таким образом, можно проследить стадии развития купола. Движение начинает частица, лежащая на отметке $\varphi_0=0^\circ$. Постепенно в движение вовлекаются частицы, расположенные поблизости от $\varphi_0=0^\circ$ и т. д. Частица, соответствующая отметке $\varphi_0=0^\circ$, достигнув максимальной высоты, начинает падение вертикально, остальные же частицы перемещаются и в горизонтальном направлении. На рис. 10 дан

Рис. 5. График v_z .

до их начального положения. Частица, лежащая на отметке $\varphi_0=0^\circ$, падает на то же место. Все остальные частицы насыпи, для которых начальная скорость направлена вверх, меняют свое начальное положение. Расположение кривых для разных значений α показывает, что с увеличением веса частиц уменьшается r_1-r_0 .

Разница во времени начала движения частиц насыпи, разная начальная скорость и разная продолжительность времени полета частиц образуют неплоскую поверхность движущегося слоя насыпи. На рис. 9 взяты три момента времени и для этих моментов определены положения разных частиц на соответствующих траекториях движения (график составлен для $\alpha=0$). Таким образом, можно проследить стадии развития купола. Движение начинает частица, лежащая на отметке $\varphi_0=0^\circ$. Постепенно в движение вовлекаются частицы, расположенные поблизости от $\varphi_0=0^\circ$ и т. д. Частица, соответствующая отметке $\varphi_0=0^\circ$, достигнув максимальной высоты, начинает падение вертикально, остальные же частицы перемещаются и в горизонтальном направлении. На рис. 10 дан

Рис. 6. График v_x .Рис. 7. График z_{\max} .Рис. 8. График r_1-r_0 .

контура окончательного распределения частиц на поверхности m (кривая γ). Как видно, в насыпи образуются воронка и горка. В центральной части воронки имеется пик, который возник вследствие того, что частицы, расположенные на отметке $\varphi_0=0$ в горизонтальном направлении, не перемещаются и падают на свое же начальное место. С увеличением α уменьшается воронка и, следовательно, и горка.



Рис. 9. График развития купола.

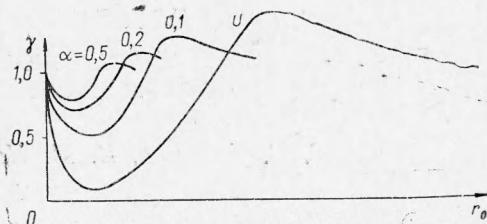


Рис. 10. График воронки.

Рассмотренная нами картина образования купола и воронки очень сходна с приводимой ранее¹. Разница, которая существует в контурах купола, в траекториях частиц и контурах воронок, обусловлена нашими упрощающими предположениями. Например, контуры воронок, по данным упомянутых авторов, не имеют пика в центральной зоне и борта их менее круты, что вызвано неустойчивостью бортов — их осипанием (это в нашей схеме не учитывается).

Автор благодарит Н. В. Зволянского и Л. М. Флитмана за постановку задачи и ценные обсуждения.

Поступила в редакцию
27/IX 1967

¹ М. М. Докучаев, В. Н. Родионов, А. Н. Ромашев. Взрыв на выброс. М., Изд-во АН СССР, 1963.