

РАЗРУШЕНИЕ ГОРНЫХ ПОРОД

УДК 534.013; 622.24; 622.23.01

КРУТИЛЬНО-ПРОДОЛЬНЫЕ АВТОКОЛЕБАНИЯ БУРИЛЬНОЙ КОЛОННЫ С ДОЛОТОМ ДРОБЯЩЕ-СКАЛЫВАЮЩЕГО ДЕЙСТВИЯ ПРИ ПОСТОЯННОМ НАТЯЖЕНИИ КАНАТА ПОДВЕСА

В. А. Корнатов

*Братский государственный университет,
E-mail: kortavik@mail.ru, ул. Макаренко, 40, 665709, г. Братск, Россия*

Предлагается расчетная схема роторного бурения на примере двухмассовой модели бурильной колонны с долотом дробяще-скалывающего действия. Сила лобового сопротивления, действующая на долото со стороны породы, определяется в нелинейном виде: помимо зависимости от скорости погружения, учитывается потеря прочности опорной среды при силовом воздействии на нее. Рассматриваются непрерывное силовое действие вращающимся долотом и импульсивное при ударе бурильной колонны в моменты завершения возможного отрыва долота от забоя. Определяются начальные условия для послеударного процесса, устанавливающие начальную скорость погружения и вращения долота, учтена возможность эффектов stick-slip. Результаты численного моделирования показывают, что, в сравнении с крутильными, крутильно-продольные автоколебания бурильной колонны достаточно часто приводят к возникновению хаотичных режимов бурения.

Теория бурения, роторное бурение, бурильная колонна, крутильно-продольные автоколебания, сила лобового сопротивления, долото дробяще-скалывающего действия, stick-slip эффект, детерминированный хаос

DOI: 10.15372/FTPRPI20230105

Моделирование роторного способа бурения с помощью стандартных методов классической механики затруднено из-за того, что получаемые дифференциальные уравнения, обыкновенные или в частных производных, не дают возможности описывать сам процесс погружения бурильной колонны [1–5]. Применение существующих аналогов в классической механике для силы лобового сопротивления (например, если она считается постоянной или упругой силой, либо заменяется трением скольжения или сухого трения) затруднительно. Как показывает опыт, сложившаяся система описания не подходит при моделировании погружения сваи [6, 7] или трубы в грунт [8–11]. Неприемлема здесь и аналогия с воздушными средами, когда такая сила сопротивления считается зависимой от скорости погружения в линейном или квадратичном виде — в форме Резаля или Понселе [12]. На это указывают заметные расхождения между теорией и результатами экспериментов при моделировании проникания ударника или сваи в грунт [6, 7, 12]. При моделировании бурения попытки выразить силу лобового сопротивления в соответствии с про-

мысловыми данными прямо пропорционально скорости погружения и обратно пропорционально частоте вращения долота в стандартной форме [1, 2] приводят к некорректностям или неопределенностям [13, 14]. Если указанные кинематические величины имеют нулевое значение по отдельности или совместно, то сила сопротивления становится равной бесконечности или принимает нулевое значение. Это не позволяет моделировать переходные процессы бурения, во время которых погружение и вращение долота приостанавливаются. Для долота во вращательном движении подобные случаи могут возникать как при смене направления вращения в виде мгновенных остановок, так и во время кратковременных остановок – заклиниваний в погружении. Они нередки при установлении периодических автоколебаний, а также характерны для переходных режимов бурения. Такие прерывистые движения принято называть эффектами stick-slip, которые крайне нежелательны в промышленной практике и поэтому вызывают особый интерес с целью их предотвращения.

Для того чтобы учитывать динамику погружения бурильной колонны, установилась общепринятая практика использования эмпирических соотношений дополнительно к уравнениям механики [1, 2, 15]. Подобные соотношения выражают приближенную зависимость скорости погружения бурильной колонны от силы осевого давления на долото и частоты его вращения. Они устанавливаются не согласно законам механики, а на основе данных наблюдений промышленной практики и применяются преимущественно на тех территориях, где были получены [15]. Причина указанных трудностей заключается в отсутствии для силы лобового сопротивления аналитического выражения нужного вида [13, 14], при котором исключалась бы возможность возникновения некорректностей и в то же время учитывалась физика взаимодействия долота с породой.

Существует и альтернативный путь поиска решения проблемы, который применим только для долота режущего действия (для долота дробяще-скалывающего действия он не подходит). Сила лобового сопротивления задается в виде неизвестной функции с запаздывающим аргументом [5, 16, 17]. Такая функция, помимо текущего состояния долота, определяет и недавнее его действие, позволяя находить толщину срезаемого слоя грунта за время запаздывания. Внешне выглядит все корректно, поэтому нет необходимости использования эмпирических соотношений. Трудности появляются при поиске решений для получаемых дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Методы нахождения их решений развиты не так хорошо в сравнении с методами решений обыкновенных дифференциальных уравнений. При проведении численных расчетов возникают сложности учета величины запаздывания, если она не постоянна, а зависит от времени. Это предопределяет необходимость принятия основного допущения для таких моделей — время запаздывания должно быть постоянным [5, 16, 17]. Такое ограничение предполагает возможность описания только установившихся режимов бурения, а переходные процессы, играющие важную роль, моделировать не удастся. К недостаткам данного подхода следует отнести и то, что сила сопротивления в таких моделях считается независимой от скорости погружения [18]. В них также не учитывается потеря прочности породы при силовом воздействии на нее. Фрикционная составляющая силы сопротивления определяется согласно закону Амонтона – Кулона, несмотря на то что долото совершает непоступательное движение [19]. Известно, что поступательное движение для трущихся тел относительно друг друга — необходимое условие применимости этого закона. Оно строго соблюдалось в экспериментах при установлении закона сначала самим Кулоном, а в последующем и другими учеными [20].

На плохое соответствие классическому закону о трении при скольжении с верчением и несоблюдение необходимого условия одним из первых обратил внимание П. Контенсу [21]. Для таких случаев он предложил использовать закон о трении в дифференциальной форме,

что вызывает сомнение, так как выделяемые элементарные площадки, как и само тело, будут двигаться тоже непоступательно. На ошибочность подхода указывает и утверждение о том, что сила сухого трения при скольжении с верчением будет подобна силе вязкого трения, когда трение покоя отсутствует. Такой вывод следует из теории поликомпонентного сухого трения, где взят за основу закон о трении в дифференциальной форме [22]. Однако отсутствие трения покоя не подтверждается экспериментально, в чем можно убедиться, наблюдая за вращающимся круглым зеркальцем на наклонной плоскости [23], а также по опытным данным [24]. Заметим, что в [24] этот качественный результат замечен не был, хотя трение покоя отчетливо видно на всех шести приведенных графиках экспериментальных зависимостей для относительных значений силы трения. Обращать внимание на необходимое условие применимости закона о трении не принято, из-за чего возникают ошибки количественного и качественного характера, например в виде парадоксов Пенлеве [25, 26]. Стандартный подход приводит к заранее предсказуемой ошибке при нахождении силы бокового трения бурильной колонны о стенки скважины.

При описании крутильно-продольных автоколебаний бурильной колонны возникают сложности в нахождении начальных условий для послеударного процесса, в моменты завершения возможного кратковременного отрыва долота от забоя скважины. Это относится к обоим подходам — обычному и альтернативному. Стереомеханическая теория удара [27] не дает возможности определять силу удара, а значит, не позволяет учитывать его влияние на потерю прочности породы в забое. Уменьшение прочности визуально выражается в появлении микро- и макротрещин, возникновение которых может существенно влиять на начало послеударного процесса. До сих пор отсутствовала возможность заранее определять, при каком текущем ударе не может начаться погружение бурильной колонны в грунт, а при каком — может, и с какой начальной скоростью это будет происходить. Обычно упрощенно принимается, что погружение ударника начнется при любом ударе, а начальная скорость погружения будет равна начальной скорости удара [6–12]. Данное утверждение не соответствует действительности. Например, при очень слабом ударе погружение ударника на практике не может начаться, а начальная скорость погружения тем не менее оказывается отличной от нуля, так как она приравнена к начальной скорости удара. Ошибка такого подхода заключается в том, что фаза удара безосновательно совмещается с началом погружения тела в грунт. Фаза удара должна предшествовать началу погружения как подготовительный этап в снижении прочности верхнего слоя породы.

В настоящей работе решение указанных проблем предлагается искать в следующих направлениях: при определении силы лобового сопротивления надлежит отказаться от аналогии с воздушными средами и принять необходимость учитывать потерю прочности породы при силовом воздействии на нее [28–30]; влияние текущего удара на изменение прочности породы в забое предлагается рассматривать не через силу такого удара, а через сравнение его с вводимым эталонным ударом [28–30]; при непоступательном движении трущихся тел следует применять метод кинематических зон [23, 26], позволяющий с необходимыми поправками корректно использовать классический закон Амонтона–Кулона при нахождении силы трения. Предлагается ввести новую обоснованную аналитическую зависимость для силы лобового сопротивления, а также использовать элементарную теорию проникания ударника в грунт при однократном ударе [28–30], разработанную автором. Сила лобового сопротивления вводится применительно к бурильной колонне с долотом дробяще-скалывающего действия для твердых пород, и с долотом режущего действия — для нетвердых и мягких грунтов. Для введенной двухмассовой модели бурильной колонны с долотом дробяще-скалывающего действия приведен пример построения математической теории роторного бурения, применимой для описания крутильно-продольных автоколебаний.

СИЛА ЛОБОВОГО СОПРОТИВЛЕНИЯ

Простые наблюдения показывают, что при превышении предела прочности грунта силовым воздействием на него, например вращающимся долотом, сила лобового сопротивления становится меньше действующей силы давления, при непревышении — она будет оставаться неизменной, равной силе давления. Об этом свидетельствует начало погружения тела в грунт в первом случае и отсутствие погружения — во втором, а также значения силы натяжения каната талевой системы, на котором подвешивается бурильная колонна.

Ранее в работах по крутильным автоколебаниям бурильной колонны, чтобы избежать указанных некорректностей, предлагалась сила лобового сопротивления в виде аппроксимации Паде 1-го рода [13, 14]:

$$F_c = F_0 \frac{\dot{x} + \Delta}{\dot{x} + bR|\dot{\phi}| + \Delta}. \quad (1)$$

Здесь F_0 — наибольшая сила лобового сопротивления, подлежащая определению; b , Δ — коэффициенты аппроксимации, определяемые экспериментально; R — радиус долота; точкой $\dot{\cdot}$ обозначается дифференцирование по времени t .

Физическое содержание формулы (1) не объяснялось, но отмечалось, что ее вид выражает прямую пропорциональность от скорости погружения \dot{x} , и обратную — от угловой скорости $\dot{\phi}$ вращения долота. Формула (1) качественно соответствует промышленным данным [1, 2] о зависимости силы сопротивления от указанных кинематических величин и позволяет избежать отмеченные некорректности.

С пониманием необходимости учитывать изменение прочности породы, представляется возможным дать обоснование формуле (1) с учетом физики взаимодействия долота с породой. При вращении долота за счет соударений зубьев шарошек о породу возникают микро- и макротрещины: в поперечном направлении они способствуют скалыванию небольших фрагментов породы, а в продольном — уменьшению целостности среды в этом направлении. Следовательно, силовое действие вращающимся долотом будет влиять на прочность грунта в близлежащем слое за счет образования трещин и скалывания фрагментов породы. Сила ударов возрастает при увеличении частоты вращения $\dot{\phi}$, а направление вращения долота не учитывается, поэтому она берется по модулю. Данный факт объясняет обратно пропорциональную зависимость силы лобового сопротивления от $|\dot{\phi}|$. Это будет справедливо для бурильной колонны с долотом дробяще-скалывающего действия при работе в твердых породах. Для твердых пород потеря прочности проявляется, прежде всего, возникновением трещин, для мягких — наличие трещин не столь характерно. Более эффективное для мягких пород — долото режущего типа, действие которого приводит к рыхлению через образование отдельных канавок перед снятием очередного слоя грунта.

Если допустить возможность удара бурильной колонны при завершении кратковременного отрыва долота от поверхности забоя, то формула (1) обобщается следующим образом:

$$F_c = F_0 \frac{\dot{x} + \Delta}{\dot{x} + bR|\dot{\phi}| + b_1(\dot{x}_- + aR\dot{\phi}_-)e^{-\theta(x-x_{**})} + \Delta}, \quad (2)$$

где x, x_{**} — координаты, определяющие положение долота соответственно в текущий момент времени и в момент, когда произошел последний удар бурильной колонны о грунт забоя; b_1 — коэффициент аппроксимации; $\dot{x}_-, \dot{\phi}_-$ — начальные скорости составляющих комбинированного удара соответственно прямого и вращательного; a — безразмерный коэффициент пропорциональности, характеризующий отличия в изменении прочности среды от вращатель-

ного удара в продольном направлении по сравнению с действием другой составляющей удара; ϑ — коэффициент затухания, характеризующий быстроту восстановления прочностных свойств грунта по мере удаления от места удара. Функция $e^{-\vartheta(x-x^{**})}$ определяет заданный закон затухания силы удара по мере удаления от места нанесения текущего удара. При отсутствии ударов, следует принять, что $\dot{x}_- \equiv 0$; $\dot{\varphi}_- \equiv 0$, а при наличии нескольких ударов, нанесенных о забой бурильной колонны на разных глубинах скважины, предлагается учитывать только последний из них. Это предполагает быстрое затухание ударов при $\vartheta \gg 1$. С физической точки зрения дополнительно к непрерывному силовому воздействию на грунт, создаваемому долотом, присоединяется результат действия совершенного удара. Силовое действие его, согласно элементарной теории проникания ударника в грунт при однократном ударе [28–30], считается прямо пропорциональным начальной обобщенной скорости $\dot{x}_- + aR\dot{\varphi}_-$, а сам удар называется комбинированным [30]. Формула (2) в дальнейшем берется за основу для принимаемой модели бурильной колонны и выражает обратную пропорциональную зависимость от кинематических величин, которые характеризуют силовое действие от долота и удара, приводящее к потере прочности породы в забое.

Заметим, что для долота режущего действия силу лобового сопротивления следует описывать в таком виде:

$$F_c = \begin{cases} F_0 \frac{\dot{x} + \Delta}{\dot{x} + bR\dot{\varphi} + b_1(\dot{x}_- + aR\dot{\varphi}_-)e^{-\vartheta(x-x^{**})} + \Delta}, & \text{при } \dot{\varphi} > 0, \\ F_0 \frac{\dot{x} + \Delta}{\dot{x} + b_1(\dot{x}_- + aR\dot{\varphi}_-)e^{-\vartheta(x-x^{**})} + \Delta}, & \text{при } \dot{\varphi} \leq 0. \end{cases} \quad (3)$$

Учтено, что при $\dot{\varphi} > 0$ вращение долота происходит в направлении заостренных резцов, а при $\dot{\varphi} \leq 0$ вращение будет соответствовать действию резцов на грунт тыльными, неострыми сторонами, а значит, они не смогут уменьшать его прочность. При вращении в положительном направлении каждый резец снимает свою канавку в очередном слое грунта. Нарушается монолитность текущего слоя через образование канавок, которые могут быть либо полыми, либо иметь вид разрыхленных полос. Происходит снижение прочности слоя, а затем полное его снятие, в результате чего бурильная колонна начинает погружение. Рыхление будет тем интенсивнее, чем быстрее вращаются лопасти долота в нужном направлении, т. е. прямо пропорционально положительному значению $\dot{\varphi}$. Визуально это будет проявляться в более быстром погружении бурильной колонны. Долото такого типа, как уже отмечалось, эффективно для не твердых и мягких грунтов, где снижение прочности текущего слоя грунта заметнее в результате образования канавок от срезающего действия резцов, чем от образования трещин. Применение долота дробяще-скалывающего действия для таких грунтов было бы менее эффективно. Здесь также следует считать, что $x \geq x^{**}$, а при отсутствии ударов $\dot{x}_- \equiv 0$; $\dot{\varphi}_- \equiv 0$.

ОБ ЭТАЛОННОМ УДАРЕ

Термин “эталонный удар” вводится для того, чтобы избежать необходимости определения силы удара, так как это не предусмотрено в стереомеханической теории удара [27]. Он нужен для сравнения с текущим ударом при определении начальных условий послеударного процесса; в ситуации, когда надо знать, начнется погружение бурильной колонны в грунт забоя сразу после нанесенного удара или нет, а если начнется, то с какой начальной скоростью это произойдет. В соответствии с элементарной теорией проникания ударника в грунт при однократном ударе [28–30] дадим определения:

— холостой удар — удар, силы которого недостаточно, для того чтобы началось погружение бурильной колонны в грунт;

— эффективный удар — удар, при котором начинается погружение бурильной колонны в грунт забоя;

— эталонным ударом будем называть такой по силе удар, который разделяет между собой холостые и эффективные удары. Он является наиболее сильным из холостых ударов, когда погружение еще невозможно.

Погружение бурильной колонны в грунт не произойдет, если начальная скорость текущего удара будет меньше или равна начальной скорости эталонного удара. И наоборот, если такая скорость будет больше начальной скорости эталонного удара, то погружение произойдет с начальной скоростью [30]:

$$\dot{x}_0 + aR\dot{\phi}_0 = \dot{x}_- + aR\dot{\phi}_- - (\dot{x}_- + aR\dot{\phi}_-)_*, \quad (4)$$

где \dot{x}_0 , $\dot{\phi}_0$, $\dot{x}_- + aR\dot{\phi}_-$, $(\dot{x}_- + aR\dot{\phi}_-)_*$ — соответственно начальные скорости погружения и вращения долота, обобщенные начальные скорости текущего и эталонного ударов бурильной колонны.

Равенство (4) получено с помощью теории Герца. Такое утверждение при использовании стереомеханической теории удара считается гипотезой. Определение начальной скорости $(\dot{x}_- + aR\dot{\phi}_-)_*$ зависит от выбора динамической модели бурильной колонны, что будет учтено далее.

ГИПОТЕЗЫ ТЕОРИИ БУРЕНИЯ

Для математической теории бурения введем допущения.

- Грунт — однородная среда, обладающая следующими свойствами:
 - прочность не зависит от глубины скважины;
 - существующий запас прочности достаточный, чтобы погружение бурильной колонны не происходило под действием собственного веса, при отсутствии ударов, вибрационных или иных сил, приводящих к разрушению опорной среды;
 - прочность может уменьшаться вследствие специального силового воздействия — ударом или вращающимся долотом;
 - прочность быстро восстанавливается по мере удаления от места удара.
- Погружение бурильной колонны возможно при оказании специального силового воздействия на породу, приводящего к частичной потере ее первоначальной прочности.
- Силовое воздействие на породу прямо пропорционально соответствующей кинематической величине: модулю угловой скорости $|\dot{\phi}|$ — для долота дробяще-скалывающего действия; положительной угловой скорости вращения $\dot{\phi}$ — для долота режущего действия; обобщенной начальной скорости комбинированного удара $(\dot{x}_- + aR\dot{\phi}_-)$ — при ударе бурильной колонны о грунт.
- Холостой удар предполагается абсолютно неупругим [30], при котором отскок долота от забоя невозможен и направление вращения долота не может измениться в момент удара.
- Сила лобового сопротивления со стороны грунта определяется по формулам (2) для долота дробяще-скалывающего действия, (3) для долота режущего действия.
- Действие удара затухает достаточно быстро, что позволяет учитывать только последний из нанесенных ударов. При наличии нескольких ударов более ранние не учитываются.
- Послеударное кинематическое состояние долота, а также определение возможности начала погружения бурильной колонны в забое скважины предлагается делать в рамках элементарной теории погружения ударника в грунт при однократном ударе [28–30].
- Начальная обобщенная скорость проникания бурильной колонны в грунт забоя скважины от текущего удара равна разности между начальными обобщенными скоростями эффективного и эталонного ударов, т. е. согласно равенству (4).
- Зубья долота не изнашиваются.

СЦЕНАРИЙ БУРЕНИЯ ВЕРТИКАЛЬНОЙ СКВАЖИНЫ

При бурении скважин могут возникать следующие варианты погружения:

- нормальный режим при углублении забоя скважины, скорость вращения долота будет достаточной для необходимого уменьшения прочности породы;
- холостой режим начинается с приостановки углубления скважины вследствие замедления вращения долота (или даже полной его остановки). Для долота режущего действия это может осуществляться при вращении лопастей в сторону, противоположную направлению заостренных концов резцов.

- режим отрыва долота от забоя скважины при кратковременном отсутствии контакта между долотом и забоем скважины в моменты, когда возникающая упругая продольная сила становится равной весу бурильной колонны и направлена вверх.

- удар осуществляется в момент окончания режима отрыва долота от забоя. Удар может привести либо к началу погружения, если он обладает достаточной для этого силой, либо — нет. Кинематическое состояние бурильной колонны и долота сразу после удара могут быть следующими [30]: погружение бурильной колонны с вращением долота; вращение долота без погружения бурильной колонны; погружение бурильной колонны без вращения долота; остановка вращения долота и погружения бурильной колонны.

Окончание холостого режима может происходить как под воздействием возможного удара, так и силового воздействия вращающимся долотом, в том числе и при их совместном действии. Моменты переключения с одного режима погружения бурильной колонны на другой определяются через сравнение динамического предельно допустимого напряжения с текущим статическим, которые возникают в близлежащей области забоя около долота. Возможные отрывы бурильной колонны от забоя устанавливаются с помощью введенной функции влияния, определяющей силу осевого давления на долото бурильной колонны. Нахождение начальных условий сразу после удара делается с помощью элементарной теории проникания ударника в грунт [28–30].

ДВУХМАССОВАЯ МОДЕЛЬ БУРИЛЬНОЙ КОЛОННЫ

Бурильная колонна состоит из ведущей трубы (рис. 1), которая находится в устье скважины, утяжеленных труб — ВНА, располагаемых в самом низу, и обыкновенных — DS, которые предназначены для передачи вращения и подачи промывочной жидкости от устья скважины вниз к забою. В настоящей работе используется аббревиатура английских названий этих труб. Для вводимой модели бурильной колонны будем считать, что обыкновенные трубы обладают крутильной и продольной жесткостью. Их длина наращивается по мере углубления скважины, а ведущая труба и утяжеленные бурильные трубы являются абсолютно жесткими. Возможность возникновения поперечных деформаций бурильной колонны полностью исключается.

Для перехода от системы с распределенными параметрами к системе с конечным числом степеней свободы обыкновенные трубы заменяются на две пружины — кручения и растяжения–сжатия. Жесткости таких пружин будут равны $c_\varphi = G_{DS}J_{DS} / nL$ для кручения; $c_x = E_{DS}F_{DS} / nL$ для растяжения–сжатия, где $E_{DS}, G_{DS}, F_{DS}, J_{DS}$ — соответственно модули упругости и сдвига, площадь поперечного сечения и полярный момент инерции труб DS; L — длина одной трубы; n — число таких труб. Утяжеленные бурильные трубы жестко связаны с долотом и вращаются как единое целое. Их суммарная масса равна m с осевым моментом инерции I , а $L_{ВНА}$ — общая длина ВНА. Положение ВНА устанавливается через координаты φ, x , которые определяют для верхнего сечения соответственно угол поворота и перемещение его центра вдоль оси, направленной вниз по вертикали от устья скважины.

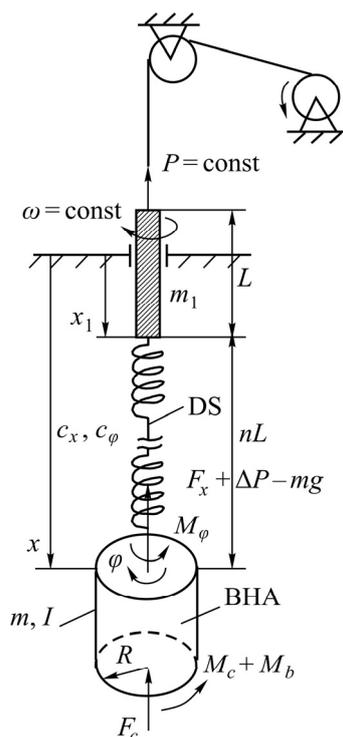


Рис. 1. Двухмассовая модель бурильной колонны: DS — обыкновенные трубы; ВНА — утяжеленные. Пояснения в тексте

Считается, что ведущая труба массой m_1 и длиной L закручивается с постоянной угловой скоростью ω . Ее положение устанавливается координатой x_1 , которая определяет положение центра нижнего сечения по отношению к устью скважины в направлении той же оси. Глубина скважины H определяется координатой x , как $H = x + L_{\text{ВНА}}$. Заметим, что скорость погружения и угловая скорость долота будут такие же, как у ВНА, которые равны \dot{x} и $\dot{\phi}$ (рис. 1). Скважина прямолинейна, искривление бурильной колонны отсутствует, поэтому боковое трение здесь не учитывается, а трение, создаваемое промывочной жидкостью, не берется во внимание. Ведущая труба подвешена на канате талевой системы, натяжение которого предполагается постоянным и задается равным P .

Долото бурильной колонны оказывает дробяще-скалывающее действие, порода в забое является твердой. В забое скважины возникают сила лобового сопротивления F_c и момент вращения M_c , которые будут определяться соответственно по формуле (4) и согласно закону Кулона: $M_c = -\rho F_c$. В записанной формуле сила лобового сопротивления F_c соответствует реакции опоры, ρ — удельный коэффициент момента вращения на единицу давления в забое:

$$\rho = \begin{cases} \rho_0 \text{sign} \dot{\phi}, & \text{при } \dot{\phi} \neq 0, \\ \rho = [-\rho_1, \rho_1], & \text{при } \dot{\phi} \equiv 0 \quad (\varepsilon_\rho = \rho_1 / \rho_0 \geq 1). \end{cases}$$

Влияние промывочной жидкости на работу долота учитывается моментом вязкого сопротивления: $M_b = -\mu \dot{\phi}$, где μ — коэффициент вязкого сопротивления. Со стороны упругой части бурильной колонны — пружин растяжения–сжатия и кручения — на долото передаются нелинейные продольная сила упругости и момент кручения:

$$F_x = -c_x(x - x_1 - nL)[1 + c_1(x - x_1 - nL)^2],$$

$$M_\varphi = -c_\varphi(\varphi - \omega t)[1 + c_2(\varphi - \omega t)^2],$$

где c_1, c_2 — поправочные коэффициенты для учета нелинейных составляющих деформаций растяжения–сжатия и кручения соответственно. Учитывается также добавочное продольное усилие ΔP , возникающее при больших углах закрутки бурильной колонны со стороны пружины кручения, когда та стремится уменьшить свои продольные размеры. Скручивание носит стесненный характер, поэтому укорочения пружины не происходит, а возникает дополнительное продольное усилие [31]: $\Delta P = E_{DS}J_{DS} / (2(nL)^2) \cdot (\dot{\varphi} - \omega t)^2$, где J_{DS} — момент инерции поперечного сечения труб DS.

УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ДЛЯ ПРИНЯТОЙ МОДЕЛИ

Для принятой модели бурильной колонны введем обозначения. Функция влияния

$$f(t) = 1 - \frac{c_x}{mg}(x - x_1 - nL)[1 + c_1(x - x_1 - nL)^2] - \frac{E_{DS}J_{DS}}{2mg(nL)^2}(\varphi - \omega t)^2$$

необходима для нахождения силы осевого давления на долото в текущий момент времени.

Модуль критической угловой скорости долота $|\dot{\varphi}|_*$, превышение которого приводит к началу погружения бурильной колонны, равен

$$|\dot{\varphi}|_* = \frac{\Delta}{bR} \left\{ \frac{n_1}{f(t)} - 1 - \frac{b_1}{\Delta}(\dot{x}_- + aR\dot{\varphi}_-) e^{-\vartheta(x-x_{**})} \right\}. \quad (5)$$

Мера силового воздействия на породу устанавливается через коэффициент динамичности k , а вспомогательная функция $G(t)$ для формулы (2), показывающая уменьшение силы лобового сопротивления, зависит от силового воздействия на породу в забое, которые определяются как

$$k = 1 + \frac{bR}{\Delta} |\dot{\varphi}| + \frac{b_1}{\Delta}(\dot{x}_- + aR\dot{\varphi}_-) e^{-\vartheta(x-x_{**})},$$

$$G(t) = \frac{\dot{x} + \Delta}{\dot{x} + bR |\dot{\varphi}| + b_1(\dot{x}_- + aR\dot{\varphi}_-) e^{-\vartheta(x-x_{**})} + \Delta}.$$

Запас прочности грунта от действия силы тяжести ВНА равен $n_1 = \sigma_1 / \sigma_0$, где σ_1 — предельно допустимое нормальное напряжение грунта; $\sigma_0 = mg / S$, S — усредненная площадь пятна контакта долота с породой. В дальнейшем принималось, что $b_1 = b / a$.

Определяя текущую длину упругой части бурильной колонны через значение n — число свинченных труб DS, начальные условия при моделировании процесса погружения бурильной колонны можно принять следующими:

$$x_0 = nL, \quad \dot{x}_0 = 0, \quad x_{10} = 0, \quad \dot{x}_{10} = 0, \quad \varphi_0 = 0, \quad \dot{\varphi}_0 = \omega, \quad x_{**} = 0, \quad \dot{x}_- = 0, \quad \dot{\varphi}_- = 0.$$

Работа бурильной колонны с возможными остановками долота в поступательной и вращательной составляющих движения (рис. 1) будет описываться с помощью системы уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{если } f(t) > 0; \quad x \geq x_{**}; \quad nL \leq x \leq (n+1)L, \\ \dot{\varphi} \equiv 0: \quad \text{если } |\varphi - \omega t| [1 + c_2(\varphi - \omega t)^2] < \frac{\rho_1 mg}{c_\varphi} f(t), \\ \dot{\varphi} \neq 0: \quad I\ddot{\varphi} + c_\varphi(\varphi - \omega t)[1 + c_2(\varphi - \omega t)^2] + \mu\dot{\varphi} = -\rho_0 mg \text{sign}\dot{\varphi} \begin{cases} f(t), & \text{если } \dot{x} \equiv 0, \\ n_1 G(t), & \text{если } \dot{x} > 0, \end{cases} \\ \dot{x} \equiv 0: \quad \text{если } |\dot{\varphi}| \leq |\dot{\varphi}|_*, \\ \dot{x} \geq 0: \quad \ddot{x} = gf(t) - n_1 gG(t), \quad \text{если } x \geq x_{**}, \quad |\dot{\varphi}| > |\dot{\varphi}|_*, \\ m_1 \ddot{x}_1 = m_1 g - P + mg[1 - f(t)]. \end{array} \right. \quad (6)$$

При отрыве долота от забоя до возобновления контакта движение бурильной колонны характеризуется уравнениями:

$$\begin{cases} \text{если } x \leq x_{**} : \\ I\ddot{\varphi} = -c_{\varphi}(\varphi - \omega t)[1 + c_2(\varphi - \omega t)^2], \\ \ddot{x} = gf(t), \\ m_1\ddot{x}_1 = m_1g - P + mg[1 - f(t)], \end{cases} \quad (7)$$

где x_{**} — координата отрыва долота от забоя, которая устанавливается из условия: $f(t) = 0 \Rightarrow x_{**} = x$. Нахождение решений системы уравнений (7) необходимо для определения начальных скоростей для составляющих комбинированного удара $\dot{x}_- = \dot{x}|_{x=x_{**}}$, $\dot{\varphi}_- = \dot{\varphi}|_{x=x_{**}}$.

Теорема импульсов для составляющих комбинированного удара в момент соприкосновения долота с грунтом забоя, когда $x = x_{**}$, а также связь между нормальным S_n и касательным S_{τ} ударными импульсами в соответствии с гипотезой Рауса приводят к системе уравнений:

$$\begin{cases} m\dot{x}_0 - m\dot{x}_- = S_n, \\ I\dot{\varphi}_0 - I\dot{\varphi}_- = S_{\tau}, \\ S_{\tau} = \rho S_n. \end{cases} \quad (8)$$

Для решения системы уравнений (8) не хватает одного уравнения, записать которое раньше не удавалось. По этой причине не предпринимались попытки установить начальные условия послеударного процесса в работах по прониканию и бурению. Такое уравнение можно записать на основании равенства (4), но для этого необходимо определить для данной модели бурильной колонны обобщенную начальную скорость эталонного удара $(\dot{x}_- + aR\dot{\varphi}_-)_*$, которую назовем критической. Будем иметь в виду, что при завершении эталонного удара погружение и вращение долота приостановятся $\dot{x} = \dot{x}|_{x=x_{**}} = 0$, $\dot{\varphi} = \dot{\varphi}|_{x=x_{**}} = 0$, а возникающая продольная сила, действующая на долото, уравновесится силой лобового сопротивления, т. е. $mgf(t) - F_0 \cdot 1/k = 0$. Следовательно, $\sigma - k \cdot \sigma/k = 0 \Rightarrow \sigma_d = \sigma/k \Rightarrow \sigma_{d1} = \sigma_1/k_*$, где $\sigma = \sigma_0 f(t)$. Здесь $\sigma_d, \sigma_{d1}, k_*$ — соответственно динамическое, предельно-допустимое динамическое напряжения и коэффициент динамичности для предельного равновесного состояния долота перед погружением. Начало погружения бурильной колонны в забой произойдет, когда $\sigma_{d1} = \sigma$, критическая скорость для эталонного комбинированного удара определится как

$$(\dot{x}_- + aR\dot{\varphi}_-)_* = \frac{\Delta}{b_1} \left[\frac{n_1}{f(t)} - 1 \right]. \quad (9)$$

Найденное значение критической скорости позволяет воспользоваться равенством (4) для нахождения решений системы уравнений (8) при определении начальных скоростей $\dot{x}_0, \dot{\varphi}_0$ по отдельности, что необходимо для описания послеударного процесса. При ударе бурильной колонны о забой могут возникать случаи, когда $(\dot{x}_- + aR\dot{\varphi}_-) > (\dot{x}_- + aR\dot{\varphi}_-)_*$ или $(\dot{x}_- + aR\dot{\varphi}_-) \leq (\dot{x}_- + aR\dot{\varphi}_-)_*$. При выполнении первого условия погружение начнется, а при выполнении второго — нет. Появляется возможность описать послеударное состояние бурильной колонны теперь с определяемыми начальными условиями: $x_0 = x_{**}$; $\varphi_0 = \varphi|_{x=x_{**}}$, $x_{10} = x_1|_{x=x_{**}}$, $\dot{x}_{10} = \dot{x}_1|_{x=x_{**}}$ из системы (7), а $\dot{x}_0, \dot{\varphi}_0$ — из уравнений (4), (8) с учетом равенства (9).

Модуль критической угловой скорости долота $|\dot{\varphi}|_*$, необходимый для выхода из холостого режима бурения, определяется аналогичным образом, как при нахождении критической обобщенной начальной скорости эталонного удара. Однако вместо начальной скорости удара определяющим будет являться модуль угловой скорости вращения долота. Записанная формула (5) для нахождения $|\dot{\varphi}|_*$ определяет и возможности возникновения эффекта stick-slip. Приведем возможные варианты заклинивания долота:

- отсутствие погружения при наличии вращения, когда $|\dot{\varphi}| \leq |\dot{\varphi}|_*$;
- отсутствие погружения и вращения, когда $\dot{\varphi} \equiv 0$ и $c_\varphi |\varphi - \omega t| [1 + c_2(\varphi - \omega t)^2] < \rho_1 mgf(t)$;
- начало погружения при отсутствии вращения после эффективного удара, когда $\dot{\varphi}_0 = 0$ и $c_\varphi |\varphi - \omega t| [1 + c_2(\varphi - \omega t)^2] < \rho_1 mgf(t)$.

Начальные кинематические состояния долота будут зависеть от силы удара, т. е. от начальных скоростей, характеризующих комбинированный удар. Считая, что $q = m/I$, для этих состояний начальные скорости послеударного процесса будут определяться следующим образом [30]:

а) начало погружения бурильной колонны с вращением долота может произойти, когда

$$\dot{x}_- > \frac{1}{1 + \rho_0 Raq} \frac{\Delta}{b_1} \left[\frac{n_1}{f(t)} - 1 \right], \quad \dot{\varphi}_- > \frac{\rho_0 q}{1 + \rho_0 Raq} \frac{\Delta}{b_1} \left[\frac{n_1}{f(t)} - 1 \right],$$

тогда начальные скорости погружения и вращения долота будут равны

$$\dot{x}_0 = \dot{x}_- - \frac{1}{1 + \rho_0 Raq} \frac{\Delta}{b_1} \left[\frac{n_1}{f(t)} - 1 \right]; \quad \dot{\varphi}_0 = \dot{\varphi}_- - \frac{\rho_0 q}{1 + \rho_0 Raq} \frac{\Delta}{b_1} \left[\frac{n_1}{f(t)} - 1 \right];$$

б) вращение долота без погружения бурильной колонны может произойти, когда

$$\dot{x}_- \leq \frac{1}{1 + \rho_0 Raq} \frac{\Delta}{b_1} \left[\frac{n_1}{f(t)} - 1 \right], \quad \dot{\varphi}_- > \frac{\rho_0 q}{1 + \rho_0 Raq} \frac{\Delta}{b_1} \left[\frac{n_1}{f(t)} - 1 \right],$$

следовательно, начальные скорости составляют $\dot{x}_0 = 0$; $\dot{\varphi}_0 = \dot{\varphi}_- - \rho_0 q \dot{x}_-$.

в) погружение бурильной колонны без вращения долота может произойти, когда

$$\dot{x}_- > \frac{1}{1 + \rho_1 Raq} \frac{\Delta}{b_1} \left[\frac{n_1}{f(t)} - 1 \right], \quad \dot{\varphi}_- \leq \frac{\rho_1 q}{1 + \rho_1 Raq} \frac{\Delta}{b_1} \left[\frac{n_1}{f(t)} - 1 \right],$$

в результате начальные скорости обозначим как

$$\dot{x}_0 = \dot{x}_- + aR\dot{\varphi}_- - \frac{\Delta}{b_1} \left[\frac{n_1}{f(t)} - 1 \right]; \quad \dot{\varphi}_0 = 0;$$

г) остановка вращения долота без погружения бурильной колонны может произойти, когда

$$\dot{x}_- \leq \frac{1}{1 + \rho_1 Raq} \frac{\Delta}{b_1} \left[\frac{n_1}{f(t)} - 1 \right]; \quad \dot{\varphi}_- \leq \frac{\rho_1 q}{1 + \rho_1 Raq} \frac{\Delta}{b_1} \left[\frac{n_1}{f(t)} - 1 \right],$$

тогда начальные скорости — $\dot{x}_0 = 0$; $\dot{\varphi}_0 = 0$.

Теперь представляется возможным описать послеударное состояние бурильной колонны с начальными условиями: $x_0 = x_{**}$; $\varphi_0 = \varphi|_{x=x_{**}}$, $x_{10} = x_1|_{x=x_{**}}$, $\dot{x}_{10} = \dot{x}_1|_{x=x_{**}}$, а \dot{x}_0 , $\dot{\varphi}_0$ находятся по формулам одного из пунктов а, б, в или г, выбор которого зависит от вычисляемых скоростей \dot{x}_- , $\dot{\varphi}_-$.

Уравнения (6)–(8) с указанными условиями переключения и начальными условиями позволяют полностью моделировать работу бурильной колонны во время углубления забоя скважины.

ПРИМЕРЫ ЧИСЛЕННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Для численных расчетов по уравнениям (6)–(8) в качестве исходных задаются параметры, определяющие прочностные свойства породы: $b, a, \Delta, \sigma_1, n_1$; сила натяжения каната P ; параметры бурильной колонны: $m_1 = m_{DS}, m = m_{BHA}, L = L_{DS}, J_{DS}, L_{BHA}, D_{DSe}, D_{BHAe}, D_{DSi}, D_{BHAi}, I = I_{BHA}, R, c_\varphi, c_x$ (индексы e, i — соответственно внешний и внутренний диаметр D труб). Числовые значения для указанных величин взяты из [32] и выражены в системе СИ. Для утяжеленной части колонны (ВНА): длина $L_{BHA} = 180$, внешний и внутренний диаметры $D_{BHAe} = 0.21, D_{BHAi} = 4D_{BHAe} / 5 = 0.168$; для основных бурильных труб (DS) внешний и внутренний диаметры $D_{DSe} = 0.13, D_{DSi} = 4D_{DSe} / 5 = 0.104$; диаметр долота $D = 0.3$. Плотность материала, коэффициент Пуассона, модули Юнга и сдвига для обыкновенных и утяжеленных труб принимались одинаковыми: $\rho = 7800, \nu = 0.3, E = 2.1 \cdot 10^{11}, G = E / [2(1+\nu)] = 8.1 \cdot 10^{10}$. В результате запишем:

$$m_{BHA} = \frac{\pi}{4}(D_{BHAe}^2 - D_{BHAi}^2)\rho_c L_{BHA} = 17506.45; m_{DS} = \frac{\pi}{4}(D_{DSe}^2 - D_{DSi}^2)\rho_c L_{DS} = 335.441,$$

$$I_{BHA} = \frac{\pi}{32}(D_{BHAe}^4 - D_{BHAi}^4)\rho_c L_{BHA} = 158.267; J_{DS} = \frac{\pi}{4}(D_{DSe}^4 - D_{DSi}^4) = 1.656 \cdot 10^{-5}.$$

На рис. 2 и 3 построены графики для двух примеров с разными исходными данными бурильной колонны и прочностных свойств грунта в забое.

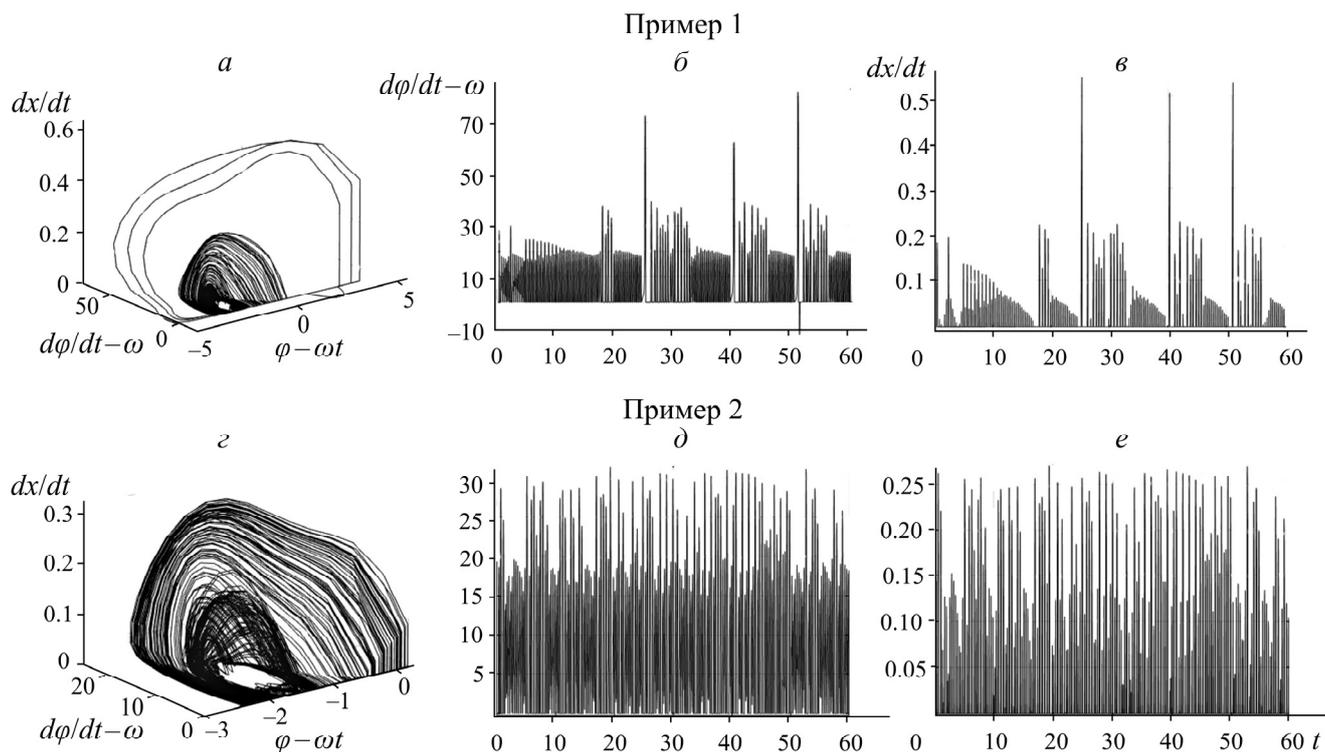


Рис. 2. Изменение кинематических величин, характеризующих процесс бурения при возникновении детерминированного хаоса по результатам численного моделирования для примеров 1 и 2: a, d — фазовое пространство для бурильной колонны; b, e — относительная угловая скорость долота; c, e — линейная скорость погружения долота

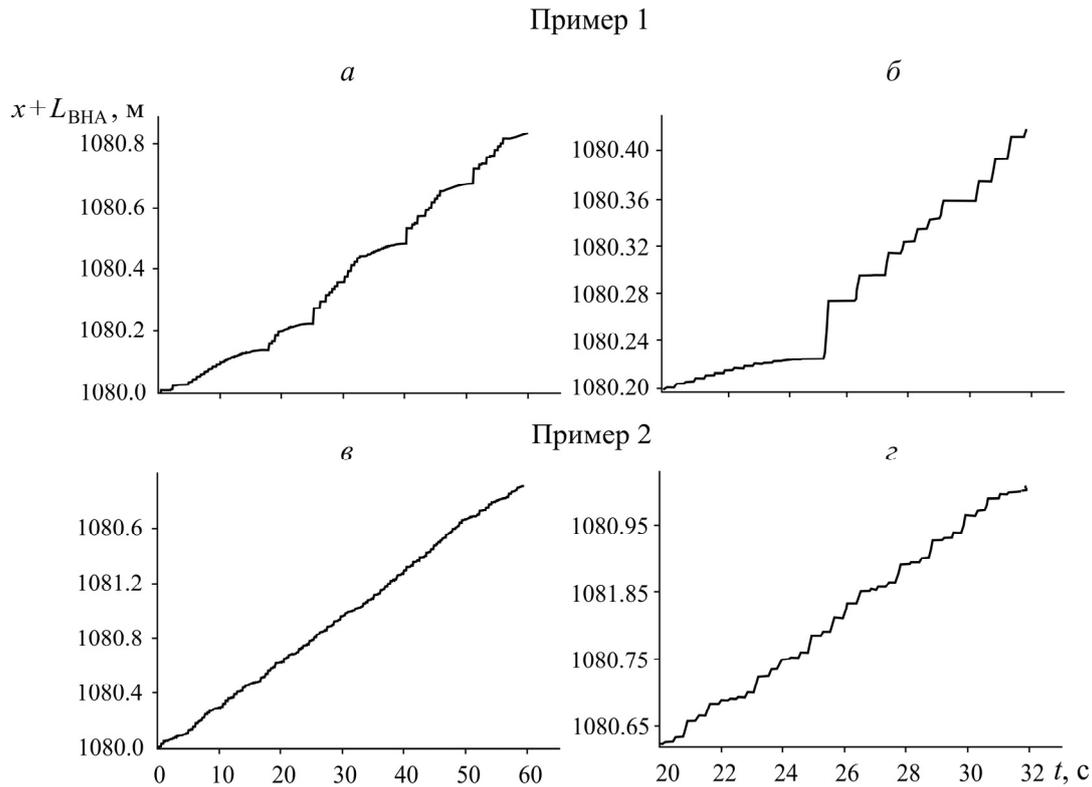


Рис. 3. Изменение глубины погружения буровой колонны скважины в обычном (а, в) и увеличенном (б, г) масштабе для примеров 1 и 2

Для примера 1 числовые значения, используемые в уравнениях (6)–(8), следующие: $w=8$, $n_1=20$, $b=10$, $\Delta=1$, $\mu=0.5$, $n=100$, $L_{DS}=9$, $L_{BHA}=180$, $c_x=1114951$, $c_1=1.5$, $c_\varphi=2971$, $c_2=1.5$, $P=65813$, $\rho_0=0.5$, $\varepsilon_\rho=2.5$; для примера 2: $w=8$, $n_1=15$, $b=10$, $\Delta=1$, $\mu=0.1$, $n=100$, $L_{DS}=9$, $L_{BHA}=180$, $c_x=1114951$, $c_1=0.7$, $c_\varphi=2971$, $c_2=2.5$, $P=65813$, $\rho_0=0.4$, $\varepsilon_\rho=2.2$.

Графики наглядно демонстрируют динамику происходящих процессов во время бурения в течение рассматриваемого временного интервала 60 с. Исходные данные, как и получаемые результаты в виде графиков, соответствуют реальным величинам, определяемым в системе СИ. Приведенные примеры указывают на обнаружение хаотичных режимов бурения, что отмечается в большинстве случаев моделирования и при других исходных данных. Возможность выхода на обычный периодический режим бурения становится редким случаем в сравнении с выходом на режим детерминированного хаоса. При описании только крутильных автоколебаний буровой колонны автором ранее наблюдалась обратная картина: хаотичные режимы возникали крайне редко [13].

Приведенные режимы бурения соответствуют релаксационным режимам с кратковременными остановками в поступательной и вращательной составляющей движения долота, т. е. когда проявляются эффекты stick-slip.

ВЫВОДЫ

Проведен анализ возникающих трудностей в моделировании работы буровой колонны, рассмотрены возможности их решения. Вариант построения математически строгой теории бурения показан на примере описания крутильно-продольных автоколебаний для двухмассовой модели буровой колонны с долотом дробяще-скалывающего действия. Избежать математи-

ческие и физические некорректности при моделировании процесса погружения бурильной колонны удалось благодаря учету потери прочности породы в результате силового воздействия на забой скважины: непрерывного — в результате вращения долота, ударного — при завершении кратковременного отрыва бурильной колонны от поверхности забоя. Использован новый вид аналитического выражения для силы лобового сопротивления, при котором модуль угловой скорости вращения долота и начальная обобщенная скорость удара определяли степень силового воздействия на породу. Начальные условия для послеударного процесса находились с помощью созданной элементарной теории проникания ударника в грунт при однократном ударе. Введенная динамическая модель бурильной колонны допускает возникновение эффектов stick-slip и кратковременных отрывов долота от забоя. Приведенные принципы можно распространить на другие модели, в том числе и с распределенными параметрами, при построении строгой теории бурения.

Недостатками введенной модели бурильной колонны являются: отсутствие учета волновых процессов, так как принятая модель имеет конечное число степеней свободы, где упругая часть колонны заменена на безмассовые пружины кручения и растяжения–сжатия; невозможность определять оптимальную силу натяжения каната подвеса талевого системы, позволяющей создавать нужное осевое давление на долото.

К достоинствам модели можно отнести: принятие во внимание потери прочности породы в забое при силовом воздействии на нее — непрерывном и ударном; определение динамики происходящих процессов во время углубления забоя скважины в первом приближении без учета волновых процессов. Такая возможность отсутствовала для бурильной колонны с долотом дробяще-скалывающего действия, а для долота режущего вида выполнялось частично и только для установившихся режимов бурения.

Заложенные принципы в описании модели дают основания говорить о возможности построения математически строгой теории бурения, где использование эмпирических соотношений не предусмотрено. Результаты численного моделирования показывают, что даже для такой упрощенной модели бурильной колонны возможны варианты возникновения непредсказуемых режимов бурения — детерминированного хаоса. Они нередки, более того, хаотичные режимы возникают гораздо чаще, чем обычные периодические. Ранее при моделировании только крутильных автоколебаний, без учета продольных, в большинстве случаев обнаруживались, как правило, периодические режимы колебаний.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Белокобыльский С. В. Динамика систем с сухим трением и ее приложение к задачам горной механики. — М.: Машиностроение, 2002. — 209 с.
2. Юнин Е. К., Хегай В. К. Динамика глубокого бурения. — М.: Недра-Бизнесцентр, 2004. — 286 с.
3. Гуляев В. И., Худолий С. Н., Глушакова О. В. Самовозбуждение крутильных колебаний колонн глубокого бурения // Проблемы прочности. — 2009. — № 6. — С. 31–43.
4. Monteiro H. L. S. and Trindade M. A. Performance analysis of proportional-integral feedback control for the reduction of stick-slip-induced torsional vibrations in oil well drillstrings, *J. Sound Vibration*, 2017, Vol. 398, — P. 28–38.
5. Tang L., Guo B., Zhu X., Shi Ch., Zhou Y. Stick-slip vibrations in oil well drillstring: A review, *J. Low Frequency Noise, Vibration Active Control*, 2020, Vol. 12. — P. 1–23.

6. **Тарасов В. Н., Бояркина И. В., Коваленко М. В., Кузнецов С. М., Шлегель И. Ф.** Теория удара в строительстве и машиностроении. — М., 2006. — 336 с.
7. **Аптуков В. Н., Фонарев А. В.** Приближенная оценка глубины проникания сваи в грунт при многократном ударе // Вестн. Пермского университета. Математика. Механика. Информатика. — 2010. — Вып. 2 (2). — С. 41–45.
8. **Исаков А. Л., Кондратенко А. С., Петреев А. М.** Моделирование процесса забивания металлической трубы в грунт с порционным удалением грунтового керна // ФТПРПИ. — 2019. — № 4. — С. 36–45.
9. **Александрова Н. И., Кондратенко А. С.** Расчет движения трубы с грунтовой пробкой при продольном импульсном воздействии // ФТПРПИ. — 2018. — № 3. — С. 29–42.
10. **Александрова Н. И.** Численно-аналитическое исследование процесса ударного погружения трубы в грунт с сухим трением. Ч. I. Внешняя среда деформируема // ФТПРПИ. — 2013. — № 3. — С. 91–106.
11. **Александрова Н. И.** О влиянии внутренней грунтовой пробки на процесс ударного забивания трубы // ФТПРПИ. — 2017. — № 6. — С. 114–126.
12. **Сагомоян А. Я.** Проникание. — М.: МГУ, 1974. — 299 с.
13. **Коронатов В. А.** Начала построения строгой теории бурения // Системы. Методы. Технологии. — 2016. — № 4. — С. 83–94.
14. **Коронатов В. А.** Основы математически строгой теории глубокого бурения // Системы. Методы. Технологии. — 2020. — № 2. — С. 23–29.
15. **Синеев С. В.** Модели процесса бурения и их практическое использование // Вестн. Ассоциации буровых подрядчиков. — 2009. — № 3. — С. 35–44.
16. **Richard T., Germy C., and Detournay E.** A simplified model to explore the root cause of stick-slip vibrations in drilling systems with drag bits, *J. Sound Vibration*, 2007, Vol. 305, No. 3. — P. 432–456.
17. **Besselink B., van de Wouw N., and Nijmeijer H.** A semi-analytical of stick-slip oscillations in drilling systems, *ASME J. Comput. Nonlinear Dynamics*, 2011, Vol. 6. — P. 021006.
18. **Detournay E. and Defourny P.** A phenomenological model for the drilling action of drag bits, *International J. Rock Mech. Min. Sci. Geomechanics Abstracts*, 1992, Vol. 29, No. 1. — P.13–23.
19. **Tashakori S., Vossoughi G., Zohoor H., and Yazdi E. A.** Modification of the infinite-dimensional neutral-type time-delay dynamic model for the coupled axial-torsional vibrations in drill strings with a drag bit, *J. Comput. Nonlinear Dynamics*, 2020, Vol. 15, No. 8. — P. 1–6.
20. **Крагельский И. В., Щедров В. С.** Развитие науки о трении. — М.: АН СССР, 1956. — 234 с.
21. **Контенсу П.** Связь между трением скольжения и трением верчения и ее учет в теории волчка. Проблемы гироскопии. — М.: Мир, 1967. — С. 60–77.
22. **Андронов В. В., Журавлев В. Ф.** Сухое трение в задачах механики. — М.: НИЦ, Ижевск: ИКИ, 2010. — 183 с.
23. **Коронатов В. А.** О сухом трении при непоступательном скольжении тела и критика теории Контенсу–Журавлева // Системы. Методы. Технологии. — 2019. — № 1. — С. 21–28.
24. **Борисов А. В., Караваев Ю. Л., Мамаев И. С., Ермакова Н. Н., Иванова Т. Б., Тарасов В. В.** Экспериментальное исследование движения тела с осесимметричным основанием, скользящего по шероховатой поверхности // Нелинейная динамика. — 2015. — Т. 11. — № 3. — С. 547–577.
25. **Пэнлеве П.** Лекции о трении. — М., 1954. — 316 с.
26. **Коронатов В. А.** О применении закона Кулона при скольжении тел, движущихся не поступательно, и парадоксах Пенлеве // Системы. Методы. Технологии. — 2019. — № 4. — С. 25–35.
27. **Гольдсмит В.** Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел. — М., 1985. — 448 с.

28. **Корнатов В. А.** Элементарная теория проникания ударника в твердые грунтовые среды при однократном ударе, с учетом возникающих трещин // Системы. Методы. Технологии. — 2021. — № 1. — С. 25–33.
29. **Корнатов В. А.** Применение элементарной теории проникания ударника в грунтовые среды при однократном ударе // Системы. Методы. Технологии. — 2021. — № 3. — С. 25–34.
30. **Корнатов В. А.** Обобщение элементарной теории проникания в грунтовые среды при однократном ударе на случай вращающегося ударника // Системы. Методы. Технологии. — 2022. — № 1. — С. 21–29.
31. **Нагаев Р. Ф., Исаков К. А., Лебедев Н. А.** Динамика горных машин. — СПб.: СППГИ, 1996. — 155 с.
32. **Tucker R. W., Wang C.** Torsional vibration control and cosserat dynamics of a drill-rig assembly, *Mechanica*, 2003, Vol. 38. — P. 143–159.

Поступила в редакцию 03/VIII 2022

После доработки 18/I 2023

Принята к публикации 19/I 2023