

УДК 533.2

## СТАТИСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАЗРУШЕНИЯ КОЛЬЦА ВЗРЫВОМ

П. А. Дрокин

607185 Саров, Россия

E-mail: Antom99@yandex.ru

Разработана модель фрагментации тонкого кольца взрывом, в которой учитывается статистический разброс разрушающей относительной деформации по длине кольца. Предложена формула для расчета скорости движения границы области вблизи пластического разрыва, в которой прекращается пластическое течение материала кольца. Разработаны методики численного и аналитического расчета среднего числа фрагментов кольца. Проведено сравнение результатов расчета с известными экспериментальными данными.

Ключевые слова: тонкое кольцо, разрушение взрывом, скорость границы области пластического течения, число фрагментов.

DOI: 10.15372/PMTF20180318

**1. Постановка задачи.** В работе [1] приведен обзор работ, в которых проводится оценка длины и числа фрагментов кольца, разрушающегося при его быстром симметричном радиальном расширении, а также формула В. М. Кузнецова, позволяющая оценить характерную длину фрагмента кольца, разрушаемого взрывом внутреннего соосно размещенного заряда взрывчатого вещества (ВВ):

$$l = 2\delta_0 \operatorname{sh}(\varepsilon_r) c/v. \quad (1)$$

Здесь  $l$  — длина фрагмента;  $\delta_0$  — начальная толщина кольца;  $\varepsilon_r$  — разрушающая относительная деформация материала кольца;  $v$  — скорость расширения кольца;  $c$  — скорость распространения одномерных упругих волн в материале кольца.

В работе [2] при выводе формулы (1) предполагалось, что фрагментация кольца происходит на стадии пластического течения материала. Пластический разрыв реализуется при достижении предельной величины окружной относительной деформации  $\varepsilon_r$  сначала на внутреннем волокне в поперечном сечении кольца, а затем — на внешнем. Характерная длина фрагмента равна произведению времени распространения разрыва от внутреннего волокна до внешнего и скорости разгрузки материала, находящегося в напряженном состоянии, вблизи разрыва, принятой равной одномерной скорости волны упругой разгрузки. Процесс фрагментации всего кольца не рассматривается. Формула (1) может быть использована для получения инженерных оценок параметров разрушения конструкций в результате взрыва внутреннего ВВ.

Ниже рассмотрена аналогичная задача о фрагментации тонкого узкого кольца, выполненного из пластичного конструкционного материала типа малоуглеродистой стали, при высокоскоростном радиальном расширении. Как и в работе [2], принимается, что пластические разрывы реализуются при достижении окружной относительной деформацией значения  $\varepsilon_r$ , при котором происходит разрушение. Предполагается, что параметр  $\varepsilon_r$  является

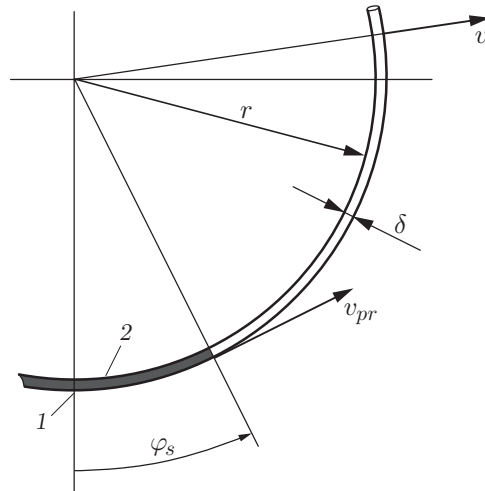


Рис. 1. Геометрия задачи:

1 — линия разрыва, 2 — зона прекращения течения (отвердения) материала

случайной функцией угловой координаты поперечного сечения кольца. Процесс фрагментации при расширении кольца начинается с разрыва в сечении с минимальным значением деформации  $\varepsilon_{r1}$ , при котором происходит разрушение. По обе стороны от разрыва образуются и расширяются области, в которых вследствие падения напряжения пластическое течение прекращается (материал твердеет). При дальнейшем расширении кольца на его неотвердевшей части возникают разрывы в сечениях с большими значениями разрушающей деформации  $\varepsilon_{ri} > \varepsilon_{r1}$  ( $i = 2, 3, \dots$ ), от которых также распространяются области отвердения. Процесс фрагментации заканчивается, когда весь материал кольца оказывается отвердевшим. При этом длина фрагмента равна сумме длин двух областей отвердения, распространяющихся от соседних разрывов, и является случайной величиной. Ниже пластический разрыв считается одномоментным, а течение материала кольца — одномерным.

Геометрия задачи приведена на рис. 1 ( $v_{pr}$  — скорость движения границы области отвердения относительно разрыва (скорость пластической разгрузки)).

**2. Скорость пластической разгрузки вблизи разрыва.** Длину отвердевшей области вблизи разрыва и скорость ее расширения можно получить из условия появления пластического течения на границе области отвердения и области течения.

Скорость увеличения длины сектора кольца при радиальном симметричном расширении этого кольца равна

$$v_\varphi = \frac{(r + \Delta r)\varphi - r\varphi}{\Delta t} = \frac{\Delta r \varphi}{\Delta t} = v\varphi \quad (2)$$

( $r$  — текущий радиус кольца;  $\Delta t$ ,  $\Delta r$  — малые приращения времени и текущего радиуса кольца). Масса отвердевшей части кольца определяется по формуле

$$m_s = \rho A r \varphi_s, \quad (3)$$

где  $\rho$  — плотность материала кольца;  $A$  — площадь поперечного сечения кольца. С учетом (2) скорость движения центра масс отвердевшей части кольца относительно сечения, в котором произошел разрыв, равна

$$v_s = v\varphi_s/2. \quad (4)$$

Если длина отвердевшей части кольца много меньше его радиуса, можно записать уравнение движения отвердевшей части кольца как тела переменной массы в проекции на

касательную в точке  $\varphi = 0$  (см. рис. 1):

$$\frac{d}{dt}(m_s v_s) = \sigma_{п.т} A \quad (5)$$

( $\sigma_{п.т}$  — напряжение при пластическом течении материала).

Учитывая (3), (4) и пренебрегая изменением параметров  $A$ ,  $r$ ,  $v$ ,  $\sigma_{п.т}$  в течение малого промежутка времени фрагментации, уравнение (5) можно записать в виде

$$\frac{d}{dt}(\varphi_s^2) = \frac{2\sigma_{п.т}}{\rho r v}.$$

Решение этого уравнения при начальном условии  $\varphi_s = 0$  при  $t = 0$  имеет вид

$$\varphi_s = \sqrt{\frac{2\sigma_{п.т}}{\rho} \frac{t}{rv}}.$$

Длина отвердевшей части кольца равна

$$l_s = r\varphi_s = \sqrt{\frac{2\sigma_{п.т}}{\rho} \frac{rt}{v}}. \quad (6)$$

Из (6) получаем мгновенную и среднюю скорости движения границы области отвердения материала относительно сечения, в котором произошел разрыв:

$$v_{pr} = \frac{dl_s}{dt} = \sqrt{\frac{\sigma_{п.т}}{2\rho} \frac{r}{vt}}, \quad v_{prc} = \frac{l_s}{t} = \sqrt{\frac{2\sigma_{п.т}}{\rho} \frac{r}{vt}} = 2v_{pr}. \quad (7)$$

Скорость движения границы отвердевшей области кольца относительно сечения, в котором произошел разрыв, называется скоростью пластической разгрузки. Из формул (7) следует, что скорость пластической разгрузки уменьшается со временем.

Приращение относительной деформации в материале кольца при пластическом течении  $\Delta\varepsilon$  за время  $t$  после разрыва вычисляется по формуле

$$\Delta\varepsilon = vt/r, \quad (8)$$

где  $v$ ,  $r$  — радиальная скорость и радиус кольца в момент появления разрыва.

С учетом (8) формулы (6), (7) можно представить в безразмерном виде

$$\frac{l_s}{r} = \sqrt{\frac{2\sigma_{п.т}}{E} \frac{\Delta\varepsilon}{v}}; \quad (9)$$

$$\frac{v_{pr}}{c} = \sqrt{\frac{\sigma_{п.т}}{2E \Delta\varepsilon}}, \quad \frac{v_{prc}}{c} = \sqrt{\frac{2\sigma_{п.т}}{E \Delta\varepsilon}}; \quad (10)$$

$$c = \sqrt{E/\rho}, \quad (11)$$

где  $c$  — скорость распространения одномерных упругих волн в материале кольца.

Из формул (9)–(11) следует, что мгновенная и средняя скорости пластической разгрузки не зависят от радиуса кольца  $r$ , а определяются только характеристиками материала  $\rho$ ,  $E$ ,  $\sigma_{п.т}$  и приращением относительной деформации в течение промежутка времени с момента разрыва  $t = 0$  до текущего момента  $t$ .

Нетрудно показать, что полученные формулы для скорости пластической разгрузки в окрестности разрыва справедливы и в случае растянутого прямолинейного стержня, материал которого находится в состоянии одномерного пластического течения.

В табл. 1 приведены значения мгновенной и средней скоростей пластической разгрузки вблизи разрыва для сталей марок Ст.20, Ст.3, вычисленные по формулам (10) при различных значениях  $\Delta\varepsilon$ . В расчетах принимались значения  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>,  $E = 210$  ГПа,

Таблица 1

Скорость пластической разгрузки для сталей марок Ст.20, Ст.3

$\Delta\varepsilon$	$v_{pr}, \text{ м/с}$	$v_{prc}, \text{ м/с}$
0,01	2530	5060
0,05	1130	2260
0,10	800	1600
0,20	565	1130

$\sigma_{п.т} = 1$  ГПа [3, 4]. Из табл. 1 следует, что скорость пластической разгрузки является убывающей функцией приращения деформации и при  $\Delta\varepsilon > 0,05$  существенно меньше скорости волны упругой разгрузки  $c = 5189$  м/с.

**3. Численный расчет числа фрагментов кольца при его радиальном расширении.** При численном моделировании входными параметрами являются начальные радиус  $r_0$  и толщина  $\delta_0$  кольца, модуль упругости  $E$ , плотность  $\rho$ , напряжение  $\sigma_{п.т}$ , при котором появляется пластическое течение материала, среднее значение  $m_{\varepsilon r}$  и среднеквадратичная погрешность  $\sigma_{\varepsilon r}$  определения относительной деформации, при которой происходит разрушение, скорость радиального расширения  $v$  в момент фрагментации. При определении случайного изменения разрушающей деформации по длине кольца это кольцо представляет собой конечное число  $N_e$  элементов, в каждом из которых разрушающая деформация  $\varepsilon_{ri}$  является статистически независимой случайной величиной.

При проведении расчета используется метод конечных приращений (МКП) по деформации  $\varepsilon$ . Опорные значения  $\varepsilon$  вычисляются по формулам

$$\varepsilon_1 = 0, \quad \varepsilon_{j+1} = \varepsilon_j + \Delta\varepsilon, \quad j = 1, 2, 3, \dots, \quad \Delta\varepsilon \approx 0,2\sigma_{\varepsilon r}. \quad (12)$$

В предположении нормального распределения случайных значений деформации, при которых происходит разрушение, среднее число разрывов, возникающих в зоне пластического течения при расширении кольца (при изменении деформации от  $\varepsilon_j$  до  $\varepsilon_{j+1}$ ), равно

$$\Delta N_{rj} = (N_e - N_{sj}) f_{\varepsilon r}(\varepsilon_j) \Delta\varepsilon, \quad (13)$$

где  $f_{\varepsilon r}(\varepsilon_r)$  — функция плотности вероятности нормального распределения разрушающей деформации  $\varepsilon_r$  с параметрами  $m_{\varepsilon r}$ ,  $\sigma_{\varepsilon r}$ :

$$f_{\varepsilon r}(\varepsilon_r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{\varepsilon r}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon_r - m_{\varepsilon r}}{\sigma_{\varepsilon r}}\right)^2\right),$$

$N_{sj}$  — число отвердевших элементов кольца вблизи всех разрывов в момент движения деформации  $\varepsilon_j$ .

Среднее число разрывов, появляющихся при изменении деформации от  $\varepsilon_1$  до  $\varepsilon_j$ , определяется путем суммирования приращений (13):

$$N_{rj} = \sum_{i=1}^{i=j} \Delta N_{ri}.$$

Число отвердевших элементов кольца  $N_{sj}$  рассчитывается следующим образом. С учетом (9) длина отвердевшей зоны по обе стороны от разрыва, возникшей на интервале от  $\varepsilon_i$  до  $\varepsilon_{i+1}$  за время изменения деформации от  $\varepsilon_i$  до  $\varepsilon_j$ , равна

$$l_{sij} = 2r \sqrt{\frac{2\sigma_{п.т}(\varepsilon_j - \varepsilon_i)}{E}} \frac{c}{v}. \quad (14)$$

Этой длине соответствует число отвердевших элементов кольца

$$N_{sij} = l_{sij} / \Delta l. \quad (15)$$

Здесь  $\Delta l$  — длина дуги элементарного участка:

$$\Delta l = 2\pi r/N_e.$$

Среднее число отвердевших элементов кольца, соответствующее всем разрывам, возникшим на интервале изменения деформации от  $\varepsilon_i$  до  $\varepsilon_{i+1}$ , при расширении кольца, соответствующем изменению деформации от  $\varepsilon_i$  до  $\varepsilon_j$ , с учетом (13) равно

$$\Delta N_{sij} = \Delta N_{ri} N_{sij}.$$

Среднее число отвердевших элементов кольца, соответствующее всем разрывам, возникшим при увеличении относительной деформации в интервале от  $\varepsilon_1$  до  $\varepsilon_j$ , определяется по формуле

$$N_{sj} = \sum_{i=1}^j \Delta N_{sij}.$$

Расчет проводится при увеличении  $\varepsilon_i$  согласно (12) начиная со значения  $\varepsilon_1 = 0$  (или с большего значения, которому соответствует значение  $\Delta N_{ri} \approx 0,01$ ) и заканчивается при уменьшении до нуля числа неотвердевших элементов кольца. На первом шаге расчета ( $i = 1$ ) принимается  $N_{si} = 0$ , на последующих шагах по  $\varepsilon_i$  принимается значение  $N_{si}$ , равное значению  $N_{si}$  на предыдущем шаге. Конечное значение  $N_{rj}$  соответствует среднему числу разрывов  $m_n$ . При расчетах по формуле (15) округление до целого числа не проводилось.

Число элементов кольца можно связать с минимальной длиной зоны разрушения. Во взрывных экспериментах с тонкостенными оболочками угол наклона поверхности разрыва к поверхности листа приблизительно равен  $45^\circ$ , поэтому можно длину зоны разрушения принять приблизительно равной  $\sqrt{2}\delta$  и число элементов кольца рассчитать по формулам

$$N_e \approx 2\pi r/(\sqrt{2}\delta) \approx 4,44r/\delta; \quad (16)$$

$$r \approx r_0(1 + m_{\varepsilon r} - k_1\sigma_{\varepsilon r}); \quad (17)$$

$$\delta \approx k_2\delta_0/(1 + m_{\varepsilon r} - k_1\sigma_{\varepsilon r}), \quad (18)$$

где  $r$ ,  $\delta$  — средние значения радиуса и толщины кольца в период фрагментации;  $k_1 \approx 1$  — варьируемый коэффициент для учета слабой зависимости результатов расчета от среднего значения деформации, при котором происходит разрушение;  $k_2 \approx 0,5$  — коэффициент для учета пластичности внутреннего слоя материала кольца, обусловленной давлением на него продуктов детонации. Коэффициент  $k_2$  введен для учета того, что трещины возникают в поверхностном слое материала разрушаемых взрывом труб, а затем распространяются на всю его толщину [4]. Следует отметить, что значение  $N_e$  оказывает незначительное влияние на результаты расчета числа фрагментов.

Значение напряжения, при котором появляется пластическое течение стали, для условий взрывных экспериментов либо выбирается на основе экспериментальных данных [3, 5], либо вычисляется по формулам

$$\sigma_{п.т} = \sigma_{st} + \Delta\sigma_d, \quad \sigma_{st} \approx \sigma_b = \sigma_{br}(1 + \psi_b), \quad \Delta\sigma_d = \sigma_{т0}(\varepsilon'/C)^{1/P}, \quad \varepsilon' = v/r, \quad (19)$$

где  $\sigma_{st}$  — статическая компонента напряжения пластического течения в момент фрагментации;  $\Delta\sigma_d$  — динамическая компонента напряжения пластического течения, обусловленная запаздыванием текучести;  $\sigma_{br}$  — предел прочности материала;  $\sigma_b$ ,  $\psi_b$  — истинное напряжение и поперечное сужение в момент достижения максимального значения растягивающей силы при испытаниях стандартных образцов;  $\sigma_{т0} = 0,11$  ГПа — предел текучести чистого железа;  $C = 40$  с<sup>-1</sup>,  $P = 5$  — характерные параметры динамического упрочнения;  $\varepsilon'$  — скорость деформации материала;  $r$  — радиус кольца в период фрагментации (см. (17)).

Таблица 2

Средние значения относительной деформации,  
при которой происходит разрушение,  
и ее среднеквадратичное отклонение для стали марки Ст.20

$L$ , мм	$m_{\varepsilon r}$	$\sigma_{\varepsilon r}$	$N$
140	0,073	0,027	17
200	0,076	0,032	14

Зависимости (19) построены для малоуглеродистых сталей с использованием результатов известных экспериментальных работ. В частности, использовались результаты работы [6], в которой измерялась глубина внедрения цилиндрического ударника с коническим носком в чистое железо, а также результаты работы [5], в которой на основе экспериментов по соударению стержней с жесткой преградой определялся динамический предел текучести конструкционных материалов. Использовались также результаты измерения осадки пластических демпферов из стали марки Ст.20 при падении экспериментальных сборок на жесткую преграду со скоростью 13 м/с. Во всех указанных случаях результаты численных расчетов, полученные с использованием приведенных зависимостей и параметров динамического упрочнения, удовлетворительно согласуются с результатами экспериментов.

Некоторые данные о величине разрушающей деформации сталей марок Ст.3, 30ХГСА и алюминиевого сплава Д16 приведены в работе [4]. При проведении взрывных экспериментов по разрушению труб из стали марки Ст.3 с внутренним диаметром 63 мм, длиной 200 мм, толщиной 3 ÷ 8 мм сферическим зарядом ВВ ТГ50/50 диаметром 62 мм обнаружено, что разрывы появляются во внешних слоях труб при относительной деформации, равной 5–10 %. Распространение разрывов на всю толщину стенки происходит при существенно большей величине относительной деформации в диапазоне 13–70 %. Причиной задержки распространения разрывов по толщине, очевидно, является воздействие высокого давления продуктов детонации на внутреннюю поверхность образцов, что приводит к увеличению пластичности внутреннего слоя материала. С использованием результатов измерения толщины фрагментов модельных оболочек из стали марки Ст.20, разрушенных взрывом компактного заряда ВВ, получены оценки  $m_{\varepsilon r}$  и  $\sigma_{\varepsilon r}$ , приведенные в табл. 2 ( $L$  — длина оболочки,  $N$  — число фрагментов). Измерения толщины проводились микрометром МК с ценой деления 0,01 мм, снабженным насадками, обеспечивающими диаметр контактной площадки, равный 1 мм.

Значения  $m_{\varepsilon r}$ , приведенные в табл. 2, согласуются с данными работы [6]. Значения среднеквадратичного отклонения относительной деформации от среднего значения  $\sigma_{\varepsilon r}$  получены по результатам двух взрывных экспериментов, для их уточнения требуется провести дополнительные эксперименты.

При оценке длины зоны отвердения по формуле (14) предполагается, что граница этой зоны распространяется от любого разрыва в область неотвердевшего материала. При этом не учитывается, что границы зон отвердения от соседних разрывов встречаются и расширение зон прекращается. Поэтому оценка длины зоны отвердения вблизи разрыва, полученная с помощью приведенного выше алгоритма, может оказаться завышенной, а оценка числа разрывов (и фрагментов) — заниженной.

**4. Аналитическая оценка средней длины и числа фрагментов кольца.** Согласно изложенной в п. 1 модели фрагментации кольца длина фрагмента равна сумме длин зон пластической разгрузки вблизи соседних разрывов в момент обращения в нуль длины зоны пластического течения между ними:

$$l = l_{s1} + l_{s2}.$$

Здесь

$$l_{s1} = r \sqrt{\frac{2\sigma_{п.т}(\varepsilon_k - \varepsilon_{r1})}{E}} \frac{c}{v}, \quad l_{s2} = r \sqrt{\frac{2\sigma_{п.т}(\varepsilon_k - \varepsilon_{r2})}{E}} \frac{c}{v},$$

$\varepsilon_{r1}$ ,  $\varepsilon_{r2}$  — значения разрушающей деформации в сечениях 1 и 2, в которых произошли разрывы;  $\varepsilon_k$  — значение деформации в момент встречи зон пластической разгрузки (при этом  $\varepsilon_k > \varepsilon_{r1}$ ,  $\varepsilon_k > \varepsilon_{r2}$ ).

Пусть разрыв 1 образовался быстрее разрыва 2. Оценка снизу длины фрагмента получается при  $\varepsilon_k = \varepsilon_{r2}$  и нулевом значении величины  $l_{s2}$ :

$$l_m = l_{s1} = \frac{rc}{v} \sqrt{\frac{2\sigma_{п.т} \Delta\varepsilon_m}{E}}; \quad (20)$$

$$\Delta\varepsilon_m = |\varepsilon_{r2} - \varepsilon_{r1}|. \quad (21)$$

Знак модуля в (21) введен для учета возможности появления первого разрыва как в сечении 1, так и в сечении 2.

На кратковременном этапе фрагментации все величины, входящие в формулу (20), можно считать постоянными. При этом длина фрагмента является случайной величиной, статистические характеристики которой определяются статистическими характеристиками разрушающей деформации  $\varepsilon_r$ . Математическое ожидание и среднеквадратичную погрешность определения длины фрагмента можно оценить на основе формул (20), (21) с использованием метода линеаризации [7]. Пусть значения разрушающей деформации  $\varepsilon_{r1}$ ,  $\varepsilon_{r2}$  являются независимыми нормально распределенными случайными числами с математическим ожиданием  $m_{\varepsilon_r}$  и среднеквадратичной погрешностью  $\sigma_{\varepsilon_r}$ . Тогда разность значений  $\Delta\varepsilon = \varepsilon_{r2} - \varepsilon_{r1}$ , при которых происходит разрушение, имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожиданием и дисперсией  $2\sigma_{\varepsilon_r}^2$  [7]. Модуль этой разности  $\Delta\varepsilon_m$  имеет усеченное нормальное распределение с функцией плотности вероятности

$$f(\Delta\varepsilon_m) = \frac{1}{\sqrt{\pi} \sigma_{\varepsilon_r}} \exp\left(-\frac{\Delta\varepsilon_m^2}{4\sigma_{\varepsilon_r}^2}\right), \quad \Delta\varepsilon_m > 0.$$

Математическое ожидание  $\Delta\varepsilon_m$  определяется по формуле

$$m_{\Delta\varepsilon_m} = \int_0^{\infty} f(\Delta\varepsilon_r) \Delta\varepsilon_r d(\Delta\varepsilon_r) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sigma_{\varepsilon_r}.$$

Подставляя в формулу (20)  $m_{\Delta\varepsilon_m}$  вместо  $\Delta\varepsilon_m$ , получаем оценку снизу математического ожидания длины фрагмента [7]:

$$m_l \approx 1,5r \sqrt{\frac{\sigma_{п.т} \sigma_{\varepsilon_r}}{E}} \frac{c}{v}.$$

Результаты, лучше согласующиеся с результатами расчета методом конечных приращений и экспериментальными данными, можно получить, используя уточненную формулу для средней длины фрагмента

$$m_l \approx 2,8r \sqrt{\frac{\sigma_{п.т} \sigma_{\varepsilon_r}}{E}} \frac{c}{v}. \quad (22)$$

При этом оценка среднего числа фрагментов равна

$$m_n \approx \frac{2\pi r}{m_l} = 2,25 \sqrt{\frac{E}{\sigma_{п.т} \sigma_{\varepsilon_r}}} \frac{v}{c}. \quad (23)$$

Как и в большинстве работ, посвященных исследованию фрагментации кольца (см. [1]), формула (23) представляет собой линейную зависимость числа фрагментов от радиальной скорости кольца  $v$ . Коэффициент перед дробью  $v/c$  выражен через параметры материала, определяющие скорость пластической разгрузки  $E$ ,  $\sigma_{п.т}$ , и через погрешность определения разрушающей деформации  $\sigma_{\varepsilon r}$ . Согласно (22), (23) увеличение напряжения, при котором появляется пластическое течение, и погрешности определения разрушающей деформации приводит к увеличению средней длины фрагментов и уменьшению их количества.

Сравнение формулы (22) с формулой В. М. Кузнецова (1) показывает, что они существенно различаются. В формуле (1) характерная длина фрагмента зависит от толщины кольца и значения относительной деформации, при котором происходит разрушение. В формуле (22) средняя длина фрагмента зависит от радиуса кольца, напряжения, при котором возникает пластическое течение, и среднеквадратичной погрешности определения относительной деформации, при которой происходит разрушение. Эти различия следуют из принятой в настоящей работе модели фрагментации, учитывающей зависимость скорости пластической разгрузки вблизи разрыва от времени и статистический разброс значений деформации, при которых происходит разрушение, по длине кольца.

В формулу (23) не входит непосредственно радиус кольца, т. е. масштабный эффект не учитывается в явном виде. Однако согласно приведенным выше формулам для оценки напряжения пластического течения (19) при увеличении радиуса кольца уменьшаются скорость деформации материала и динамическое добавочное напряжение, при котором возникает пластическое течение. Поэтому согласно (23) при увеличении радиуса кольца число фрагментов увеличивается. С учетом (19) коэффициент увеличения равен

$$k_m = \frac{m_n(r_2, v)}{m_n(r_1, v)} = \left( \frac{\sigma_{п.т}(r_1)}{\sigma_{п.т}(r_2)} \right)^{1/2}. \quad (24)$$

Значение  $k_m$  зависит от значений обоих параметров  $r_1$  и  $r_2$ .

**5. Сравнение результатов численных расчетов с экспериментальными данными.** При оценке приведенных выше методик расчета числа фрагментов кольца использовались результаты работ [8, 9], посвященных исследованию разрушения стальных труб соосным длинным зарядом ВВ, инициируемым с торца, поскольку величиной, определяющей их разрушение, является кольцевая деформация.

В работе [8] приведены результаты экспериментального исследования фрагментации цилиндрических оболочек из стали марки Ст.20. Диаметр основной части образцов составлял  $2r_0 = 42$  мм, длина оболочки равна пяти диаметрам, толщина стенки  $\delta_0 \approx 0,9$  мм. Количество фрагментов определялось методом импульсной рентгенографии.

При расчете принимались значения параметров материала  $E = 210$  ГПа,  $c = 5189$  м/с,  $\sigma_{br} = 0,44$  ГПа,  $\psi_b = 0,2$  [10]. С учетом данных табл. 2 принимались приближенные значения  $m_{\varepsilon r} = 0,08$ ,  $\sigma_{\varepsilon r} = 0,03$ . Согласно (16)–(18) число элементарных участков равно  $N_e = 226$ . В качестве скорости оболочки в момент фрагментации принималось зарегистрированное в экспериментах [8] значение скорости фрагментов. Экспериментальные значения скорости фрагментов взяты из работы [8]. Число фрагментов, определенное в экспериментах и расчетах, приведено в табл. 3 и на рис. 2. Значения невязки вычислялись по формуле

$$R = \left( \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (m_{ni} - n_{Ei})^2 \right)^{1/2},$$

где  $m_{ni}$ ,  $n_{Ei}$  — число фрагментов кольца, полученное в расчетах и экспериментах; индексы  $i$ ,  $n$  соответствуют номеру эксперимента и количеству экспериментов. Невязка для величины  $m_n$ , вычисленной с использованием МКП, равна 8,5, с использованием формулы (23) — 10,0.



Таблица 3

Число фрагментов, полученное в экспериментах [8]  
для оболочек из стали марки Ст.20

$v, \text{ м/с}$	$n_{Ei}$	$\sigma_{п.т.}, \text{ ГПа}$	$m_n$	
			Расчет с использованием МКП	Расчет по формуле (23)
175	10	0,76	9	7
290	21	0,79	14	12
365	30	0,81	17	15
395	22	0,81	19	16
810	50	0,87	34	31
905	33	0,88	37	35
1370	60	0,92	51	52
1690	63	0,94	60	63
1810	70	0,95	63	67
2040	80	0,96	70	75
2075	80	0,96	70	77
2075	67	0,96	70	77
2425	69	0,98	78	89

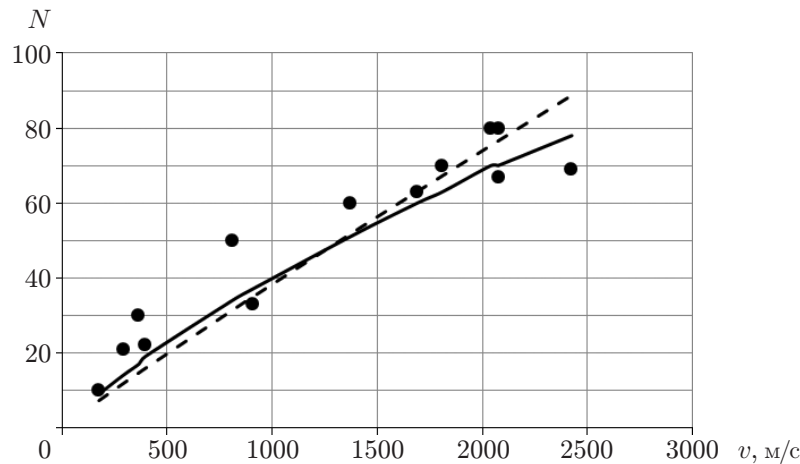


Рис. 2. Зависимость количества фрагментов от скорости расширения для оболочек из стали марки Ст.20:  
точки — эксперимент [8], сплошная линия — расчет с использованием МКП, штриховая — расчет по формуле (23)

Из табл. 3 и рис. 2 следует, что расчетные значения числа фрагментов, полученные с помощью МКП и с использованием формулы (23), близки к экспериментальным значениям. Результаты расчетов показывают, что минимум невязки  $R$  достигается при значении  $\sigma_{\epsilon r} = 0,03$ . В расчетах при большем значении  $m_{\epsilon r} = 0,15$  и неизменных остальных параметрах получены практически такие же результаты, как и при  $m_{\epsilon r} = 0,08$ , т. е. этот параметр практически не влияет на результаты расчета. Из табл. 3 следует, что при большой скорости расширения кольца ( $v \approx 2000 \text{ м/с}$ ) рассчитанные по формулам (19) значения напряжения, при которых появляется пластическое течение, близки к экспериментальному значению, равному 1 ГПа [3, 4], а при меньшей скорости — существенно меньше этого значения.

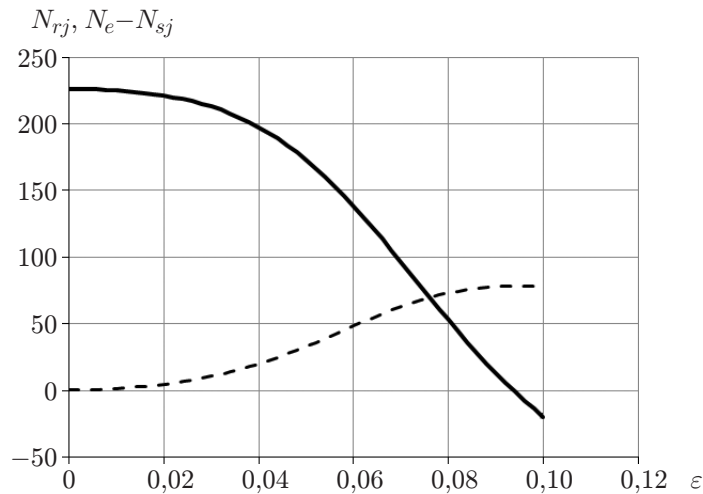


Рис. 3. Зависимости числа разрывов  $N_{rj}$  (штриховая линия) и числа неотвердевших элементов  $N_e - N_{sj}$  (сплошная линия) от относительной деформации при  $v = 2425$  м/с

Таблица 4

Значения масштабного коэффициента увеличения числа фрагментов  $k_m$  при  $r_1 = 0,021$  м

$r_2/r_1$	$k_m$				
	$v = 200$ м/с	$v = 400$ м/с	$v = 600$ м/с	$v = 800$ м/с	$v = 1000$ м/с
4	1,050	1,055	1,057	1,060	1,061
10	1,079	1,087	1,092	1,095	1,098
20	1,100	1,110	1,116	1,120	1,124
40	1,118	1,131	1,138	1,144	1,148

Следует отметить, что при проведении численного расчета использовались одномерные массивы значений  $\varepsilon_i$ ,  $f_{\varepsilon r}(\varepsilon_i)$ ,  $\Delta N_{ri}$ , содержащие 50 чисел, и двумерный массив значений  $N_{sij}$ , содержащий  $50 \times 50$  чисел. Для каждого значения скорости расчет проводился путем подбора величины шага  $\Delta\varepsilon$ , при которой процесс фрагментации заканчивается на границе сетки опорных значений  $\varepsilon_i$ .

На рис. 3 приведены зависимости числа разрывов и числа неотвердевших элементов кольца от относительной деформации при скорости его расширения  $v = 2425$  м/с, рассчитанные с использованием МКП. Видно, что процесс фрагментации кольца заканчивается при достижении значения относительной деформации  $\varepsilon \approx m_{\varepsilon r} + 0,4\sigma_{\varepsilon r} = 0,093$ . Расчет при  $v = 175$  м/с показывает, что процесс фрагментации заканчивается при достижении значения относительной деформации  $\varepsilon \approx m_{\varepsilon r} - 1,3\sigma_{\varepsilon r} = 0,04$ .

Из табл. 4, в которой приведены значения масштабного коэффициента  $k_m$ , рассчитанные с использованием формулы (24) при  $r_1 = 0,021$  м и указанных выше параметрах динамического упрочнения стали марки Ст.20, следует, что при увеличении радиуса кольца в четыре раза число фрагментов увеличивается не более чем на 6 %, при увеличении радиуса в 40 раз — не более чем на 15 %.

В работе [9] приведены результаты экспериментального исследования процесса фрагментации цилиндрических оболочек (внутренний диаметр 38,1 мм, толщина стенки 2,29 мм, длина 24,5 мм) взрывом ВВ. Испытывались оболочки из стали с массовой долей углерода 0,07 % и других материалов. Расчетные оценки количества фрагментов проведены для оболочек из стали с массовой долей углерода 0,07 %. Использовались ха-

Таблица 5

Число продольных разрывов, определенное в экспериментах [9]  
для оболочек из стали с массовой долей углерода 0,07 %

$v$ , м/с	$n_E$	$\sigma_{п.т.}$ , ГПа	$m_n$	
			Расчет с использованием МКП	Расчет по формуле (23)
150	4	0,77	7	5
390	12	0,84	15	13
510	18	0,86	18	17

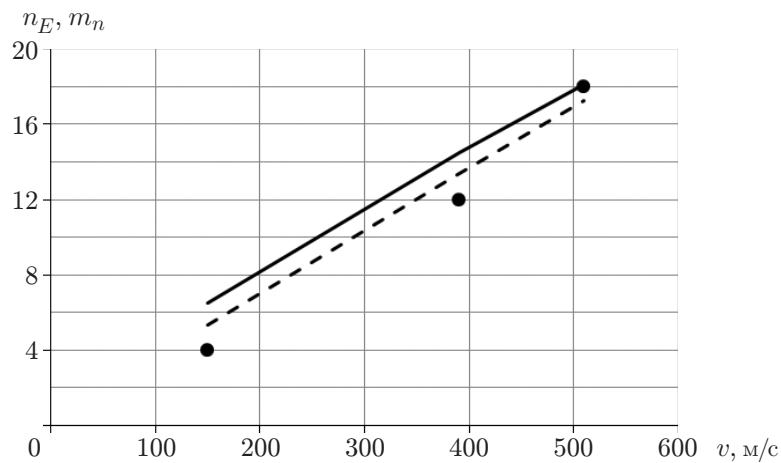


Рис. 4. Зависимость числа продольных разрывов от скорости расширения для оболочек из стали с массовой долей углерода 0,07 %:

точки — эксперимент [9], сплошная линия — расчет с использованием МКП, штриховая — расчет по формуле (23)

рактические характеристики аналогичной по составу отечественной стали марки Ст.08:  $\sigma_{br} = 0,39$  ГПа,  $\psi_b = 0,20$ . Параметры динамического упрочнения те же, что и для стали марки Ст.20. Значения погрешности определения разрушающей деформации выбраны равными  $m_{\varepsilon r} = 0,08$ ,  $\sigma_{\varepsilon r} = 0,04$ . Согласно (16)–(18) число элементарных участков равно  $N_e = 89$ . Результаты расчетов приведены в табл. 5 и на рис. 4. Поскольку испытывались оболочки малой длины, для сравнения использовалось зарегистрированное в экспериментах число продольных разрывов. Из табл. 5 и рис. 4 следует, что расчетные оценки числа фрагментов близки к экспериментально определяемому числу продольных разрывов. Невязка для величины  $m_n$ , вычисленной с использованием МКП, равна 2,0, с использованием формулы (23) — 1,2.

**Заключение.** Рассмотрена задача о фрагментации тонкого узкого кольца, материал которого находится в состоянии пластического течения, при высокоскоростном радиальном расширении.

Из условия появления пластического течения на границе зоны отверждения получено аналитическое выражение для скорости движения этой границы, зависящей от напряжения пластического течения и плотности материала.

Разработан алгоритм численного расчета среднего числа фрагментов кольца методом конечных приращений пластической деформации. Получены формулы для аналитической оценки средней длины фрагмента кольца и среднего числа фрагментов. В разработанной модели фрагментации основными параметрами материала, определяющими число фраг-

ментов кольца, являются напряжением пластического течения материала, плотность материала и среднее квадратичное отклонение разрушающей относительной деформации. Из результатов расчетов следует, что при увеличении радиуса колец за счет уменьшения скорости деформации и среднего напряжения, при котором появляется пластическое течение, число фрагментов увеличивается.

Сравнение результатов расчетов числа фрагментов кольца, выполненных по приведенным в работе методикам, с известными данными экспериментов по взрывному разрушению цилиндрических оболочек из малоуглеродистых сталей зарядом ВВ большой длины показало, что они удовлетворительно согласуются, если напряжение пластического течения задается с учетом динамического упрочнения материала, а величина среднее квадратичной погрешности определения деформации, при которой происходит разрушение, принимается на основе результатов взрывных экспериментов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Физика** взрыва: В 2 т. / Под ред. Л. П. Орленко. М.: Физматлит, 2002. Т. 2.
2. **Кузнецов В. М.** Математические модели взрывного дела. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1977.
3. **Иванов А. Г., Новиков С. А., Сеницын В. А.** Исследование упруго-пластических волн в железе и стали при взрывном нагружении // Физика твердого тела. 1963. Т. 5, вып. 1. С. 269–278.
4. **Иванов А. Г., Кочкин Л. И., Васильев Л. В., Кустов В. С.** Взрывное разрушение труб // Физика горения и взрыва. 1974. Т. 10, № 1. С. 127–132.
5. **Глушак А. Б., Новиков С. А.** Сопротивление металлов пластической деформации при высокоскоростном сжатии // Прочность материалов при динамическом нагружении: Тр. ученых ядерных центров России. 2003. № 7. С. 98–105.
6. **Витман Ф. Ф., Степанов В. А.** Влияние скорости деформирования на сопротивление деформированию металлов при скоростях удара  $10^2$ – $10^3$  м/с // Некоторые проблемы прочности твердого тела: Сб. ст. М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1959. С. 207–221.
7. **Вентцель Е. С.** Теория вероятностей. М.: Физматгиз, 1962.
8. **Иванов А. Г., Кочкин Л. И., Новиков В. Ф., Фаломеева Т. М.** Высокоскоростное разрушение тонкостенных труб из мягкой стали // ПМТФ. 1983. № 1. С. 112–117.
9. **Banks E. E.** The fragmentation behavior of thin-walled metal cylinders // J. Appl. Phys. 1969. V. 40. P. 437–438.
10. **Марковец М. П.** Истинная диаграмма растяжения и расчет на прочность. М.: Оборонгиз, 1947.

*Поступила в редакцию 13/XII 2016 г.,  
в окончательном варианте — 27/VI 2017 г.*